

## (2) これまでの研究成果のまとめと今後の研究計画

### これまでの研究成果のまとめ

1. Hitoshi Furuhashi, **Ryu Ueno**, A Variation Problem for Mappings between Statistical Manifolds, Results in Mathematics, **80**(57), 2025.
2. Ryu Ueno, Statistical Biharmonicities of Identity Maps, Information Geometry, 2025, <https://doi.org/10.1007/s41884-025-00184-1>.
3. Ryu Ueno, Geodesic Connectedness on Statistical Manifolds with Divisible Cubic Forms, Information Geometry, 2025, <https://doi.org/10.1007/s41884-025-00185-0>.
4. Ryu Ueno, The Second Variational Formula for Statistical Biharmonic Maps, arXiv.2509.04807.

### 統計多様体の概要

統計多様体はアフィン微分幾何学 [NS] に起源を持つ。特に、1982 年 [AN] に甘利俊一、長岡浩司らが情報幾何学において統計多様体の構造を応用して以来、現代において統計多様体の研究は盛んに行われている。

**統計 2 重調和写像**は統計 2-エネルギー汎関数による変分問題によって誘導された統計多様体間の写像のクラスであり、これは統計多様体の幾何学における**初めての**変分問題である。

統計 2-エネルギーとはリーマン幾何学の 2-エネルギー汎関数を統計多様体間の間の写像に対して拡張した汎関数である。魚橋 (2017), Şimşir (2019) などが統計多様体間の“調和写像”を定義したが、これは終域の統計構造に依存しない定義である。統計多様体間の調和写像を定義することは現状難しいため、統計 2-エネルギーのオイラー・ラグランジュ方程式によって統計 2 重調和写像を定めたのが論文 1 である。特に、アフィン微分幾何学における非固有アフィン超球面はめ込みが、テンション場が 0 ではない統計 2 重調和写像であることを示した。論文 4 では統計 2-エネルギーの第 2 変分公式を導出している。統計 2-エネルギーの第 2 変分公式を求めることによって、統計多様体間の写像  $u: M \rightarrow N$  によって定まる  $u^{-1}N$  上の作用素  $\mathcal{H}$  を得た。写像の終域がヘッセ多様体、すなわちアフィン接続が平坦な統計多様体であるとき、この作用素  $\mathcal{H}$  は**ヘッセ曲率のみで決定される**。ヘッセ多様体は情報幾何学で頻りに現れる統計多様体であり、ヘッセ曲率はヘッセ多様体の特徴づける断面曲率の役割を持つ [Sh]。論文 2 では同じリーマン計量を持つ異なるアフィン接続を持つ統計多様体間の恒等写像について統計 2 重調和性を求めている。この恒等写像のテンション場は 0 ではなく、実際には**統計多様体特有のベクトル場であるチェビチェフベクトル場の定数倍であることを発見した**。チェビチェフベクトル場が 0 である統計多様体は“等積条件を満たす”といい、これは等積アフィン微分幾何学において重要である統計多様体のクラスである。この恒等写像が統計 2 重調和であるための偏微分方程式を求め、これを用いて統計多様体の“準等積条件”を定義した。ある条件下で準等積条件を満たす統計構造を決定し、特に、中心アフィン微分幾何学におけるチェビチェフ作用素が 0 である極小曲面にて、準等積条件を満たす統計多様体が現れることを示した。

### 計量で割り切れる 3 次形式を持つ統計多様体 (論文 3)

計量で割り切れる 3 次形式を持つ統計多様体はアフィン微分幾何学において自然に現れる。本論文では、このクラスの統計多様体の大域的な性質を研究している。特に、**いつ 2 点の間にアフィン接続の測地線が存在するか (=測地的連結性) の十分条件を統計多様体の幾何学において初めて発見した**。情報幾何学では、拡張ピタゴラスの定理により測地線を用いて KL ダイバージェンス情報量が計算でき、また一般の統計多様体に対してアフィン接続の測地的連結性を用いてダイバージェンス関数を定めるが、情報幾何学や統計多様体の幾何学において**測地的連結性の先行研究は全くない** [AF, AN, K]。

他にもこの論文では、統計構造から多様体に新しい擬距離構造を誘導し、リーマン幾何学におけるホップ・リノウの定理、またカルタン・アダマールの定理を割り切れる 3 次形式を持つ統計多様体上で発見した。