今後の研究計画

1. 統計多様体の測地的連結性

統計多様体の幾何学においてはいつ 2 点の間に測地線が存在するか (=測地的連結性) はほとんど研究されておらず，最初の結果は論文 3 によるものである．統計多様体上のアファイン接続の測地的連結性の研究を，まずは**定曲率統計多様体**に対して行う．

統計多様体 (M, ∇, g) が与えられたとき，∇ の曲率テンソル場とリーマン計量 g によって断面曲率が計算できる．断面曲率が常に一定である統計多様体を定曲率統計多様体と呼ぶ．定曲率である統計多様体は情報幾何学，アファイン微分幾何学，射影微分幾何学など様々な分野で登場する**重要な統計多様体のクラスである**.

単連結である定曲率統計多様体には幾何的ダイバージェンスが与えられる [AN, K]．幾何的ダイバージェンスは多様体上の擬距離であり，特に，情報幾何学においては幾何的ダイバージェンスは応用上重要であるカルバック・ライブラーダイバージェンスに一致する．幾何的ダイバージェンスはアファイン接続 ∇ と共役接続 $\overline{\nabla}$ の測地的連結性を用いて計算できる．

この研究では，定曲率統計多様体上の 2 つのアファイン接続が測地的連結であることの十分条件を求める．本研究の遂行にはアファイン微分幾何学による理論の応用が期待できる．なぜなら，アファイン微分幾何学で現れる定曲率統計多様体上のアファイン接続の測地線の性質はよく知られているからである．そして，単連結統計多様体 (M^n, ∇, g) に対して，実アファイン空間へのはめこみ $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ で (∇, g) を M 上に誘導するものが存在する [NS]．従って，任意の定曲率統計多様体 (M, ∇, g) の普遍被覆 $(\tilde{M}, \tilde{\nabla}, \tilde{g})$ は実アファイン空間の超曲面として実現できる．さらに，被覆空間 $\tilde{M}$ において $\tilde{\nabla}$ が測地的連結であるとき，底空間 M において ∇ も測地的連結であることが従う．

統計多様体上のアファイン接続の測地的連結性は様々な可能性を秘めている．統計多様体上のアファイン接続の測地的連結性から得られるアファイン接続の大域的な性質により，統計構造を備えた対称空間，幾何的ダイバージェンスの解析的な研究，統計多様体におけるアファイン接続の完備性の役割などの研究が始動すると考えている．これらの研究を定曲率統計多様体に対して行うだけでも，定曲率統計多様体が現れる情報幾何学，射影微分幾何学などでの応用が期待できる．

2. 確率単体内の超曲面論

統計多様体の中でも最も代表的なものである，確率単体における超曲面論を行う．
n 次元確率単体 S_n とはラベルが $n+1$ 個である離散確率分布全体からなる多様体である．任意の統計多様体は，部分統計多様体としてこの確率単体にはめ込むことができる [L]．確率単体 S_n には確率論による条件から統計構造 $(\nabla^{(m)}, g^F)$ が定まり，$\nabla^{(m)}$ は混合型接続，g^F はフィッシャー計量，そして共役接続 $\nabla^{(e)}$ は指数型接続と呼ばれる．情報幾何学は確率単体 S_n の $\nabla^{(m)}$-自己平行部分多様体と $\nabla^{(e)}$-自己平行部分多様体による**確率単体 S_n の部分多様体論**である．これらの部分多様体は統計学的に意味があることからよく研究がされてきたが，他の確率単体 S_n の部分多様体については全く明らかになっていない．

この研究では，まず確率単体内の超曲面論を始動する．なぜなら，研究 1. と同様にアファイン微分幾何学による理論が期待できるからである．確率単体 S_n は定曲率統計多様体であるため，S_n に $(\nabla^{(m)}, g^F)$ を誘導するアファインはめ込み $f : S_n \to \mathbb{R}^{n+1}$ が存在する．確率単体 S_n の $n-1$ 次元部分多様体 M^{n-1} に対して包含写像を $\iota : M \to S_n$ とすれば，余次元 2 であるアファインはめ込み $f \circ \iota : M^{n-1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ を得る．

統計多様体の幾何学では様々な重要なクラスが存在する．確率単体 S_n の $n-1$ 次元部分統計多様体 M^{n-1} がこれらのクラスであるための必要十分条件を求める．そして，その必要十分条件を確率論の言葉で表し，**情報幾何学での意味づけを目指す**.

[AF] N. Ay, D. Felice, Towards a Canonical Divergence within Information Geometry, Inf. Geom. **4**(1) (2018).
[AN] S. Amari, H. Nagaoka, Differential geometry of smooth families of probability distributions. Technical Report METR 82-7, University of Tokyo (1982).
[K] T. Kurose, On the Divergences of 1-Conformally Flat Statistical Manifolds, Tohoku Math. J. **46**(4) (1994).
[L] H.V. Lê, Statistical manifolds are statistical models. J. geom. **84**(1), 83–93 (2006).
[NS] 野水克己, 佐々木武, アファイン微分幾何学. 裳華房 (1994).
[Sh] 志磨裕彦, ヘッセ幾何学．裳華房 (2001).