Macdonald 多項式入門

野海 正俊 (述)

(齋藤 洋介 (記))

はじめに

これは, 大阪公立大学において行われた野海 正俊 氏による集中講義「Macdonald 多項式入門」(2022 年 8 月 8 日 ～ 12 日) の内容を筆者 (齋藤) がまとめたものである. 内容は集中講義のノートにほとんど沿っているが, 実際の集中講義では触れられていない話題を筆者の判断で追加している箇所もいくつかある (第 6 章「付録」などがそうである).

本講義録に関係することとして少し補足しておくことがある. この講義録の元になった集中講義は, 野海 氏が出版を計画している

- Masatoshi Noumi『Macdonald Polynomials Commuting family of q-difference operators and their joint eigenfunctions』(Springer, 2023 (予定))

の内容に準拠していた. 本講義録によって Macdonald 多項式に興味を持った読者には, この野海 氏の本を強くすすめたい.

謝辞

本講義録の作成に際し, 野海 正俊 氏には筆者の疑問点の解明や関連する情報の提供など, 様々な形でご協力いただいた. ここに感謝の意を表したい. また, 本講義録の作成をすすめてくださった尾角 正人 氏, 筆者に研究の場を提供してくれている大阪公立大学数学研究所にも感謝したい.

本研究は, 大阪公立大学数学研究所 (文科省共同利用・共同研究拠点「数学・理論物理の協働・共創による新たな国際的研究・教育拠点」JPMXP0619217849) によって部分的に助成を受けている.

2023 年 1 月　　齋藤 洋介

目次

- 記号について少し述べておく.「A を B によって定める」ことを「A:=B」と書く. 整数の全体を $\mathbb{Z}$, 0 以上の整数の全体を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ や $\mathbb{N}$, 自然数の全体を $\mathbb{Z}_{>0}$, 有理数の全体を $\mathbb{Q}$, 実数の全体を $\mathbb{R}$, 複素数の全体を $\mathbb{C}$ と書く. また, $\mathbb{C}$ から 0 を除いたものを $\mathbb{C}^*:=\mathbb{C}\backslash\{0\}$ と書く.

- 有限集合 X の元の個数を $\#X$ と書く.

- n 個の実数たち $a_1, \ldots, a_n$ のうち最も大きなものを $\max\{a_1, \ldots, a_n\}$, 最も小さなものを $\min\{a_1, \ldots, a_n\}$ と書く.

- X を集合とするとき, $\delta_{x,y}\in\{0,1\}$ $(x,\, y\in X)$ を

$$\delta_{x,y}:=\begin{cases} 1 & (x=y), \\ 0 & (x\neq y) \end{cases}$$

によって定め, これをクロネッカーのデルタと呼ぶ.

他にも数学の記号はいろいろと現れるが, 基本的には数学の慣習に従う.

第 0 章　Macdonald 多項式とは

Macdonald 多項式とはある対称多項式のクラスで, 表現論や幾何, 数理物理や組み合わせ論など, 様々な分野に現れることが知られている. 今回の集中講義では Macdonald 多項式の基本的な性質や関連する話題を紹介していく予定であるが, この第 0 章では, Macdonald 多項式がどういうものであるのかを大まかに述べる.

0.1　対称多項式

対称多項式とは, 平たくいうと"変数を入れ換える操作で不変な多項式"のことである. 以下では対称多項式を定義し, 関連する初歩的な内容を述べる.

n を自然数とする (以下, "n" や "m" が突然現れるかもしれないが, そういうときには, それらはある自然数であると思ってほしい). 複素係数の n 変数多項式の全体を $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ と書く. 標準的な多重指数の記号である

$$x^\mu := {x_1}^{\mu_1}{x_2}^{\mu_2}\cdots{x_n}^{\mu_n} \quad (\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)\in\mathbb{N}^n)$$

を使うことにすると

$$\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]=\left\{\sum_{\mu\in\mathbb{N}^n} c_\mu x^\mu \ (\text{有限和}) \ \middle|\ c_\mu\in\mathbb{C} \ (\mu\in\mathbb{N}^n)\right\}$$

である. この $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ に n 次の対称群 $\mathfrak{S}_n$ が次のように作用することがわかる. まず

$$\sigma(x^\mu) := {x_{\sigma(1)}}^{\mu_1}{x_{\sigma(2)}}^{\mu_2}\cdots{x_{\sigma(n)}}^{\mu_n} \quad (\mu\in\mathbb{N}^n,\ \sigma\in\mathfrak{S}_n)$$

とする. 一般の n 変数多項式に対する対称群の元の作用は, これを $\mathbb{C}$-線型に拡張して定める：$\sigma\in\mathfrak{S}_n$ および $f=\sum_{\mu\in\mathbb{N}^n} c_\mu x^\mu\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ に対し

$$\sigma(f) := \sum_{\mu\in\mathbb{N}^n} c_\mu\sigma(x^\mu) = \sum_{\mu\in\mathbb{N}^n} c_\mu {x_{\sigma(1)}}^{\mu_1}{x_{\sigma(2)}}^{\mu_2}\cdots{x_{\sigma(n)}}^{\mu_n}.$$

定義 0.1 (対称多項式)**.** 多項式 $f\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ について, すべての $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ に対し

$$\sigma(f)=f$$

が成り立つとき ($\mathfrak{S}_n$ の作用で不変であるということ), f は n 変数の対称多項式であるという. n 変数の対称多項式の全体を次のように書く：

- $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n} := \{f\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n] \mid \text{任意の } \sigma\in\mathfrak{S}_n \text{ に対し } \sigma(f)=f\}$.

対称多項式は十分にたくさん存在する. n 変数多項式の変数を対称化する操作 $\mathrm{Sym}(\bullet)$ を

$$\mathrm{Sym}(f):=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sigma(f)\quad(f\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n])$$

によって定めると, 次が成り立つことが確かめられる :

(i)　$\sigma\circ\mathrm{Sym}=\mathrm{Sym}\circ\sigma=\mathrm{Sym}\ \ (\sigma\in\mathfrak{S}_n)$.

(ii)　$\mathrm{Sym}\circ\mathrm{Sym}=\mathrm{Sym}$.

(iii)　任意の対称多項式 $f\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ に対し $\mathrm{Sym}(f)=f$ である.

(iv)　$\mathrm{Im}(\mathrm{Sym})=\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$.

(i) は次のようにすればわかる :

$$\sigma\circ\mathrm{Sym}=\frac{1}{n!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n}\sigma\tau\overset{\sigma'=\sigma\tau}{=\!=\!=\!=}\frac{1}{n!}\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_n}\sigma'=\mathrm{Sym}.$$

$\mathrm{Sym}\circ\sigma=\mathrm{Sym}\ \ (\sigma\in\mathfrak{S}_n)$ も同様である. (ii) は (i) を使うことで

$$\mathrm{Sym}\circ\mathrm{Sym}=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sigma\circ\mathrm{Sym}=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{Sym}=\mathrm{Sym}$$

と示される. (iii) は対称多項式の定義から直ちに従う. (iv) を示すには $\mathrm{Im}(\mathrm{Sym})\subset\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ かつ $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}\subset\mathrm{Im}(\mathrm{Sym})$ であることをいえばよい. $\mathrm{Im}(\mathrm{Sym})\subset\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ であることは (i) から従う. もう一方の $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}\subset\mathrm{Im}(\mathrm{Sym})$ は, 対称多項式 $f\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ を任意のとるとき, (iii) によって

$$f=\mathrm{Sym}(f)\in\mathrm{Im}(\mathrm{Sym})$$

であることから従う. 以上より, Sym を使うことで対称多項式をいくらでも作ることができる.

0 以上の整数の列 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots)$ で $\lambda_i\geq\lambda_{i+1}$ $(i\in\mathbb{Z}_{>0})$, かつ λ の 0 でない成分は有限個であるものを分割と呼ぶ. 分割の全体を $\mathcal{P}$ と書く. 分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots)$ に対し

$$|\lambda|:=\sum_{i\geq1}\lambda_i,\quad\ell(\lambda):=\#\{i\in\mathbb{Z}_{>0}\mid\lambda_i\neq0\}$$

とおき, $|\lambda|$ を λ の大きさ, $\ell(\lambda)$ を λ の長さと呼ぶ. これらの記号は以下でも用いる. $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し, 長さが n 以下の分割の全体を $\mathcal{P}_n$ とおく. このとき $\mathcal{P}_n\subset\mathbb{N}^n$ とみなす.

分割 $\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対し

- $$m_\lambda(x):=\sum_{\mu\in\mathfrak{S}_n.\lambda}x^\mu=\sum_{\substack{\mu\in\mathbb{N}^n\\ \mu\text{ は }\lambda\text{ の置換}}}x^\mu\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$$

とおき, これをモノミアル対称多項式と呼ぶ. ここで多重指数 $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathbb{N}^n$, 置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ に対し

$$\sigma\cdot\mu:=\left(\mu_{\sigma^{-1}(1)},\dots,\mu_{\sigma^{-1}(n)}\right)\in\mathbb{N}^n$$

とし, 多重指数 $\mu\in\mathbb{N}^n$ の $\mathfrak{S}_n$-軌道を

$$\mathfrak{S}_n.\mu:=\{\sigma\cdot\mu\in\mathbb{N}^n \mid \sigma\in\mathfrak{S}_n\}$$

とした. このとき

$$\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}=\bigoplus_{\lambda\in\mathcal{P}_n}\mathbb{C}m_\lambda(x)$$

が成り立つ. また, 分割 $\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対し

- $$s_\lambda(x):=\frac{\det\left[{x_i}^{\lambda_j+n-j}\right]_{1\le i,j\le n}}{\det[{x_i}^{n-j}]_{1\le i,j\le n}}\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$$

と定め (これが対称多項式であることは後述する), これを Schur 函数と呼ぶ. このとき

$$\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}=\bigoplus_{\lambda\in\mathcal{P}_n}\mathbb{C}s_\lambda(x)$$

が成り立つ.

Schur 函数の定義の分母に現れた $\det\left[{x_i}^{n-j}\right]_{1\le i,j\le n}$ は, いわゆる差積と呼ばれる n 変数の反対称多項式で, 以下では次の記号を用いる :

- $$\Delta(x):=\det\left[{x_i}^{n-j}\right]_{1\le i,j\le n}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j).$$

差積 $\Delta(x)$ に関する話はいろいろな線型代数の本に載っているので, より詳しいことはそちらを参照してほしい. 対称多項式については, 第 1 章「対称函数, 特に Schur 函数」でもう少し詳しく述べる.

0.2 Macdonald 多項式の定義や性質について

ここからは, Macdonald 多項式について知られている事柄を大まかに紹介していく (そのうちのいくつかは, より後の章で詳しく述べる).

以下では, q を $|q|<1$ なる複素数, $t\in\mathbb{C}$ とする ($t=0$ だと困ることもあるので, t に対する条件は場面ごとに変わり得ると思ってほしい). n 変数函数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ の i 番目の変数 x_i のみを q 倍する操作を

$$T_{q,x_i}f(x_1,\ldots,x_n):=f(x_1,\ldots,\overbrace{qx_i}^{i\text{ 番目}},\ldots,x_n)$$

と書く. このとき

- $$D_x:=\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}T_{q,x_i}$$

を Macdonald の q-差分作用素という (以下では Macdonald 作用素と呼ぶ). あまり明らかなことではないが, この D_x は n 変数対称多項式の空間 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ に作用している. また, q, t が十分に "generic" にとられている場合 (例えば, q, t が $\mathbb{Q}$ 上で代数的に独立である場合), D_x は $\mathbb{Q}(q,t)[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ 上で対角化されることがわかる.

定理 0.2 (Macdonald 多項式). 任意の $\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対し, 次の性質を満たす対称多項式 $P_\lambda(x;q,t)\in\mathbb{Q}(q,t)[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ が一意に存在する：

(1) $P_\lambda(x;q,t)$ は次の展開を持つ：係数 $u^\lambda{}_\mu\in\mathbb{Q}(q,t)$ $(\mu<\lambda)$ がただ 1 組存在して

$$P_\lambda(x;q,t)=m_\lambda(x)+\sum_{\substack{\mu\in\mathcal{P}_n\\ \mu<\lambda}} u^\lambda{}_\mu m_\mu(x).$$

ここで現れた "$\mu<\lambda$" は多重指数の dominance order である (後述する).

(2) $D_x P_\lambda(x;q,t)=d_\lambda P_\lambda(x;q,t),\quad d_\lambda:=\sum_{i=1}^{n} q^{\lambda_i}t^{n-i}$ が成り立つ.

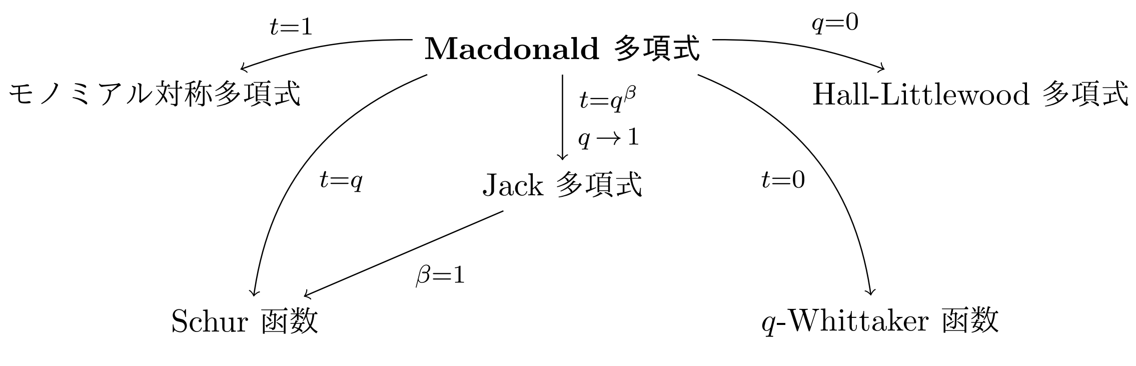
これらの条件で特徴づけられる対称多項式 $P_\lambda(x;q,t)$ を Macdonald 多項式と呼ぶ.

