

研究計画

米村 拳太郎

2025 年 12 月 2 日

4つの研究を行いたいと考えている。

1つ目は石川 [1] によって定義された smooth quandle に関するものである。これは、群論における Lie 群の類似物で、多様体構造と滑らかな演算を備えたカンドルである。「smooth quandle は適当な Lie 群からなる conjugated quandle ^{*1}に埋め込める」という予想を立てている (申請者 [4] 参照)。予想を球面カンドルの場合に示したが、他の場合では分かっていない。他の場合を調べていきたいと思っている。

2つ目は対称空間のなすカンドルの離散部分カンドルの分類と、そのカンドルコサイクルの抽出である。「カンドルは対称空間の離散化」であるという思想を持つ研究者にとって、重要な具体例を提示するものと推測される。また、そうして得られるカンドルはどのような対称性があるのか、どのような群が作用するのかを調べることは、結び目理論側からの要請であるカンドルコサイクルの抽出につながることもくろむ次第である。

3つ目は Lie 代数とその表現に関してである。佐々野 [3] によって提案された PC Lie 代数と呼ばれる枠組みがある。Lie 代数とその表現から新しい Lie 代数を構築していき、Kac-Moody Lie 代数を包括するような代数構造を与える。申請者は smooth quandle を調べる上で有用な道具だと思える。例えば、smooth quandle の例として Riemann 対称空間の構造を用いて定まるものがあるが、そのカンドル構造とルート系や佐武図形がどう関係するのか一切調べられていない。具体例を通した検証をまとめたり拡張する際の言葉として、PC Lie 代数の理論が必要なのではないかと思う次第である。基礎理論のうち、まだ解かれていない問題 (例えば、実形に相当する概念の構築、古典型の Lie 代数の PC Lie 代数の枠組みを用いた具体的な構成、そしてテンソル積表現と得られる PC Lie 代数の対応など) にアプローチしつつ、カンドルへの応用を考えていきたい。

4つ目は軌道分解についてである。OCAMI 共同利用における「軌道分解の数理に伴う課題解決」に参加した。内容としては、ある代数群の両側剰余類の大きさを調べるというものである。こちらで、定理を作る上で必要な実験の計算をプログラムを作成し行っている。例えば、 $GL(2n, \mathbb{F}_q)$ の $n = 2, 3, 4, 5, 6$ の場合の両側剰余類といった、具体的な場合に条件を満たす行列を全て列挙するようなプログラムを Python を用いて構築するなどである。引き続き、内容の理解を深めつつ支援プログラムを作成したいと考えている。

参考文献

- [1] Katsumi Ishikawa. On the classification of smooth quandles. preprint.
- [2] Takefumi Nosaka. *Quandles and topological pairs; Symmetry, knots, and cohomology*. SpringerBriefs in Mathematics. Springer, Singapore, 2017. Symmetry, knots, and cohomology.
- [3] Nagatoshi Sasano. Contragredient lie algebras and lie algebras associated with a standard pentad. *Tsukuba Journal of Mathematics*, Vol. 42, No. 1, pp. 1–51, 2018.
- [4] Kentaro Yonemura. *An embedding of a smooth quandle into a Lie group*. PhD thesis, Kyushu University doctor thesis, 2023.

^{*1} 群に右からの共役による自己作用を通して定まるカンドル。[2] 参照。