M. Khovanov は Jones 多項式を精密化するホモロジカルな結び目不変量を構成しました。Jones 多項式は量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ とその 2 次元既約表現から得られる量子結び目不変量です。これに着想を得て、私は次の問題に取り組んできました。

他の量子結び目不変量を精密化するホモロジカルな結び目不変量を構成できるか？

また、特定の冪根における量子群から得られる結び目不変量が 3 次元多様体の不変量に拡張されることが知られているため、次の問いにも取り組んできました。

3 次元多様体のホモロジカルな不変量を構成できるか？

$$
\begin{tikzcd}
 & \bigoplus \mathrm{Hom}_{U_q(\mathfrak{sl}_n)}(\wedge^{\underline{i}}, \wedge^{\underline{j}}) \arrow[d, squiggly, "\text{Yonezawa [Doctoral thesis]}"'] & U_q(\mathfrak{gl}_m) \arrow[l, "\gamma_m^n"'] \arrow[r, "\gamma_m"] \arrow[d, squiggly, "\text{Khovanov-Lauda, Rouquier}"] & \bigoplus \mathrm{Hom}_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}(S^{\underline{i}}, S^{\underline{j}}) \arrow[d, dotted, "\text{Khovanov-Lauda-Sussan-Yonezawa}"] \\
\begin{array}{c}\text{Link invariant}\\ CKh(q,t,s)\end{array} & \mathrm{HMF}_m^n \arrow[l, Rightarrow] & \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_m) \arrow[l, "\Gamma_m^n"', "\text{Mackaay-Yonezawa}"] \arrow[r, "\Gamma_m", "\text{Khovanov-Lauda-Sussan-Yonezawa}"'] & \mathrm{Bim}(m,k)
\end{tikzcd}
$$

(1) 論文 "Quantum $(\mathfrak{sl}_n, \wedge V_n)$ link invariant and matrix factorizations" の要約: Khovanov と Rozansky は，量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ とその n 次元既約表現に由来する結び目不変量を精密化するホモロジー的な結び目不変量を構成しました．本論文では Khovanov–Rozansky の理論を一般化し，$U_q(\mathfrak{sl}_n)$ とその基本表現から得られる不変量 $CJ_n(q)$ を精密化する結び目不変量 $CKh(q,t,s)$ を定義しました（上図の青字の研究）．特に，$CJ_n(q)$ は $CJ_n(q) = CKh(q,-1,1)$ として復元されます．

(2) 論文 "$\mathfrak{sl}_N$-Web categories and categorified skew Howe duality" の要約: 量子群 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の圏化である $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_m)$ から行列因子化の圏 HMF_m^n への関手

$$\Gamma_m^n : \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_m) \longrightarrow \mathrm{HMF}_m^n$$

を構成しました（上図左下の緑の関手）。この関手と $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_m)$ 上の組紐群作用を用いて，$U_q(\mathfrak{sl}_n)$ とその基本表現から得られる結び目不変量を精密化したホモロジカル不変量を構成しました。

(3) 論文 "Braid group actions from categorical symmetric Howe duality on deformed Webster algebras" の要約: 変形 Webster 代数 $W(\mathbf{s},k)$ を導入し、圏 $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_m)$ からその両側加群圏 $\mathrm{Bim}(m,k)$ への関手

$$\Gamma_m : \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_m) \longrightarrow \mathrm{Bim}(m,k)$$

を構成しました（図の右下：オレンジの関手）。この関手を用いて、両側加群圏 $\mathrm{Bim}(m,k)$ 上に組紐群の作用を構築しました。

(4) 論文 "A braid group action on a p-DG homotopy category" の要約: Khovanov は，圏に p-DG 構造を導入することで冪根での圏化を行うという着想を提案しました。本論文では，両側加群圏 $\mathrm{Bim}(m,k)$ に p-DG 構造を導入し，その構造と整合する組紐群の作用を構成しました。