Macdonald 多項式について次のことが知られている.

(a) (q,t) **の特殊化.** Macdonald 多項式 $P_\lambda(x;q,t)$ の q, t にある値を代入したり $t=q$ とおいたりすることができるが, そうするときに次が成り立つ：

- $t=1$: $P_\lambda(x;q,1)=m_\lambda(x)$ (モノミアル対称多項式).
- $t=q$: $P_\lambda(x;q,q)=s_\lambda(x)$ (Schur 函数).

この他, Macdonald 多項式において $q=0$ とおくと Hall-Littlewood 多項式, $t=0$ とおくと q-Whittaker 函数が現れることが知られている. また $t=q^\beta$ とおいて $q\to1$ とすると Jack 多項式と呼ばれる対称多項式が現れる. これは Heckman-Opdam の微分方程式系に付随する "直交多項式" である.



Jack 多項式について少し補足しておく. $\beta\in\mathbb{C}$ とする. 微分作用素 $H_n(\beta)$ を

$$H_n(\beta):=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2+\beta\sum_{1\le i<j\le n}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}-x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

とおき, これを Jack 作用素と呼ぶ. A 型の場合の Heckman-Opdam の微分方程式とは

$$H_n(\beta)f(x_1,\dots,x_n)=\varepsilon f(x_1,\dots,x_n)$$

なる Jack 作用素の固有値問題のことである．これの対称多項式解として Jack 多項式が存在する．また「対称対に付随する帯球函数」と呼ばれるものがあり (大まかに述べると「等質空間上の調和解析」寄りの話題である), 特別な場合の Jack 多項式が対称対の帯球函数として現れることが知られている．

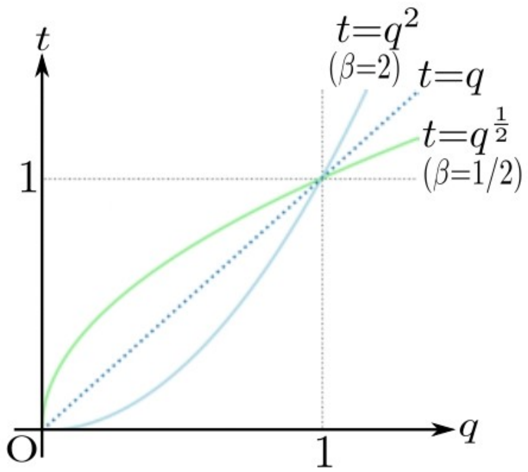


図 0.1: $t=q^{\beta}$ とおいて $q\to 1$ とするとき, Macdonald 多項式は Jack 多項式に退化する．よって, Macdonald 多項式の Jack 多項式への退化は, 上のような q-t 平面の点 (q,t) を点 $(1,1)$ に近づけることとして理解できる．Jack 多項式の含むパラメータ β の値の違いは, 点 $(1,1)$ への近づき方の違いとして現れる．直線 $t=q$ に沿って点 $(1,1)$ に近づく場合には Schur 函数が現れ, 2 次函数 $t=q^2$ のグラフに沿って点 $(1,1)$ に近づく場合には $\beta=2$ の場合の Jack 多項式が現れる．

(b)：q-差分作用素の可換族の存在 (**可積分性, 同時固有函数**). Macdonald 作用素 D_x は “1 階の q-差分作用素である” と称される．詳しくは後述するが, より高階の q-差分作用素たちが存在して, それらは互いに可換で (Macdonald 作用素 D_x とも可換である), Macdonald 多項式を同時固有函数に持つ．

q-無限積について少し述べておく．q を $|q|<1$ なる複素数とするとき

- $$(x;q)_\infty := \prod_{n\geq 0}(1-xq^n) = (1-x)(1-xq)\big(1-xq^2\big)\cdots \quad (x\in\mathbb{C})$$

を q-無限積と呼ぶ．これについて

$$(qx;q)_\infty = \frac{(x;q)_\infty}{1-x}$$

が成り立つことに注意する．また, $x\in\mathbb{C}$ および $n\in\mathbb{N}$ に対し

$$(x;q)_n := \frac{(x;q)_\infty}{(q^n x;q)_\infty} = (1-x)(1-xq)\big(1-xq^2\big)\cdots\big(1-xq^{n-1}\big)$$

とおく (q-shifted factorial). これらの記号は頻繁に現れる．

(c)：直交関係式. n 変数函数 $w(x_1,\ldots,x_n)$ を

$$w(x_1,\ldots,x_n) := \prod_{1\leq i\neq j\leq n}\frac{(x_i/x_j;q)_\infty}{(tx_i/x_j;q)_\infty}$$

とおき (重み函数), n 次元トーラス $\mathbb{T}^n{:=}\{(z_1,\ldots,z_n){\in}(\mathbb{C}^*)^n \mid |z_i|{=}1 \ \ (1{\le}i{\le}n)\}$ の近傍で正則な函数 $f(x_1,\ldots,x_n)$, $g(x_1,\ldots,x_n)$ の内積 $\langle f,g\rangle$ を

$$\langle f,g\rangle{:=}\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{T}^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{dx_j}{2\pi i x_j}f\bigl({x_1}^{-1},\ldots,{x_n}^{-1}\bigr)g(x_1,\ldots,x_n)w(x_1,\ldots,x_n)$$

によって定めると, Macdonald 多項式はこの内積について直交している：

- 分割 λ, $\mu{\in}\mathcal{P}_n$ が異なる場合 $\langle P_\lambda,P_\mu\rangle{=}0$.

この性質は, Macdonald 作用素 D_x がこの内積 $\langle\bullet,\bullet\rangle$ について“エルミートである”ことから従う (詳しくは第 3 章「直交関係式, q-差分作用素の可換族」を見られたい).

(d)：特殊値の明示公式, 自己双対性. n 変数多項式 $f(x){=}f(x_1,\ldots,x_n)$ に, 例えば多重指数 $\mu{=}(\mu_1,\ldots,\mu_n){\in}\mathbb{N}^n$ によって $x_i{=}q^{\mu_i}$ $(1{\le}i{\le}n)$ なる代入を行ったものを単に

$$f(q^\mu){=}f\bigl(q^{\mu_1},\ldots,q^{\mu_n}\bigr)$$

などと書くことにする. 分割 $\delta{\in}\mathcal{P}_n$ を

$$\delta{:=}(n{-}1,n{-}2,n{-}3,\ldots,2,1,0)$$

とおくとき, Macdonald 多項式に“$x{=}t^\delta$”なる代入を行ったもの $P_\lambda\bigl(t^\delta;q,t\bigr)$ (← これは q, t の有理式) の具体的な表示がいくつか知られている. また

$$\widetilde{P}_\lambda(x;q,t){:=}\frac{P_\lambda(x;q,t)}{P_\lambda(t^\delta;q,t)}\quad(\lambda{\in}\mathcal{P}_n)$$

とおくとき, 任意の分割 λ, $\mu{\in}\mathcal{P}_n$ について

- $\widetilde{P}_\lambda\bigl(q^\mu t^\delta;q,t\bigr){=}\widetilde{P}_\mu\bigl(q^\lambda t^\delta;q,t\bigr)$

が成り立つ (自己双対性). 詳しくは第 4 章「双対性, Pieri 公式, 核函数,...」を見られたい.

(f)：核函数 (母函数). Schur 函数について

$$\prod_{1\le i,j\le n}\frac{1}{1{-}x_i y_j}{=}\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n}s_\lambda(x)s_\lambda(y)$$

が成り立つことが知られている (Cauchy の公式). これの Macdonald 多項式版である

- $$\prod_{1\le i,j\le n}\frac{(tx_iy_j;q)_\infty}{(x_iy_j;q)_\infty}{=}\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n}b_\lambda P_\lambda(x;q,t)P_\lambda(y;q,t)$$

も成り立つ (b_λ はある q, t の有理式である). これは, この左辺に現れている

$$\Phi(x,y){:=}\prod_{1\le i,j\le n}\frac{(tx_iy_j;q)_\infty}{(x_iy_j;q)_\infty}$$

の満たす次の函数等式から従う：Macdonald 作用素 D_x と函数 $\Phi(x, y)$ について

- $D_x\Phi(x, y) = D_y\Phi(x, y)$.

ここで D_y は y-変数たち $y_1, \ldots, y_n$ の函数に働く Macdonald 作用素を表す．この性質によって, 函数 $\Phi(x, y)$ は Macdonald 作用素 D_x の核函数 (kernel function) と呼ばれる．より詳しいことは第 4 章「双対性, Pieri 公式, 核函数,...」を参照してほしい.

(e)：アフィン Hecke 環, q-Dunkl 作用素. アフィン Hecke 環は 1995 年頃に Cherednik によって導入されたもので, 大まかに述べると“拡大アフィン Weyl 群の群環のある t-変形”である (正式には「“拡大”アフィン Hecke 環」と呼ぶのがよいかもしれないが, この文書では単にアフィン Hecke 環と呼ぶ)．アフィン Hecke 環の中に q-Dunkl 作用素と呼ばれる互いに可換な元たちを構成できるが, これと多変数の有理関数の空間に働くある q-差分作用素たちによるアフィン Hecke 環の実現 (Demazure-Lusztig 作用素) を合わせることで, 互いに可換な Macdonald の q-差分作用素たち (高階のものも含む) を復元できる．詳しくは第 5 章「アフィン Hecke 環と q-Dunkl 作用素」を参照されたい.

今後, 本講義録にて繰り返し紹介することになるのであるが, Macdonald 多項式の話題に関する文献を挙げておく．まず, 対称多項式については「Macdonald 多項式」の Macdonald 本人による

- I.G. Macdonald『Symmetric Functions and Hall Polynomials Second Edition』(Oxford University Press, 1995)

がある．これには Macdonald 多項式についての記述もある．特に Macdonald 多項式の話題がまとまっている文献として次のものがある：

- I.G. Macdonald“A New Class Of Symmetric Functions”(Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1988, 372/S20 Actes 20e Śeminaire Lotharingien, p. 131-171)

アフィン Hecke 環については Macdonald による

- I.G. Macdonald『Affine Hecke Algebras and Orthogonal Polynomials』(Cambridge University Press, 2003)

や, Cherednik による次の本がある：

- Ivan Cherednik『Double Affine Hecke Algebras』(Cambridge University Press, 2005)

第 1 章　対称函数, 特に Schur 函数

Macdonald 多項式の理論は「一般線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約指標の理論」をモデルにしている．$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約指標として Schur 函数が現れることが知られているので, Macdonald 多項式について見ていく前に, Schur 函数についてある程度知っておく必要がある．ここでは対称函数 (対称多項式) の基本的な性質や, Schur 函数の 2 つの定義 (組み合わせ論的な定義と行列式による定義) が同値であることなどを解説する．

1.1　基本的な対称多項式

対称多項式について少し振り返っておく．複素係数の n 変数多項式の全体を

$$\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]=\left\{\sum_{\mu\in\mathbb{N}^n} c_\mu x^\mu \ \ (\text{有限和}) \ \middle| \ c_\mu\in\mathbb{C}\right\}$$

と書く．この $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ には n 次の対称群 $\mathfrak{S}_n$ が次のように作用していた．まず

$$\sigma(x^\mu):=x_{\sigma(1)}{}^{\mu_1}x_{\sigma(2)}{}^{\mu_2}\cdots x_{\sigma(n)}{}^{\mu_n} \quad (\mu\in\mathbb{N}^n,\ \sigma\in\mathfrak{S}_n)$$

とする．置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ の n 変数多項式 $f=\sum_{\mu\in\mathbb{N}^n} c_\mu x^\mu\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ への作用は

$$\sigma(f):=\sum_{\mu\in\mathbb{N}^n} c_\mu\sigma(x^\mu)$$

によって定める．このようであるとき,

$$\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}:=\{f\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n] \mid \text{任意の } \sigma\in\mathfrak{S}_n \text{ に対し } \sigma(f)=f\}$$

の元を n 変数の対称多項式と呼ぶのであった．分割についての記号なども引き続き用いる．

定義 1.1. (i)　$e_k=e_k(x)\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ $(k\in\mathbb{N})$ を

- $$e_k(x):=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$$

と定め, これを基本対称式 (elementary symmetric function) と呼ぶ．$e_0=1$ と理解する．$k>n$ ならば $e_k=0$ とする．

(ii)　$h_k=h_k(x)\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ $(k\in\mathbb{N})$ を

- $$h_k(x):=\sum_{1\le i_1\le i_2\le\cdots\le i_k\le n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$$

と定め, これを完全同次対称式 (complete homogeneous symmetric function) と呼ぶ．

(iii) $p_k=p_k(x)\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ $(k\in\mathbb{Z}_{>0})$ を

$$\bullet\ p_k(x):=\sum_{i=1}^{n}{x_i}^k$$

と定め, これを冪和対称式 (power sum symmetric function) と呼ぶ.

分割と同様, 多重指数 $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathbb{N}^n$ に対し $|\mu|:=\sum_{i=1}^{n}\mu_i$ という記号を用いるとき, 完全同次対称式は次のようにも表せる：

$$h_k(x)=\sum_{\substack{\mu_1,\dots,\mu_n\geq 0\\ \mu_1+\cdots+\mu_n=k}}{x_1}^{\mu_1}\cdots{x_n}^{\mu_n}=\sum_{\substack{\mu\in\mathbb{N}^n\\ |\mu|=k}}x^{\mu}.$$

n 変数多項式 $\Delta(x)$ を

$$\bullet\ \Delta(x):=\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)$$

と定め, これを差積と呼ぶ. 任意の $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ に対し

$$\sigma(\Delta(x))=\mathrm{sgn}(\sigma)\Delta(x)$$

であることが確かめられる. これは, 差積 $\Delta(x)$ に a と b を交換する互換 $(a\ b)$ $(a<b)$ を作用させると $(a\ b)\Delta(x)=-\Delta(x)$ となることから従う.

多重指数 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathbb{N}^n$ で $|\lambda|=|\mu|$ なるものについて,

「$\lambda\geq\mu$ であるとは, $\lambda_i\neq\mu_i$ なる最小の i について $\lambda_i\geq\mu_i$ が成り立つことである」

と定めることで, $\mathbb{N}^n$ に順序が定まる. これを $\mathbb{N}^n$ の辞書式順序と呼ぶ.

定理 1.2 (対称式と交代式の基本定理). (1) 基本対称式 $e_1(x),\dots,e_n(x)$ は $\mathbb{C}$ 上代数的に独立で

$$\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}=\mathbb{C}[e_1(x),\dots,e_n(x)]$$

が成り立つ. すなわち, 任意の $f(x)\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ に対し

$$f(x)=F(e_1(x),\dots,e_n(x))$$

が成り立つような $F(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{C}[y_1,\dots,y_n]$ がただ 1 つ存在する.

(2) n 変数の反対称多項式の全体を

$$\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n,\mathrm{sgn}}:=\{f\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]\mid \text{任意の } \sigma\in\mathfrak{S}_n \text{ に対し } \sigma(f)=\mathrm{sgn}(\sigma)f\}$$

とおくと $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n,\mathrm{sgn}}=\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}\Delta(x)$ が成り立つ

証明の概略. (1)　対称多項式 $f(x) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ を 1 つとる. $f(x)$ の次数は $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ であったとする. このとき, $f(x)$ の d 次の項たちのうち, 多重指数の辞書式順序について最大の単項式が

$$c_\lambda x^\lambda = c_\lambda {x_1}^{\lambda_1} \cdots {x_n}^{\lambda_n}$$

であったとする. ここで次のことに注意する. 例えば $n=2$ の場合,

$${x_1}^{\lambda_1} {x_2}^{\lambda_2} = {x_1}^{\lambda_1 - \lambda_2} {x_1}^{\lambda_2} {x_2}^{\lambda_2} = {x_1}^{\lambda_1 - \lambda_2} (x_1 x_2)^{\lambda_2}$$

のような書き換えができる. $n=3$ の場合は

$${x_1}^{\lambda_1} {x_2}^{\lambda_2} {x_3}^{\lambda_3} = {x_1}^{\lambda_1 - \lambda_2} (x_1 x_2)^{\lambda_2} {x_3}^{\lambda_3} = {x_1}^{\lambda_1 - \lambda_2} (x_1 x_2)^{\lambda_2 - \lambda_3} (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_3}$$

とできる. 一般の n の場合は

$${x_1}^{\lambda_1} \cdots {x_n}^{\lambda_n} = {x_1}^{\lambda_1 - \lambda_2} (x_1 x_2)^{\lambda_2 - \lambda_3} (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_3 - \lambda_4} \cdots (x_1 \cdots x_{n-1})^{\lambda_{n-1} - \lambda_n} (x_1 \cdots x_n)^{\lambda_n}$$

である. 基本対称式 $e_1(x), \ldots, e_n(x)$ の辞書式順序の意味でのリーディング項のみを残すと

$$e_k(x) = x_1 \cdots x_k + \cdots \quad (1 \leq k \leq n)$$

であることから, $1 \leq k \leq n$ なる自然数 k および $m \in \mathbb{N}$ について

$$e_k(x)^m = (x_1 \cdots x_k)^m + \cdots$$

が成り立つ. よって, 対称多項式

$$f(x) - c_\lambda e_1(x)^{\lambda_1 - \lambda_2} e_2(x)^{\lambda_2 - \lambda_3} e_3(x)^{\lambda_3 - \lambda_4} \cdots e_{n-1}(x)^{\lambda_{n-1} - \lambda_n} e_n(x)^{\lambda_n}$$

には λ の置換で生じる多重指数を持つ単項式は含まれない. こういう操作を d 次の項がなくなるまで繰り返せばよい (そうすれば, 次数に関する帰納法が使える).

(2)　まず, 反対称多項式の定義から「どんな反対称多項式も差積 $\Delta(x)$ で割れている」ことがわかる. 例えば 3 変数の反対称多項式 $\psi(x_1, x_2, x_3)$ があるとき, これは

$$\psi(x_2, x_1, x_3) = \psi(x_3, x_2, x_1) = \psi(x_1, x_3, x_2) = -\psi(x_1, x_2, x_3)$$

を満たす. よって, $\psi(x_1, x_2, x_3)$ は $x_1 - x_2$, $x_1 - x_3$, $x_2 - x_3$ で割れているので, ある 3 変数の多項式 $f(x_1, x_2, x_3)$ がただ 1 つ存在して

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) f(x_1, x_2, x_3) = \Delta(x_1, x_2, x_3) f(x_1, x_2, x_3)$$

と書ける. こういう具合に, n 変数の反対称多項式 $\psi(x) = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ に対し n 変数の多項式 $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ がただ 1 つ存在して

$$\psi(x) = f(x) \Delta(x)$$

が成り立つ. このとき, 任意の $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ に対し

$$
\begin{aligned}
\sigma(\psi(x))&=\mathrm{sgn}(\sigma)\psi(x)=\mathrm{sgn}(\sigma)f(x)\Delta(x)\\
&=\sigma(f(x))\sigma(\Delta(x))=\mathrm{sgn}(\sigma)\sigma(f(x))\Delta(x)
\end{aligned}
$$

なので, この $f(x)$ は対称多項式である. よって

$$\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n,\mathrm{sgn}}\subset\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}\Delta(x)$$

がわかった. これの逆向きの包含関係は明らかなので結論を得る. □

n 変数の有理関数の全体 $\mathbb{C}(x_1,\ldots,x_n)$ に対する対称群の作用も, 次のようにして自然に定義する : n 変数有理函数 f/g $(f,g\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n])$ および $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ に対し

$$\sigma\left(\frac{f}{g}\right):=\frac{\sigma(f)}{\sigma(g)}.$$

例 1.3. 完全同次対称式 $h_k(x)$, 冪和対称式 $p_k(x)$ を基本対称式 $e_k(x)$ によって表すことを考える. その際, 次の生成母函数たちを使うと見通しがよくなる. まず

- $E(x;u):=(1+x_1u)(1+x_2u)\cdots(1+x_nu)$

は基本対称式 $e_k(x)$ の生成母函数である. それは

$$E(x;u)=\sum_{k=0}^{n}u^k\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}x_{i_1}\cdots x_{i_k}=\sum_{k=0}^{n}e_k(x)u^k$$

からわかる. 次に

- $H(x;u):=\dfrac{1}{(1-x_1u)(1-x_2u)\cdots(1-x_nu)}=\dfrac{1}{E(x;-u)}$

とおくと, これは完全同次対称式 $h_k(x)$ の生成母函数である. この $H(x;u)$ は

$$\frac{1}{1-x_ju}=\sum_{k=0}^{\infty}{x_j}^ku^k\quad(1\leq j\leq n)$$

によって $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}[[u]]$ の元とみなしている. このとき

$$H(x;u)=\sum_{m_1,\ldots,m_n\geq 0}u^{m_1+\cdots+m_n}{x_1}^{m_1}\cdots{x_n}^{m_n}=\sum_{k=0}^{\infty}u^k\underbrace{\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_n\geq 0\\ m_1+\cdots+m_n=k}}{x_1}^{m_1}\cdots{x_n}^{m_n}}_{h_k(x)}$$

であるから, 確かに $H(x;u)$ は完全同次対称式 $h_k(x)$ の生成母函数である. 冪和対称式 $p_k(x)$ については,

- $P(x;u):=\log H(x;u)=-\sum_{j=1}^{n}\log(1-x_ju)$

が生成母函数である．ただし, この場合は

$$P(x;u)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k(x)\frac{u^k}{k}$$

が成り立つ．これは, 対数関数のテイラー展開である

$$\log(1-x)=-\sum_{n>0}\frac{x^n}{n}\quad(|x|<1)$$

を (形式的に) 使うことで次のようにして確かめられる：

$$P(x;u)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k>0}\frac{{x_j}^k u^k}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}p_k(x)\frac{u^k}{k}.$$

これら $E(x;u)$, $H(x;u)$, $P(x;u)$ を用いて, $e_k(x)$, $h_k(x)$, $p_k(x)$ の満たす関係を求めてみる．基本対称式の定義から, $k>n$ なる $k\in\mathbb{N}$ に対して $e_k(x)=0$ であったので

$$E(x;u)=\sum_{k=0}^{n}e_k(x)u^k=\sum_{k=0}^{\infty}e_k(x)u^k$$

と書くことができる．まず $E(x;u)H(x;-u)=1$ から

$$1=\sum_{r=0}^{\infty}e_r(x)u^r\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s h_s(x)u^s=\sum_{k=0}^{\infty}u^k\sum_{\substack{r,s\geq 0\\ r+s=k}}(-1)^s e_r(x)h_s(x)$$

なので, 任意の $k\in\mathbb{N}$ に対し

- $$\sum_{0\leq s\leq k}(-1)^s e_{k-s}(x)h_s(x)=0$$

が成り立つ．また, $E(x;-u)H(x;u)=1$ を u で形式的に微分すると

$$\frac{d}{du}\{E(x;-u)\}H(x;u)+E(x;-u)\frac{d}{du}H(x;u)=0$$

であるが, $\dfrac{d}{du}P(x;u)=\dfrac{1}{H(x;u)}\cdot\dfrac{d}{du}H(x;u)$ であったので

$$\frac{d}{du}\{E(x;-u)\}+E(x;-u)\frac{d}{du}P(x;u)=0$$

を得る．これより

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k k e_k(x)u^{k-1}+\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r e_r(x)u^r\sum_{s=1}^{\infty}p_s(x)u^{s-1}=0$$

である．これは

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k k e_k(x)u^{k-1}+\sum_{k=0}^{\infty}u^k\sum_{\substack{r,s\geq 0\\ r+s=k}}(-1)^r e_r(x)p_{s+1}(x)=0$$

と整理できるので, 任意の $k\in\mathbb{N}$ に対し次が成り立つ：

$$\bullet\quad ke_k(x)+\sum_{1\le s\le k}(-1)^s e_{k-s}(x)p_s(x)=0.$$

ここで次のようなことができる．基本対称式 $e_k(x)$ と完全同次対称式 $h_k(x)$ の間には

$$\sum_{0\le s\le k}(-1)^s e_{k-s}(x)h_s(x)=0 \quad (k\in\mathbb{N})$$

なる関係があるのであった．これより, $k\in\mathbb{Z}_{>0}$ を 1 つとるとき

$$\begin{cases} h_1=e_1, \\ h_1e_1-h_2=e_2, \\ h_1e_2-h_2e_1+h_3=e_3, \\ h_1e_3-h_2e_2+h_3e_1-h_4=e_4, \\ \qquad\qquad\vdots \\ e_{k-1}h_1-e_{k-2}h_2+e_{k-3}h_3-\cdots+(-1)^{k-2}e_1h_{k-1}+(-1)^{k-1}h_k=e_k \end{cases}$$

なので, これをベクトルと行列を使って書くと

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ e_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ e_2 & e_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ e_3 & e_2 & e_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ e_{k-1} & e_{k-2} & e_{k-3} & e_{k-4} & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ -h_2 \\ h_3 \\ -h_4 \\ \vdots \\ (-1)^{k-1}h_k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ \vdots \\ e_k \end{bmatrix}$$

である．ここに現れている k 次の正方行列の行列式は $1\neq 0$ なので, これは逆行列を持つ. よって, いわゆる「Cramer の公式」を用いることで

$$\bullet\quad h_k=\begin{vmatrix} e_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ e_2 & e_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ e_3 & e_2 & e_1 & 1 & \cdots & 0 \\ e_4 & e_3 & e_2 & e_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ e_{k-1} & e_{k-2} & e_{k-3} & e_{k-4} & \cdots & 1 \\ e_k & e_{k-1} & e_{k-2} & e_{k-3} & \cdots & e_1 \end{vmatrix}$$

が得られる．こういう公式は Jacobi-Trudi 型であると呼ばれる．

1.2 モノミアル対称多項式の性質

モノミアル対称多項式とは

$$\bullet\quad m_\lambda(x):=\sum_{\substack{\mu\in\mathbb{N}^n \\ \mu\ \text{は}\ \lambda\ \text{の置換}}} x^\mu \quad (\lambda\in\mathcal{P}_n)$$

のことであった．ここでは, $\{m_\lambda(x)\}_{\lambda\in\mathcal{P}_n}$ が対称多項式の空間 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ の $\mathbb{C}$-基底になっていることを解説する．

多重指数への n 次の対称群 $\mathfrak{S}_n$ の作用を次のように定める．まず $\mu\in\mathbb{N}^n$, $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ に対し

$$\sigma(x^\mu)={x_{\sigma(1)}}^{\mu_1}\cdots{x_{\sigma(n)}}^{\mu_n}$$

なのであったが, これを x_1 の冪, x_2 の冪,$\ldots$, x_n の冪という順に並ぶようにすると

$$\sigma(x^\mu)={x_{\sigma(1)}}^{\mu_1}\cdots{x_{\sigma(n)}}^{\mu_n}={x_1}^{\mu_{\sigma^{-1}(1)}}\cdots{x_n}^{\mu_{\sigma^{-1}(n)}}$$

である．そこで

$$\sigma\cdot\mu:=\bigl(\mu_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,\mu_{\sigma^{-1}(n)}\bigr)\in\mathbb{N}^n$$

とおけば $\sigma(x^\mu)=x^{\sigma\cdot\mu}$ が成り立つ．

例 1.4. $n=3$ の場合の例を挙げる．$\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\in\mathbb{N}^3$ および

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\in\mathfrak{S}_3$$

について $\sigma\cdot\mu=(\mu_3,\mu_1,\mu_2)$ である．これは μ に

$$\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

が作用した結果であると思ってもよいが, σ によって 1 番目の場所にあった μ_1 が 2 番目に, 2 番目の場所にあった μ_2 が 3 番目に, 3 番目の場所にあった μ_3 が 1 番目に移されたと思ってもよい．

以上のことから, $f=\displaystyle\sum_{\mu\in\mathbb{N}^n}c_\mu x^\mu\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ に $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ を当てると

$$\sigma(f)=\sum_{\mu\in\mathbb{N}^n}c_\mu\sigma(x^\mu)=\sum_{\mu\in\mathbb{N}^n}c_\mu x^{\sigma\cdot\mu}\overset{\nu=\sigma\cdot\mu}{=\!=\!=\!=}\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n}c_{\sigma^{-1}\cdot\nu}x^\nu$$

である．これより, $f=\displaystyle\sum_{\mu\in\mathbb{N}^n}c_\mu x^\mu$ が任意の $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ に対し $\sigma(f)=f$ であるための条件は, f の係数が $c_\mu=c_{\sigma^{-1}\cdot\mu}$ $(\sigma\in\mathfrak{S}_n)$ を満たすことである．多重指数の全体 $\mathbb{N}^n$ には $\mathfrak{S}_n$ が左から作用していることに注意すると, この条件は, 係数 c_μ を $\mathbb{N}^n$ 上の函数とみなすとき, この値は各 $\mathfrak{S}_n$-軌道上で一定だということである．

少し補足しておく．分割の全体を $\mathcal{P}$, $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\mathcal{P}_n:=\{\lambda\in\mathcal{P}\mid\ell(\lambda)\le n\}$ とおく．多重指数は分割であるとは限らないが, 成分の大小に注意してこれらを並べ換えることで分割にすることができる．このようにしてできる分割は, 最初にとった多重指数からただ 1 つに決まる．多重指数 $\mu\in\mathbb{N}^n$ の属する $\mathfrak{S}_n$-軌道 $\mathfrak{S}_n.\mu$ に対し, μ の成分を並べ換えてできる分割を対応させる写像を作ることを考える．先に気持ちを述べておくと, $\mu\in\mathbb{N}^n$ を分割にするような置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ がとれるので,

$$\mathfrak{S}_n\backslash\mathbb{N}^n\ni\mathfrak{S}_n.\mu\mapsto\sigma\cdot\mu\in\mathcal{P}_n\quad(\leftarrow\mathfrak{S}_n\backslash\mathbb{N}^n\text{ は }\mathfrak{S}_n\text{-軌道の全体})$$

によって写像 $f:\mathfrak{S}_n\backslash\mathbb{N}^n\to\mathcal{P}_n$ を定めたい, ということである. そのためには, $\mu\in\mathbb{N}^n$ から作った分割が軌道 $\mathfrak{S}_n.\mu$ だけから決まることを示す必要がある. μ, $\nu\in\mathbb{N}^n$ について

$$\mathfrak{S}_n.\mu=\mathfrak{S}_n.\nu$$

であったとする. このとき, ある $g\in\mathfrak{S}_n$ があって $\nu=g\cdot\mu$ である. また, μ を分割に作り換える置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ がとれて $\sigma\cdot\mu\in\mathcal{P}_n$ である. このとき

$$\mathcal{P}_n\ni\sigma\cdot\mu=\sigma\cdot\left(g^{-1}\cdot\nu\right)=\left(\sigma g^{-1}\right)\cdot\mu$$

が成り立つ. これは, 多重指数 ν は置換 σg^{-1} によって分割に作り換えられるし, そうしてできる分割は μ から作ったものである $\sigma\cdot\mu$ に等しいことを意味する. 以上より, 写像 $f:\mathfrak{S}_n\backslash\mathbb{N}^n\to\mathcal{P}_n$ は well-defined である.

この写像 $f:\mathfrak{S}_n\backslash\mathbb{N}^n\to\mathcal{P}_n$ は全単射である. 全射性は, 分割 $\lambda\in\mathcal{P}_n$ を任意にとるとき $f(\mathfrak{S}_n.\lambda)=\lambda$ であることから従う. 単射性は次のようにしてわかる. $\mathfrak{S}_n$-軌道 $\mathfrak{S}_n.\mu$, $\mathfrak{S}_n.\nu$ があって

$$f(\mathfrak{S}_n.\mu)=f(\mathfrak{S}_n.\nu)$$

であったとする. μ を分割に作り換える置換として $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ がとれ, ν を分割に作り換える置換として $\tau\in\mathfrak{S}_n$ がとれるとすると, これは $\sigma\cdot\mu=\tau\cdot\nu$ すなわち $\nu=\left(\tau^{-1}\sigma\right)\cdot\mu\in\mathfrak{S}_n.\mu$ を意味する. よって

$$\mathfrak{S}_n.\mu=\mathfrak{S}_n.\nu$$

がわかった. 以上より $f:\mathfrak{S}_n\backslash\mathbb{N}^n\to\mathcal{P}_n$ は単射である. こうして同型 $\mathfrak{S}_n\backslash\mathbb{N}^n\simeq\mathcal{P}_n$ が得られる.

以上の内容によって次のようなことができる. 対称多項式 $f=\sum_{\mu\in\mathbb{N}^n}c_\mu x^\mu\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ を上で得た同型 $\mathfrak{S}_n\backslash\mathbb{N}^n\simeq\mathcal{P}_n$ に注意して書き換えると

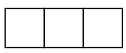
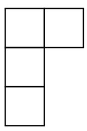
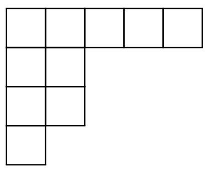
$$f=\sum_{\mu\in\mathbb{N}^n}c_\mu x^\mu=\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n}\sum_{\substack{\nu\in\mathbb{N}^n\\ \nu\text{ は }\lambda\text{ の置換}}}\underbrace{c_\nu}_{c_\nu=c_\lambda}x^\nu=\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n}c_\lambda\underbrace{\sum_{\substack{\nu\in\mathbb{N}^n\\ \nu\text{ は }\lambda\text{ の置換}}}x^\nu}_{m_\lambda(x)}$$

がわかる. こうして次が得られた.

定理 1.5. $\{m_\lambda(x)\}_{\lambda\in\mathcal{P}_n}$ は $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ の $\mathbb{C}$-基底である :

$$\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}=\bigoplus_{\lambda\in\mathcal{P}_n}\mathbb{C}m_\lambda(x).$$

ここで分割と Young 図形の対応について述べておく. 分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots)$ があるとき, 第 1 行に箱を λ_1 個並べ, 第 2 行に箱を λ_2 個並べ, 第 3 行に箱を λ_3 個並べ $\cdots$ という操作を行うことで, 分割 λ を箱が $|\lambda|$ 個集まってできた図形によって表すことができる. そのような図形を Young 図形と呼ぶ. 例えば

$(3)=$ , $(2,1,1)=$ , $(5,2,2,1)=$ 

という具合である. 以下では, 分割と Young 図形を同一視して「Young 図形 $\lambda\in\mathcal{P}$ が $\cdots$」などと述べることもある.

例 1.6. モノミアル対称多項式をいくつか具体的に書いてみる. 例えば

$$m_{\underbrace{\ydiagram{6}}_{r\ \text{個}}}(x)=x_1{}^r+x_2{}^r+\cdots+x_n{}^r=p_r(x)\quad(\leftarrow\text{冪和対称式})$$

である. また, 箱が縦に r 個 ($r\leq n$ である) 積み重なった Young 図形の場合は

$$m_{\underbrace{\ydiagram{1,1,1,1,1,1}}_{\text{縦に}\ r\ \text{個}}}(x)=\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_r\leq n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r}=e_r(x)\quad(\leftarrow\text{基本対称式})$$

である. これは分割 $(1,1,\ldots,1,0,0,\ldots,0)$ ($\leftarrow$ 第 1 番目から第 r 番目の成分が 1, それ以外は 0) の置換として生じる多重指数がどんなものであるかを考えればわかる.

例 1.7. $n=3$ の場合を考える (3 変数の場合). 大きさが 3 の分割は

$$(3)=\ydiagram{3},\quad(2,1)=\ydiagram{2,1},\quad(1,1,1)=\ydiagram{1,1,1}$$

ですべてである. $m_{\ydiagram{3}}(x)=p_3(x)$ および $m_{\ydiagram{1,1,1}}(x)=e_3(x)$ であることは既に知っている. 残る $m_{\ydiagram{2,1}}(x)$ は次のようになる：

$$m_{\ydiagram{2,1}}(x_1,x_2,x_3)=x_1{}^2x_2+x_1x_2{}^2+x_1{}^2x_3+x_1x_3{}^2+x_2{}^2x_3+x_2x_3{}^2.$$

モノミアル対称多項式について次が成り立つことに注意する：$\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathcal{P}_n$ に対し

- $$m_\lambda(x_1,\ldots,x_{n-1},0)=\begin{cases}0 & (\lambda_n>0),\\ m_\lambda(x_1,\ldots,x_{n-1}) & (\lambda_n=0).\end{cases}$$

$\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathcal{P}_n$ について $\lambda_n>0$ である場合, $m_\lambda(x)=\sum_{\substack{\mu\in\mathbb{N}^n\\ \mu\text{ は }\lambda\text{ の置換}}}x^\mu$ と書くときの各 x^μ は x_n で割れているので, この場合に $x_n=0$ とおくと $m_\lambda(x_1,\ldots,x_{n-1},0)=0$ である. $\lambda_n=0$ の場合には, $m_\lambda(x)$ は x_n で割れていない単項式を含むので, $x_n=0$ とおくとそれらだけが残り $m_\lambda(x_1,\ldots,x_{n-1},0)=m_\lambda(x_1,\ldots,x_{n-1})$ となる. 例えば $\lambda=(2,1,0)\in\mathcal{P}_3$ に対し

$$m_\lambda(x_1,x_2,x_3)=m_{\ydiagram{2,1}}(x_1,x_2,x_3)=x_1{}^2x_2+x_1x_2{}^2+x_1{}^2x_3+x_1x_3{}^2+x_2{}^2x_3+x_2x_3{}^2$$

であったが, ここで $x_3=0$ とおくと

$$m_{\ydiagram{2,1}}(x_1,x_2,0)=x_1{}^2x_2+x_1x_2{}^2=m_{\ydiagram{2,1}}(x_1,x_2)$$

となる.

1.3 Schur 函数の定義

Schur 函数には, 次のような見かけ上異なる 2 つの定義が存在する：

- 組み合わせ論的な定義：$s_\lambda^{\mathrm{comb}}(x){:=}\displaystyle\sum_{T\in\mathrm{SSTab}_n(\lambda)} x^{\mathrm{wt(T)}}$ (記号の定義は後述する).

- 行列式による定義：$s_\lambda^{\det}(x){:=}\dfrac{\det\left[{x_i}^{\lambda_j+n-j}\right]_{1\le i,j\le n}}{\det[{x_i}^{n-j}]_{1\le i,j\le n}}$.

これらの Schur 函数の定義が同値なものであることをこの章の後半で述べる予定である.

行列式による Schur 函数 $s_\lambda^{\det}(x)$ は対称“多項式”であることに注意する. まず, 行列式の性質から, $\det\left[{x_i}^{\lambda_j+n-j}\right]_{1\le i,j\le n}$ は反対称多項式である. また, 反対称多項式は必ず差積 $\Delta(x){=}\det\left[{x_i}^{n-j}\right]_{1\le i,j\le n}$ で割れているのであった. このとき $s_\lambda^{\det}(x){=}\dfrac{1}{\Delta(x)}\det\left[{x_i}^{\lambda_j+n-j}\right]_{1\le i,j\le n}$ は多項式であるが, 反対称多項式の全体 $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n,\mathrm{sgn}}$ について

$$\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n,\mathrm{sgn}}{=}\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}\Delta(x)$$

であったので, 確かに $s_\lambda^{\det}(x)$ は対称多項式である.

半標準盤 (semi standard tableau) について少し説明する. 分割 $\lambda\in\mathcal{P}_n$ を Young 図形によって表示し, その箱の中に 1 から n までの自然数を各箱に 1 つずつ書き込むことを考える (現れる自然数が何度か重複することは許される). そのようにしてできる絵のうち, 次の条件を満たすものは λ を台とする半標準盤 (semi standard tableau) であるという：

(i) λ の各行の箱の並びを左から右へと見ていくとき, 箱に書き込まれた数字の列は非減少である.

(ii) λ の各列の箱の並びを上から下へと見ていくとき, 箱に書き込まれた数字の列は狭義に増加する.

分割 $\lambda\in\mathcal{P}_n$ を台に持つ半標準盤の全体を $\mathrm{SSTab}_n(\lambda)$ と書く. 半標準盤 $T\in\mathrm{SSTab}_n(\lambda)$ に対し, この中に自然数 i ($1\le i\le n$ である) が現れる回数が $\mu_i\in\mathbb{N}$ であるとき,

$$\mathrm{wt}(T){:=}(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathbb{N}^n$$

を半標準盤 $T\in\mathrm{SSTab}_n(\lambda)$ のウェイトと呼ぶ.

例 1.8. $n{=}4$ の場合の半標準盤の具体例を挙げる. $\lambda{=}(5,3,1,0)\in\mathcal{P}_4$ に対し

$$T:=\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&2&3&4\\\hline 2&3&3\\\cline{1-3} 4\\\cline{1-1}\end{array}$$

は半標準盤の条件を満たしているので $T\in\mathrm{SSTab}_4(\lambda)$ である．このウェイトは

$$\mathrm{wt}(T)=(2,2,3,2).$$

例 1.9. ある分割を台に持つ半標準盤を考えるとき, その分割をどの $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対する $\mathcal{P}_n=\{\lambda\in\mathcal{P}\mid \ell(\lambda)\leq n\}$ の元だと思うのかによって, 半標準盤のバリエーションが変わることに注意する．例えば

$$\lambda=(2,2)=\begin{array}{|c|c|}\hline &\\\hline &\\\hline\end{array}\in\mathcal{P}_2$$

とみなすとき, この λ を台に持つ半標準盤は

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2&2\\\hline\end{array}$$

しかない．これに対し, $\lambda=(2,2)\in\mathcal{P}_3$ とみなす場合は

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2&2\\\hline\end{array}\,,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2&3\\\hline\end{array}\,,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 3&3\\\hline\end{array}\,,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2&3\\\hline\end{array}\,,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&3\\\hline\end{array}\,,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 3&3\\\hline\end{array}$$

が $\lambda=(2,2)$ を台に持つ半標準盤として現れる．

例 1.10. 組み合わせ論的な Schur 函数

$$s_\lambda^{\mathrm{comb}}(x):=\sum_{T\in\mathrm{SSTab}_n(\lambda)}x^{\mathrm{wt}(T)}\quad(\lambda\in\mathcal{P}_n)$$

を $n=3$, $\lambda=(2,1,0)\in\mathcal{P}_3$ の場合に求めてみる．この場合の $\mathrm{SSTab}_3(\lambda)$ の元は

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\,,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\,,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\,,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\,,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\,,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\,,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\,,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$$

ですべてである．これより

$$\begin{aligned}s_\lambda^{\mathrm{comb}}(x)&={x_1}^2x_2+{x_1}^2x_3+x_1{x_2}^2+x_1x_2x_2+x_1x_2x_3+x_1{x_3}^2+{x_2}^2x_3+x_2{x_3}^2\\&={x_1}^2x_2+x_1{x_2}^2+{x_1}^2x_3+x_1{x_3}^2+{x_2}^2x_3+x_2{x_3}^2+2x_1x_2x_3\\&=m_{\begin{array}{|c|c|}\hline &\\\hline \\\cline{1-1}\end{array}}(x)+2m_{\begin{array}{|c|}\hline \\\hline \\\hline \\\hline\end{array}}(x)\end{aligned}$$

が得られる．これは対称多項式になっているが, 半標準盤や $s_\lambda^{\mathrm{comb}}(x)$ の定義のみからは

$$s_\lambda^{\mathrm{comb}}(x)\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$$

であることは明らかではないことに注意する．

例 1.11. $n=3$, $\lambda=(2,1,0)\in\mathcal{P}_3$ の場合の行列式で定義された Schur 函数 $s_\lambda^{\det}(x)$ も求めてみる．$s_\lambda^{\det}(x)$ の定義より

$$s_\lambda^{\det}(x)=\frac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)}\begin{vmatrix}{x_1}^4&{x_1}^2&1\\{x_2}^4&{x_2}^2&1\\{x_3}^4&{x_3}^2&1\end{vmatrix}$$

であるが, この分子について

$$\bullet\quad \begin{vmatrix} {x_1}^4 & {x_1}^2 & 1 \\ {x_2}^4 & {x_2}^2 & 1 \\ {x_3}^4 & {x_3}^2 & 1 \end{vmatrix} = {x_1}^4{x_2}^2+{x_2}^4{x_3}^2+{x_3}^4{x_1}^2-{x_2}^2{x_3}^4-{x_3}^2{x_1}^4-{x_1}^2{x_2}^4$$
$$=\left({x_2}^2-{x_3}^2\right)\left({x_1}^2-{x_2}^2\right)\left({x_1}^2-{x_3}^2\right)$$

なので次が成り立つ：

$$\begin{aligned} s_\lambda^{\mathrm{det}}(x) &= \frac{\left({x_2}^2-{x_3}^2\right)\left({x_1}^2-{x_2}^2\right)\left({x_1}^2-{x_3}^2\right)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)} = (x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3) \\ &= {x_1}^2x_2+x_1{x_2}^2+{x_1}^2x_3+x_1{x_3}^2+{x_2}^2x_3+x_2{x_3}^2+2x_1x_2x_3 = m_{\ydiagram{2,1}}(x)+2m_{\ydiagram{1,1,1}}(x). \end{aligned}$$

この例では $s_\lambda^{\mathrm{comb}}(x)=s_\lambda^{\mathrm{det}}(x)$ が成り立っているが, これが一般の場合にも成り立つことを後に示す.

例 1.12. $e_k(x)$ を基本対称式, $h_k(x)$ を完全同次対称式とするとき

$$s^{\mathrm{comb}}_{\underbrace{\ydiagram{6}}_{r\text{ 個}}}(x)=h_r(x),\quad s^{\mathrm{comb}}_{\underbrace{\ydiagram{1,1,1,1,1}}_{\text{縦に } r \text{ 個}}}(x)=e_r(x)\quad (\leftarrow \text{ この場合は } r\leq n)$$

が成り立つことが確かめられる. Young 図形

$$\underbrace{\ydiagram{5}}_{r\text{ 個}}$$

を台に持つ半標準盤は, 1 から n の中から r 個の自然数を重複を許して選ぶと 1 つ決まり,

$$\underbrace{\ydiagram{1,1,1,1,1}}_{\text{縦に } r \text{ 個}}$$

を台に持つ半標準盤は, 1 から n の中から r 個の自然数を重複を許さずに選ぶと 1 つに決まるからである.

例 1.13. 分割 $\lambda\in\mathcal{P}_n$ を台に持つ半標準盤の全体を $\mathrm{SSTab}_n(\lambda)$ と書くのであったが, 特に, 分割 $\lambda\in\mathcal{P}_n$ と多重指数 $\mu\in\mathbb{N}^n$ に対し

$$\mathrm{SSTab}_n(\lambda)_\mu := \{T\in\mathrm{SSTab}_n(\lambda) \mid \mathrm{wt}(T)=\mu\}$$

とおく. $K_{\lambda\mu}:=\#\mathrm{SSTab}_n(\lambda)_\mu$ は Kostka 数と呼ばれる. これは次のようにして, 組み合わせ論的 Schur 函数に現れる：

$$s_\lambda^{\mathrm{comb}}(x)=\sum_{T\in\mathrm{SSTab}_n(\lambda)} x^{\mathrm{wt}(T)} = \sum_{\mu\in\mathbb{N}^n}\sum_{T\in\mathrm{SSTab}_n(\lambda)_\mu} x^\mu = \sum_{\mu\in\mathbb{N}^n} K_{\lambda\mu}x^\mu.$$

1.4　Cauchy の公式

“$s_\lambda^{\mathrm{comb}}(x)=s_\lambda^{\det}(x)$” であることを証明するのに必要な Cauchy の公式 (Cauchy 行列式) について述べる.

補題 1.14. n 次の複素正方行列 $A=[a_{ij}]_{1\le i,j\le n}$ で $a_{nn}\neq 0$ なるものについて

$$\det A={a_{nn}}^{-n+2}\det[a_{ij}a_{nn}-a_{in}a_{nj}]_{1\le i,j\le n-1}.$$

証明の概略. $n=3$ の場合を説明する. 3 次の正方行列 $A=[a_{ij}]_{1\le i,j\le 3}$ について $a_{33}\neq 0$ であるとき, 行列式の性質から

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}/a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}/a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{vmatrix}\cdots\left(\begin{matrix}(\text{第 1 列}) \text{ から } a_{31}\times(\text{第 3 列}), \\ (\text{第 2 列}) \text{ から } a_{32}\times(\text{第 3 列}) \text{ を引く}\end{matrix}\right)$$

$$=a_{33}\begin{vmatrix} a_{11}-a_{31}\cdot\dfrac{a_{13}}{a_{33}} & a_{12}-a_{32}\cdot\dfrac{a_{13}}{a_{33}} & a_{13}/a_{33} \\ a_{21}-a_{31}\cdot\dfrac{a_{23}}{a_{33}} & a_{22}-a_{32}\cdot\dfrac{a_{23}}{a_{33}} & a_{23}/a_{33} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}={a_{33}}^{-1}\det[a_{ij}a_{33}-a_{i3}a_{3j}]_{1\le i,j\le 2}$$

とできる. 一般の場合も同様である.　□

補題 1.15 (**Cauchy 行列式**).

- $$\det\left[\frac{1}{1-x_iy_j}\right]_{1\le i,j\le n}=\frac{\Delta(x)\Delta(y)}{\displaystyle\prod_{1\le i,j\le n}(1-x_iy_j)}.$$

証明. 先に触れた行列式に関する補題によって

$$\begin{aligned}\det\left[\frac{1}{1-x_iy_j}\right]_{1\le i,j\le n}&=(1-x_ny_n)^{n-2}\det\left[\frac{1}{1-x_iy_j}\cdot\frac{1}{1-x_ny_n}-\frac{1}{1-x_iy_n}\cdot\frac{1}{1-x_ny_j}\right]_{1\le i,j\le n-1}\\&=(1-x_ny_n)^{n-2}\det\left[\frac{(x_i-x_n)(y_j-y_n)}{(1-x_iy_j)(1-x_ny_n)(1-x_iy_n)(1-x_ny_j)}\right]_{1\le i,j\le n-1}\\&=\frac{1}{1-x_ny_n}\cdot\frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-x_n)\prod_{j=1}^{n-1}(y_j-y_n)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(1-x_iy_n)\prod_{j=1}^{n-1}(1-x_ny_j)}\det\left[\frac{1}{1-x_iy_j}\right]_{1\le i,j\le n-1}\end{aligned}$$

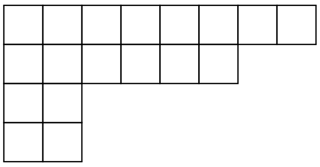
とできる. これを繰り返すことで結論を得る.　□

$\delta{:=}(n{-}1, n{-}2, n{-}3, \ldots, 2, 1, 0){\in}\mathcal{P}_n$ とおく．分割 $\lambda{=}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ について

$$\lambda_1{>}\lambda_2{>}\lambda_3{>}\cdots{>}\lambda_n{\geq}0$$

が成り立つとき, λ は strict であるということにする．分割 $\lambda{\in}\mathcal{P}_n$ が何であれ, $\lambda{+}\delta$ は strict であることに注意する．

ここで分割と Maya 図形の間の関係について少し説明する．例えば分割

$\lambda{=}(8, 6, 2, 2) =$  $\in\mathcal{P}_4$

に対し, 次の図 1.1 のような絵を描くことができる：

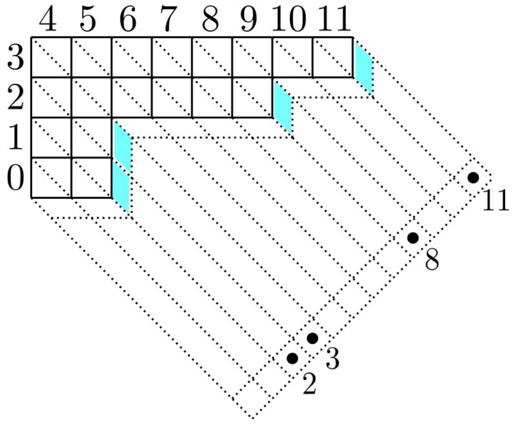
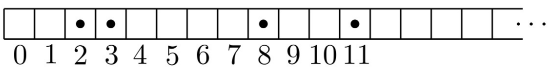


図 1.1: Young 図形 $(8, 6, 2, 2)$ から Maya 図形ができる様子.

Young 図形 λ の第 1 列の各箱の左側に 3, 2, 1, 0 と縦に並んでいるのは $\delta{=}(3, 2, 1, 0){\in}\mathcal{P}_4$ の成分である．これに続けて 4 から 11 まで整数を λ の第 1 行の各箱の上に描き込んだ．そうしておき, 図 1.1 のように右下に下がる斜め 45° の点線たちを引き, Young 図形 λ の各行の一番右側の箱に印をつける．これらの印をつけた箱の位置から点線に沿って左上に進むと, 最初に描き込んだ整数たちのどれかにたどり着く．そのようにすることで, 今回の場合は 2, 3, 8, 11 が現れる．更に, 図 1.1 の下部にあるような 0 から 11 の整数の並びに対応した箱の並びを描いておき, 今回現れた 2, 3, 8, 11 の位置に黒玉を入れる．この絵の中の黒玉の入っている位置を読むと $(11, 8, 3, 2)$ なる strict な分割が現れている．また, 図 1.1 の中の



のような絵を Maya 図形と呼ぶ.

$s^{\det}_{\lambda}(x)$ について次が成り立つことがわかる：$\lambda{=}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n){\in}\mathcal{P}_n$ に対し

- $s^{\det}_{\lambda}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0){=}\begin{cases} 0 & (\lambda_n{>}0), \\ s^{\det}_{\lambda}(x_1, \ldots, x_{n-1}) & (\lambda_n{=}0). \end{cases}$

これを軽く確かめる. $s_\lambda^{\det}(x)$ とは

$$
\begin{aligned}
s_\lambda^{\det}(x) &= \frac{1}{\Delta(x)} \det\left[{x_i}^{\lambda_j+n-j} \right]_{1\le i,j\le n} \\
&= \frac{1}{\Delta(x)} \begin{vmatrix}
{x_1}^{\lambda_1+n-1} & {x_1}^{\lambda_2+n-2} & {x_1}^{\lambda_3+n-3} & \cdots & {x_1}^{\lambda_{n-1}+1} & {x_1}^{\lambda_n} \\
{x_2}^{\lambda_1+n-1} & {x_2}^{\lambda_2+n-2} & {x_2}^{\lambda_3+n-3} & \cdots & {x_2}^{\lambda_{n-1}+1} & {x_2}^{\lambda_n} \\
{x_3}^{\lambda_1+n-1} & {x_3}^{\lambda_2+n-2} & {x_3}^{\lambda_3+n-3} & \cdots & {x_3}^{\lambda_{n-1}+1} & {x_3}^{\lambda_n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
{x_{n-1}}^{\lambda_1+n-1} & {x_{n-1}}^{\lambda_2+n-2} & {x_{n-1}}^{\lambda_3+n-3} & \cdots & {x_{n-1}}^{\lambda_{n-1}+1} & {x_{n-1}}^{\lambda_n} \\
{x_n}^{\lambda_1+n-1} & {x_n}^{\lambda_2+n-2} & {x_n}^{\lambda_3+n-3} & \cdots & {x_n}^{\lambda_{n-1}+1} & {x_n}^{\lambda_n}
\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

のことであったが, $\lambda\in\mathcal{P}_n$ について $\lambda_n>0$ である場合, 上の行列式において $x_n=0$ とおくと, この行列式の第 n 行が $\mathbf{0}$ になるので $s_\lambda^{\det}(x_1,\ldots,x_{n-1},0)=0$ がわかる. $\lambda_n=0$ の場合は

$$
\begin{aligned}
&s_\lambda^{\det}(x_1,\ldots,x_{n-1},0) \\
&= \frac{1}{\Delta(x_1,\ldots,x_{n-1},0)} \begin{vmatrix}
{x_1}^{\lambda_1+n-1} & {x_1}^{\lambda_2+n-2} & {x_1}^{\lambda_3+n-3} & \cdots & {x_1}^{\lambda_{n-1}+1} & {x_1}^{\lambda_n} \\
{x_2}^{\lambda_1+n-1} & {x_2}^{\lambda_2+n-2} & {x_2}^{\lambda_3+n-3} & \cdots & {x_2}^{\lambda_{n-1}+1} & {x_2}^{\lambda_n} \\
{x_3}^{\lambda_1+n-1} & {x_3}^{\lambda_2+n-2} & {x_3}^{\lambda_3+n-3} & \cdots & {x_3}^{\lambda_{n-1}+1} & {x_3}^{\lambda_n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
{x_{n-1}}^{\lambda_1+n-1} & {x_{n-1}}^{\lambda_2+n-2} & {x_{n-1}}^{\lambda_3+n-3} & \cdots & {x_{n-1}}^{\lambda_{n-1}+1} & {x_{n-1}}^{\lambda_n} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

であるが, 差積 $\Delta(x_1,\ldots,x_{n-1},0)$ は

$$
\Delta(x_1,\ldots,x_{n-1},0) = x_1\cdots x_{n-1} \underbrace{\Delta(x_1,\ldots,x_{n-1})}_{(n-1)\text{ 変数の差積}}
$$

であること, および

$$
\begin{aligned}
\bullet\ &\begin{vmatrix}
{x_1}^{\lambda_1+n-1} & {x_1}^{\lambda_2+n-2} & {x_1}^{\lambda_3+n-3} & \cdots & {x_1}^{\lambda_{n-1}+1} & {x_1}^{\lambda_n} \\
{x_2}^{\lambda_1+n-1} & {x_2}^{\lambda_2+n-2} & {x_2}^{\lambda_3+n-3} & \cdots & {x_2}^{\lambda_{n-1}+1} & {x_2}^{\lambda_n} \\
{x_3}^{\lambda_1+n-1} & {x_3}^{\lambda_2+n-2} & {x_3}^{\lambda_3+n-3} & \cdots & {x_3}^{\lambda_{n-1}+1} & {x_3}^{\lambda_n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
{x_{n-1}}^{\lambda_1+n-1} & {x_{n-1}}^{\lambda_2+n-2} & {x_{n-1}}^{\lambda_3+n-3} & \cdots & {x_{n-1}}^{\lambda_{n-1}+1} & {x_{n-1}}^{\lambda_n} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{vmatrix} \\
&= x_1\cdots x_{n-1} \begin{vmatrix}
{x_1}^{\lambda_1+n-2} & {x_1}^{\lambda_2+n-3} & {x_1}^{\lambda_3+n-4} & \cdots & {x_1}^{\lambda_{n-1}} \\
{x_2}^{\lambda_1+n-2} & {x_2}^{\lambda_2+n-3} & {x_2}^{\lambda_3+n-4} & \cdots & {x_2}^{\lambda_{n-1}} \\
{x_3}^{\lambda_1+n-2} & {x_3}^{\lambda_2+n-3} & {x_3}^{\lambda_3+n-4} & \cdots & {x_3}^{\lambda_{n-1}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
{x_{n-1}}^{\lambda_1+n-2} & {x_{n-1}}^{\lambda_2+n-3} & {x_{n-1}}^{\lambda_3+n-4} & \cdots & {x_{n-1}}^{\lambda_{n-1}}
\end{vmatrix} \\
&= x_1\cdots x_{n-1} \det\left[{x_i}^{\lambda_j+n-1-j} \right]_{1\le i,j\le n-1}
\end{aligned}
$$

とできることから次が従う：

$$
s_\lambda^{\det}(x_1,\ldots,x_{n-1},0) = \frac{1}{\Delta(x_1,\ldots,x_{n-1})} \det\left[{x_i}^{\lambda_j+n-1-j} \right]_{1\le i,j\le n-1} = s_\lambda^{\det}(x_1,\ldots,x_{n-1}).
$$

定理 1.16 (Cauchy の定理). $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ と $x=(x_1, \ldots, x_m)$, $y=(y_1, \ldots, y_n)$ に対し

- $$\prod_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \frac{1}{1-x_iy_j} = \sum_{\substack{\lambda\in\mathcal{P}\\ \ell(\lambda)\le\min\{m,n\}}} s_\lambda^{\det}(x)s_\lambda^{\det}(y).$$

証明. $m=n$ の場合のみ証明すれば十分である. x-変数も y-変数も m 個の場合に上の等式が成り立つことを知っている場合, $n<m$ である $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ をとっておいて $y_k=0$ $(n+1\le k\le m)$ とおけば, x-変数は m 個, y 変数は n 個にできるからである.

先に Cauchy 行列式に触れたが, あれを次のように展開することができる：

$$\begin{aligned}
\det\left[\frac{1}{1-x_iy_j}\right]_{1\le i,j\le n} &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-x_{\sigma(k)}y_k}\\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \sum_{k_1,\ldots,k_n\ge 0} (x_{\sigma(1)}y_1)^{k_1}\cdots(x_{\sigma(n)}y_n)^{k_n}\\
&= \sum_{k_1,\ldots,k_n\ge 0}\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)x_{\sigma(1)}{}^{k_1}\cdots x_{\sigma(n)}{}^{k_n}\right)y_1{}^{k_1}\cdots y_n{}^{k_n}.
\end{aligned}$$

ここで多重指数 $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_n)\in\mathbb{N}^n$ に対し

$$\Delta_{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x)=\Delta_\mu(x):=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)x_{\sigma(1)}{}^{\mu_1}\cdots x_{\sigma(n)}{}^{\mu_n}=\det[x_i{}^{\mu_j}]_{1\le i,j\le n}$$

とおく. この記法によれば, 差積 $\Delta(x)$ は

$$\Delta(x)=\det\left[x_i{}^{n-j}\right]_{1\le i,j\le n}=\Delta_\delta(x)$$

である ($\delta=(n-1, n-2, n-3, \ldots, 2, 1, 0)$). 行列式の性質から

$$\Delta_{\mu_{\sigma(1)},\ldots,\mu_{\sigma(n)}}(x)=\mathrm{sgn}(\sigma)\Delta_{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x) \quad ((\mu_1,\ldots,\mu_n)\in\mathbb{N}^n,\ \sigma\in\mathfrak{S}_n)$$

である. $\Delta_{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x)\neq 0$ であるのは $\mu_1, \ldots, \mu_n$ が相異なる場合のみであることもわかる. また, 成分が相異なる多重指数は strict な分割の置換であるので

$$\begin{aligned}
\det\left[\frac{1}{1-x_iy_j}\right]_{1\le i,j\le n} &= \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n\ge 0\\ k_1,\ldots,k_n\text{ は相異なる}}} \Delta_{k_1,\ldots,k_n}(x)y_1{}^{k_1}\cdots y_n{}^{k_n}\\
&= \sum_{\ell_1>\cdots>\ell_n\ge 0}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\Delta_{\ell_{\sigma(1)},\ldots,\ell_{\sigma(n)}}(x)y_1{}^{\ell_{\sigma(1)}}\cdots y_n{}^{\ell_{\sigma(n)}}\\
&= \sum_{\ell_1>\cdots>\ell_n\ge 0}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\Delta_{\ell_1,\ldots,\ell_n}(x)y_1{}^{\ell_{\sigma(1)}}\cdots y_n{}^{\ell_{\sigma(n)}}\\
&= \sum_{\ell_1>\cdots>\ell_n\ge 0}\Delta_{\ell_1,\ldots,\ell_n}(x)\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)y_1{}^{\ell_{\sigma(1)}}\cdots y_n{}^{\ell_{\sigma(n)}}\\
&= \sum_{\ell_1>\cdots>\ell_n\ge 0}\Delta_{\ell_1,\ldots,\ell_n}(x)\Delta_{\ell_1,\ldots,\ell_n}(y)=\sum_{\substack{\mu\in\mathcal{P}_n\\ \mu\text{ は strict}}}\Delta_\mu(x)\Delta_\mu(y)
\end{aligned}$$

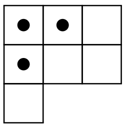
とできる. strict な分割は $\lambda+\delta$ $(\lambda\in\mathcal{P}_n)$ と表せることから

$$\det\left[\frac{1}{1-x_iy_j}\right]_{1\le i,j\le n}=\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n}\Delta_{\lambda+\delta}(x)\Delta_{\lambda+\delta}(y)$$

がわかる. 先に示した Cauchy 行列式と $\dfrac{\Delta_{\lambda+\delta}(x)}{\Delta_\delta(x)}=s_\lambda^{\det}(x)$ から結論を得る.　□

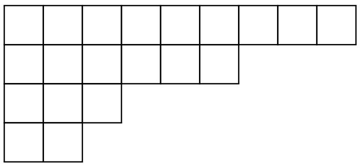
1.5　Schur 函数の 2 つの定義の同値性

"$s_\lambda^{\mathrm{comb}}(x)=s_\lambda^{\det}(x)$" を証明するために, もう少し準備が必要である. 分割 λ を Young 図形として表したときに, その箱の全体が分割 μ の箱たちを含むとみなせるとき, 素朴に $\mu\subset\lambda$ と書く. 例えば $\mu=(2,1,0)\subset(3,3,1)=\lambda$ という具合である：

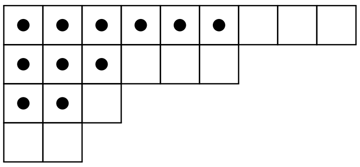


黒丸 ● によって分割 $\mu=(2,1,0)$ を表した. この図では空箱が残っているが, その全体を λ/μ と書き skew diagram と呼ぶ. このようにして, より一般の分割 λ, μ で $\mu\subset\lambda$ なるものに対しても skew diagram λ/μ が考えられる.

「skew diagram が horizontal strip である」という事柄を説明する. 例えば

$\lambda=(9,6,3,2,0,\ldots,0)=$  $\in\mathcal{P}_n$

を台に持つ半標準盤を作るとき, どの箱には "n" を入れてよいのかを考える. この例では, n は 4 以上の整数であるとする. 半標準盤の条件から, 次の Young 図形の中の "空箱" には n を入れられることがわかる：



ここで,「λ を台に持つ半標準盤があるとき, 上の図の空箱の位置には必ず n が入っている」と述べているわけではないことに注意する. また, 先に述べた skew diagram の言葉を使うと, この「n が入れる箱の全体」とは, $\mu=(6,3,2,0,\ldots,0)\in\mathcal{P}_n$ とおくときの skew diagram λ/μ のことである. このとき, n が入れる空箱たち (すなわち skew diagram λ/μ) は次の条件を満たすように配置されていることがわかる：

- どの列を見ても, 空箱は高々 1 つしかない.

skew diagram λ/μ がこの条件を満たすとき, λ/μ は horizontal strip であるという.

ここで, λ/μ が horizontal strip であることと

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \lambda_3 \geq \mu_3 \geq \cdots$$

が成り立つことが同値であることに注意する.

例 1.17. 明らかではあるが, 1 行の Young 図形から生じる skew diagram はみな horizontal strip である. 例えば

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & \\ \hline\end{array}$$

という具合である ($\lambda=(7)$ が $\mu=(4)$ を含んでおり, skew diagram λ/μ ができている, と見ている).

例 1.18. 長方形 Young 図形 $\lambda=(3,3,3)$ から生じる horizontal strip な skew diagram は次の 4 つである：

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline & & \\ \hline\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & & \\ \hline\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet & \\ \hline\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline\end{array}\,.$$

例えば, skew diagram

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet & \\ \hline & & \\ \hline\end{array}$$

は第 3 列で空箱が 2 つ重なっているので, horizontal strip ではない.

例 1.19. いわゆる階段型の Young 図形 $\lambda=(3,2,1)$ から生じる horizontal strip な skew diagram は次の 8 個である：

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \bullet & \bullet & \\ \hline \bullet & & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline \bullet & \bullet & \\ \hline \bullet & \bullet & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline \bullet & \bullet & \\ \hline \bullet & & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} \bullet & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\,,$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} \bullet & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline \bullet & \bullet & \\ \hline \bullet & \bullet & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} \bullet & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} \bullet & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\,.$$

例 1.20. 冒頭に述べた $\lambda=(9,6,3,2)\in\mathcal{P}_4$ を台に持つ半標準盤のうち, 4 を Young 図形 λ の箱に入れられるだけ入れたものは

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & * & * & * & * & 4 & 4 & 4 \\ \hline 2 & 2 & * & 4 & 4 & 4 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-6} 3 & 3 & 4 & \multicolumn{6}{c}{} \\ \cline{1-3} 4 & 4 & \multicolumn{7}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array}$$

という格好になる．今回の場合, 第 1 列, 第 2 列に 1, 2, 3, 4 が縦に並ぶのは, 半標準盤の条件から必然である．$(2,3)$ の位置にある $*$ は 2 か 3 である．よって, 今回の λ の箱に 4 を可能な限り入れてできる半標準盤には

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&*&*&*&*&4&4&4\\ \hline 2&2&\color{red}{2}&4&4&4\\ \cline{1-6} 3&3&4\\ \cline{1-3} 4&4\\ \cline{1-2}\end{array}\ ,\qquad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&*&*&*&*&4&4&4\\ \hline 2&2&\color{blue}{3}&4&4&4\\ \cline{1-6} 3&3&4\\ \cline{1-3} 4&4\\ \cline{1-2}\end{array}$$

の 2 種類のタイプがある．$(2,3)$ の数字が 2 の場合の半標準盤は, $(1,3)$ の数字が 1 に決まるので, この場合の半標準盤は

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&a&b&c&4&4&4\\ \hline 2&2&\color{red}{2}&4&4&4\\ \cline{1-6} 3&3&4\\ \cline{1-3} 4&4\\ \cline{1-2}\end{array}$$

という格好であることがわかる．a, b, c は $1\le a\le b\le c\le 3$ なる自然数である．$(2,3)$ の数字が 3 である場合の半標準盤の格好には

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&p&q&r&4&4&4\\ \hline 2&2&\color{blue}{3}&4&4&4\\ \cline{1-6} 3&3&4\\ \cline{1-3} 4&4\\ \cline{1-2}\end{array}\ ,\qquad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&2&p'&q'&r'&4&4&4\\ \hline 2&2&\color{blue}{3}&4&4&4\\ \cline{1-6} 3&3&4\\ \cline{1-3} 4&4\\ \cline{1-2}\end{array}$$

の 2 つのタイプがある．p, q, r は $1\le p\le q\le r\le 3$ なる自然数, p', q', r' は $2\le p'\le q'\le r'\le 3$ なる自然数である．

例 1.21. 半標準盤とは, 以下に述べるような意味で「horizontal strip である skew diagram が大きくなっていったもの」とみなせる．例えば $\lambda=(9,6,3,2)\in\mathcal{P}_4$ を台に持つ半標準盤

$$T=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&2&2&3&3&4&4\\ \hline 2&2&3&3&3&4\\ \cline{1-6} 3&3&4\\ \cline{1-3} 4&4\\ \cline{1-2}\end{array}$$

を見つつ, 次のような絵を描いてみる：

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\ \hline\end{array}\ \to\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&2&2\\ \hline 2&2\\ \cline{1-2}\end{array}\ \to\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&2&2&3&3\\ \hline 2&2&3&3&3\\ \cline{1-5} 3&3\\ \cline{1-2}\end{array}\ \to\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&2&2&3&3&4&4\\ \hline 2&2&3&3&3&4\\ \cline{1-6} 3&3&4\\ \cline{1-3} 4&4\\ \cline{1-2}\end{array}\ .$$

これは, 半標準盤 T の中の $\boxed{1}$ たちを最初に描き, 次に T の中の $\boxed{2}$ たちをこれに追加し, 今度は T の中の $\boxed{3}$ たちを描き込み, 最後に T の中の $\boxed{4}$ たちを加えた, という操作を行ったものである．この操作の各段階で追加される箱たちを skew diagram とみなすと, これらはみな horizontal strip であることがわかる．例えば

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\ \hline\end{array}\ \to\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&2&2\\ \hline 2&2\\ \cline{1-2}\end{array}$$

においては

$$\begin{ytableau} \bullet & \bullet & \bullet & & \\ & \end{ytableau}$$

という horizontal strip な skew diagram が見えている．同様に

$$\begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{ytableau} \to \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{ytableau}$$

では horizontal strip な skew diagram

$$\begin{ytableau} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \\ & \end{ytableau}$$

が見えている．先に見た半標準盤がだんだんと大きくなっていく図の skew diagram 版は

$$\begin{ytableau} & & \end{ytableau} \to \begin{ytableau} \bullet & \bullet & \bullet & & \\ & \end{ytableau} \to \begin{ytableau} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & & & \\ & \end{ytableau} \to \begin{ytableau} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \\ & \end{ytableau}$$

である．逆に, この図において, 各箱に「その箱が何回目の箱の追加で現れたのか」を書き込むと, 半標準盤が復元される．すなわち

$$\begin{ytableau} & & \end{ytableau} \to \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 \end{ytableau} \to \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & & \\ & \end{ytableau} \to \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{ytableau} \to \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & & \\ 2 & 2 & & & \\ & \end{ytableau}$$

$$\to \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{ytableau} \to \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & & \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & \\ 3 & 3 & \\ & \end{ytableau} \to \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{ytableau}$$

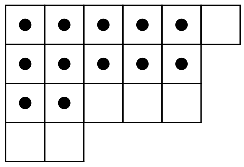
ということである．この意味で,「半標準盤とは, horizontal strip な箱たちを追加して Young 図形を大きくしていく過程の情報を記録したものである」といえる．

分割 $\lambda \in \mathcal{P}_n$ を台に持つ半標準盤の中にある $\boxed{n}$ たちは horizontal strip な skew diagram として現れるのであった．よって, 組み合わせ論的な Schur 函数の定義である

$$s_\lambda^{\mathrm{comb}}(x) = \sum_{T \in \mathrm{SSTab}_n(\lambda)} x^{\mathrm{wt}(T)} \quad (\lambda \in \mathcal{P}_n)$$

の中の $x^{\mathrm{wt}(T)}$ に x_n の冪がどのようにして現れるのかを, horizontal strip な skew diagram の言葉で表せる．例えば分割 $\lambda = (6, 5, 5, 2) \in \mathcal{P}_5$ を台に持つ半標準盤を作るとき, 5 が入れる

箱は以下の空箱の位置にある：



よって, この場合の半標準盤 $T\in\mathrm{SSTab}_5(\lambda)$ で, 例えば $x^{\mathrm{wt}(T)}$ が ${x_5}^3$ を含むようなものをすべて求めたければ, 分割 $\mu\subset\lambda$ で λ/μ は horizontal strip, かつ $|\lambda|-|\mu|=3$ であるものをすべて考えればよい. 以上によって, $s_\lambda^{\mathrm{comb}}(x)$ の次のような書き換えが可能である：

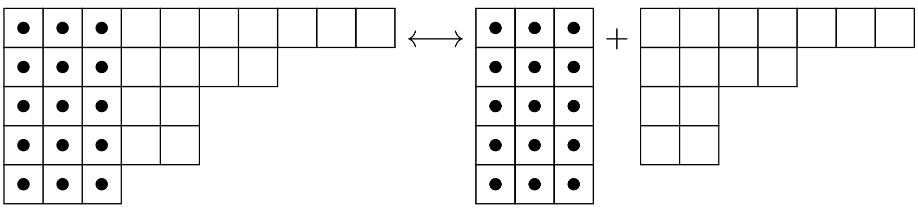
$$\begin{aligned} s_\lambda^{\mathrm{comb}}(x) &= \sum_{\substack{\mu\subset\lambda \\ \lambda/\mu\text{ は horizontal strip}}} \sum_{T\in\mathrm{SSTab_{n-1}}(\mu)} \underbrace{x^{\mathrm{wt}(T)}}_{x_1,\ldots,x_{n-1}\text{ のみを含む}} {x_n}^{|\lambda|-|\mu|} \\ &= \sum_{\substack{\mu\subset\lambda \\ \lambda/\mu\text{ は horizontal strip}}} s_\mu^{\mathrm{comb}}(x_1,\ldots,x_{n-1}){x_n}^{|\lambda|-|\mu|}. \end{aligned}$$

以下では「horizontal strip」を短く「h.s.」と表記することがある.

命題 1.22. 任意の $\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対し次が成り立つ：

- $$s_\lambda^{\mathrm{comb}}(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\substack{\mu\subset\lambda \\ \lambda/\mu\text{ は h.s.}}} s_\mu^{\mathrm{comb}}(x_1,\ldots,x_{n-1}){x_n}^{|\lambda|-|\mu|}.$$

“$s_\lambda^{\mathrm{comb}}(x)=s_\lambda^{\mathrm{det}}(x)$” を示すために, もう少し準備を続ける. 分割 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathcal{P}_n$ があるとき, この各成分から λ_n を引いた $(\lambda_1-\lambda_n,\ldots,\lambda_{n-1}-\lambda_n,0)$ も分割である. これは



という具合に Young 図形を分解したり合わせたりすることに対応する. また, 1 行 Young 図形 (r) を縦に n 個重ねてできる長方形 Young 図形を

$$(r^n):=(r,\ldots,r)$$

と書くとき, 分割 $\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対し, 分割 $\lambda+(r^n)=(\lambda_1+r,\ldots,\lambda_n+r)$ は, Young 図形 λ の左から長方形 Young 図形 (r^n) をくっつけたものによって表される.

命題 1.23. 任意の $r\in\mathbb{Z}_{>0}$ および $\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対し次が成り立つ：

$$s_{\lambda+(r^n)}^{\mathrm{comb}}(x)=(x_1\cdots x_n)^r s_\lambda^{\mathrm{comb}}(x),\quad s_{\lambda+(r^n)}^{\mathrm{det}}(x)=(x_1\cdots x_n)^r s_\lambda^{\mathrm{det}}(x).$$

証明. $s_\lambda^{\det}(x)$ についての命題の方が簡単なので, こちらから示す. $s_\lambda^{\det}(x)$ の定義から

$$s_{\lambda+(r^n)}^{\det}(x)=\frac{1}{\Delta(x)}\det\left[{x_i}^{\lambda_j+r+n-j}\right]_{1\le i,j\le n}$$

であるが, 行列式の性質から, $\det\left[{x_i}^{\lambda_j+r+n-j}\right]_{1\le i,j\le n}$ の第 i 行から ${x_i}^r$ をくくれるので

$$s_{\lambda+(r^n)}^{\det}(x)=\frac{1}{\Delta(x)}\cdot(x_1\cdots x_n)^r\det\left[{x_i}^{\lambda_j+n-j}\right]_{1\le i,j\le n}=(x_1\cdots x_n)^r s_\lambda^{\det}(x)$$

がわかる. $s_\lambda^{\mathrm{comb}}(x)$ に関する命題は次の半標準盤についての事実から従う：

- 分割 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathcal{P}_n$ で $\lambda_n>0$ なるものを台に持つ半標準盤の第 1 列から第 λ_n 列にかけては, 箱の中に 1 から n が 1 つずつ縦に並んでいる.

これは半標準盤であるための条件から従う. 例えば

$$(7,4,2,2)=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline \ & \ & \ & \ & \ & \ & \ \\ \hline \ & \ & \ & \ \\ \cline{1-4} \ & \ \\ \cline{1-2} \ & \ \\ \cline{1-2}\end{array}\in\mathcal{P}_4$$

を台に持つ半標準盤は

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & * & * & * & * & * \\ \hline 2 & 2 & * & * \\ \cline{1-4} 3 & 3 \\ \cline{1-2} 4 & 4 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

という具合に, 第 1 列, 第 2 列には必ず 1 から 4 が 1 つずつ縦に並ぶ. これを知っていると, Young 図形 $\lambda+(r^n)\in\mathcal{P}_n$ を台に持つ半標準盤 T があるとき, この第 1 列から第 r 列にかけては, 1 から n が 1 つずつ縦に必ず並んでいる. よって, $\lambda+(r^n)\in\mathcal{P}_n$ を台に持つ半標準盤 T が何であれ, $x^{\mathrm{wt}(T)}$ は $(x_1\cdots x_n)^r$ で割れている. $T\in\mathrm{SSTab}_n(\lambda+(r^n))$ に対し

$$x^{\mathrm{wt}(T)}=(\text{残りの部分})\times(x_1\cdots x_n)^r$$

と書くとき, この "(残りの部分)" は T から長方形 Young 図形 (r^n) の部分を除いたもの, すなわち Young 図形 λ を台に持つ半標準盤としてどういうものが現れているのかによって決まる. 以上によって次が成り立つ：

$$\begin{aligned}s_{\lambda+(r^n)}^{\mathrm{comb}}(x)&=\sum_{T\in\mathrm{SSTab}_n(\lambda+(r^n))}x^{\mathrm{wt}(T)}=\sum_{T'\in\mathrm{SSTab}_n(\lambda)}x^{\mathrm{wt}(T')}\cdot(x_1\cdots x_n)^r\\&=(x_1\cdots x_n)^r s_\lambda^{\mathrm{comb}}(x).\quad\square\end{aligned}$$

定理 1.24. 任意の $\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対し $s_\lambda^{\mathrm{comb}}(x)=s_\lambda^{\det}(x)$ である.

証明. 組み合わせ論的な Schur 函数 $s_\lambda^{\mathrm{comb}}(x)$ について次が成り立つのであった：

$$s_\lambda^{\mathrm{comb}}(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\substack{\mu\subset\lambda\\ \lambda/\mu\ \text{は h.s.}}} s_\mu^{\mathrm{comb}}(x_1,\dots,x_{n-1}){x_n}^{|\lambda|-|\mu|}\quad(\lambda\in\mathcal{P}_n).$$

これは, 分割のサイズの小さな組み合わせ論的 Schur 函数から, より大きなサイズの分割に対するものを定める漸化式であるとみなせる. よって, 行列式で定められた Schur 函数 $s_\lambda^{\det}(x)$ についても

$$s_\lambda^{\det}(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\substack{\mu\subset\lambda\\ \lambda/\mu\ \text{は h.s.}}} s_\mu^{\det}(x_1,\dots,x_{n-1}){x_n}^{|\lambda|-|\mu|}\quad(\lambda\in\mathcal{P}_n)$$

が成り立つことがいえれば, $s_\lambda^{\mathrm{comb}}(x)=s_\lambda^{\det}(x)$ であることが証明できたことになる.

Cauchy の定理の証明で用いた記号をここでも使う. 多重指数 $(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathbb{N}^n$ に対し $\Delta_{\mu_1,\dots,\mu_n}(x):=\det[{x_i}^{\mu_j}]_{1\le i,j\le n}$ とおくと

$$\sum_{\ell_1,\dots,\ell_n\ge 0}\Delta_{\ell_1,\dots,\ell_n}(x){y_1}^{\ell_1}\cdots{y_n}^{\ell_n}=\frac{\Delta(x)\Delta(y)}{\prod_{1\le i,j\le n}(1-x_iy_j)}$$

であった. ここで $f_{\ell_1,\dots,\ell_n}(x):=\dfrac{\Delta_{\ell_1,\dots,\ell_n}(x)}{\Delta(x)}$ とおくと ($\leftarrow$ これは将来 $s_\lambda^{\det}(x)$ になるもの)

$$\sum_{\ell_1,\dots,\ell_n\ge 0}f_{\ell_1,\dots,\ell_n}(x){y_1}^{\ell_1}\cdots{y_n}^{\ell_n}=\frac{\Delta(y)}{\prod_{1\le i,j\le n}(1-x_iy_j)}$$

であるが, $y_n=0$ とおくことで

$$\sum_{\ell_1,\dots,\ell_{n-1}\ge 0}f_{\ell_1,\dots,\ell_{n-1},0}(x){y_1}^{\ell_1}\cdots{y_{n-1}}^{\ell_{n-1}}=\frac{\Delta(y_1,\dots,y_{n-1})}{\prod_{1\le i,j\le n-1}(1-x_iy_j)}\cdot\frac{y_1\cdots y_{n-1}}{\prod_{1\le j\le n-1}(1-x_ny_j)}$$

を得る. この右辺にあるものたちについて

- $\dfrac{\Delta(y_1,\dots,y_{n-1})}{\prod_{1\le i,j\le n-1}(1-x_iy_j)}=\sum_{k_1,\dots,k_{n-1}\ge 0}f_{k_1,\dots,k_{n-1}}(x_1,\dots,x_{n-1}){y_1}^{k_1}\cdots{y_{n-1}}^{k_{n-1}},$
- $\dfrac{1}{\prod_{1\le j\le n-1}(1-x_ny_j)}=\sum_{r_1,\dots,r_{n-1}\ge 0}{x_n}^{r_1+\cdots+r_{n-1}}{y_1}^{r_1}\cdots{y_{n-1}}^{r_{n-1}}$

と展開すれば

$$\begin{aligned}&\sum_{\ell_1,\dots,\ell_{n-1}\ge 0}f_{\ell_1,\dots,\ell_{n-1},0}(x_1,\dots,x_n){y_1}^{\ell_1}\cdots{y_{n-1}}^{\ell_{n-1}}\\ =&\sum_{\substack{k_1,\dots,k_{n-1}\ge 0\\ r_1,\dots,r_{n-1}\ge 0}}f_{k_1,\dots,k_{n-1}}(x_1,\dots,x_{n-1}){x_n}^{r_1+\cdots+r_{n-1}}{y_1}^{k_1+r_1+1}\cdots{y_{n-1}}^{k_{n-1}+r_{n-1}+1}\end{aligned}$$

である．この両辺の $y_1,\dots,y_{n-1}$ の冪が等しい項を比較すれば, $\ell_1>\ell_2>\cdots>\ell_{n-1}\geq 0$ なる $\ell_1,\dots,\ell_{n-1}\in\mathbb{N}$ たちに対し

$$f_{\ell_1,\dots,\ell_{n-1},0}(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\substack{k_1,\dots,k_{n-1}\geq 0\\ r_1,\dots,r_{n-1}\geq 0\\ k_i+r_i+1=\ell_i\ (1\leq i\leq n-1)}} f_{k_1,\dots,k_{n-1}}(x_1,\dots,x_{n-1}){x_n}^{r_1+\cdots+r_{n-1}}$$

であることがわかる．この和の中の r_i $(1\leq i\leq n-1)$ を $r_i=\ell_i-k_i-1\geq 0$ として消去すると

$$f_{\ell_1,\dots,\ell_{n-1},0}(x_1,\dots,x_n)=\sum_{0\leq k_i<\ell_i\ (1\leq i\leq n-1)} f_{k_1,\dots,k_{n-1}}(x_1,\dots,x_{n-1}){x_n}^{\sum_j \ell_j-\sum_j k_j-(n-1)}$$

である．これを適当に変形することで, 組み合わせ論的 Schur 函数 $s_\lambda^{\mathrm{comb}}(x)$ の満たす漸化式と同じ格好にできることを以下で示す．上の右辺の和を

$$\sum_{(k_1,\dots,k_{n-1})\in[0,\ell_1)\times\cdots\times[0,\ell_{n-1})} f_{k_1,\dots,k_{n-1}}(x_1,\dots,x_{n-1}){x_n}^{\sum_j \ell_j-\sum_j k_j-(n-1)}\cdots(*)$$

と表しておく．ここで次のことに注意する：この和の中身は $k_1,\dots,k_{n-1}$ について反対称なので, 例えば

$$\begin{aligned}(*)&=\sum_{(k_1,k_2)\in[0,\ell_1)\times[0,\ell_2)}(\cdots)=\underbrace{\sum_{(k_1,k_2)\in[0,\ell_2)\times[0,\ell_2)}(\cdots)}_{0}+\sum_{(k_1,k_2)\in[\ell_2,\ell_1)\times[0,\ell_2)}(\cdots)\\ &=\sum_{(k_1,k_2)\in[\ell_2,\ell_1)\times[0,\ell_2)}(\cdots)\end{aligned}$$

となる (足されているものや k_1, k_2 以外の添え字の和を省略した).

上で印をつけた和が 0 になるのは, n 次の反対称行列の成分 a_{ij} について

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}=0$$

が成り立つのと同じ理由による (和の添え字のつけ換えによってこうなるのであった).

これによって, k_1 の和の範囲が $[0,\ell_1)$ から $[\ell_2,\ell_1)$ に狭まったことに注意する．こういうことが他の和の添え字 $k_2,\dots,k_{n-1}$ にも起こり, $(*)$ は

$$\sum_{\substack{(k_1,\dots,k_{n-1})\\ \ell_{i+1}\leq k_i<\ell_i\ (1\leq i\leq n-1)}} f_{k_1,\dots,k_{n-1}}(x_1,\dots,x_{n-1}){x_n}^{\sum_j \ell_j-\sum_j k_j-(n-1)}$$

と書かれることがわかる (この和では $\ell_n=0$ と理解する)．以上より

$$f_{\ell_1,\dots,\ell_{n-1},0}(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\substack{(k_1,\dots,k_{n-1})\\ \ell_{i+1}\leq k_i<\ell_i\ (1\leq i\leq n-1)}} f_{k_1,\dots,k_{n-1}}(x_1,\dots,x_{n-1}){x_n}^{\sum_j \ell_j-\sum_j k_j-(n-1)}$$

が得られた．ここで $(\ell_1,\ldots,\ell_{n-1},0)\in\mathbb{N}^n$ は $\ell_1>\cdots>\ell_{n-1}\geq 0$, すなわち strict な分割である．よって, この和の中の各 $(k_1,\ldots,k_{n-1})\in\mathbb{N}^{n-1}$ も strict な分割である．strict な分割は "$\lambda+\delta$" (λ は分割) と表せることに注意し, $(\ell_1,\ldots,\ell_{n-1},0)\in\mathcal{P}_n$ とみなして

$$\lambda_j:=\ell_j-(n-j)\quad(1\leq j\leq n-1),\quad \lambda_n:=0$$

によって $\lambda:=(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1},0)\in\mathcal{P}_n$ を定める．こうすると

$$\begin{aligned}&s_\lambda^{\det}(x_1,\ldots,x_n)\\ =&\sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_{n-1})\\ \lambda_{i+1}+n-i-1\leq k_i<\lambda_i+n-i\ (1\leq i\leq n-1)}} f_{k_1,\ldots,k_{n-1}}(x_1,\ldots,x_{n-1})x_n{}^{\sum_j\{\lambda_j+(n-j)\}-\sum_j k_j-(n-1)}\end{aligned}$$

である．この和の中の各 $(k_1,\ldots,k_{n-1})$ も strict な分割なので, 各 $(k_1,\ldots,k_{n-1})$ に対し

$$\mu_j:=k_j-(n-1-j)\quad(1\leq j\leq n-1)$$

として $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_{n-1})\in\mathcal{P}_{n-1}$ とみなすと次が成り立つ：

$$\begin{aligned}&s_\lambda^{\det}(x_1,\ldots,x_n)\\ &=\sum_{\substack{\mu\in\mathcal{P}_{n-1}\\ \lambda_{i+1}\leq\mu_i\leq\lambda_i\ (1\leq i\leq n-1)}} s_\mu^{\det}(x_1,\ldots,x_{n-1})x_n{}^{\sum_j\{\lambda_j+(n-j)\}-\sum_j\{\mu_j+(n-1-j)\}-(n-1)}\\ &=\sum_{\substack{\mu\in\mathcal{P}_{n-1}\\ \lambda_{i+1}\leq\mu_i\leq\lambda_i\ (1\leq i\leq n-1)}} s_\mu^{\det}(x_1,\ldots,x_{n-1})x_n{}^{|\lambda|-|\mu|}.\end{aligned}$$

念のために述べると, この和の中の x_n の冪は

$$\begin{aligned}\bullet\ &\sum_{j=1}^{n}\{\lambda_j+(n-j)\}-\sum_{j=1}^{n-1}\{\mu_j+(n-1-j)\}-(n-1)\\ =&|\lambda|+\sum_{j=1}^{n}(n-j)-|\mu|-\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)+(n-1)-(n-1)=|\lambda|-|\mu|\end{aligned}$$

という風にして $|\lambda|-|\mu|$ になる．

以上によって, $\lambda_n=0$ である分割 $\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対し

$$s_\lambda^{\det}(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{\substack{\mu\in\mathcal{P}_{n-1}\\ \lambda_{i+1}\leq\mu_i\leq\lambda_i\ (1\leq i\leq n-1)}} s_\mu^{\det}(x_1,\ldots,x_{n-1})x_n{}^{|\lambda|-|\mu|}$$

であるが, この和に見えている "$\lambda_{i+1}\leq\mu_i\leq\lambda_i\ \ (1\leq i\leq n-1)$" という条件は

「skew diagram λ/μ が horizontal strip である」

ための条件に他ならない．こうして, $\lambda_n=0$ である分割 $\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対しては

$$s_\lambda^{\det}(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{\substack{\mu\subset\lambda\\ \lambda/\mu\text{ は h.s.}}} s_\mu^{\det}(x_1,\ldots,x_{n-1})x_n{}^{|\lambda|-|\mu|}$$

が成り立つことがわかった. $\lambda_n \neq 0$ である一般の分割 $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対しては, 先に触れた命題 1.23 を使って次のようにすればよい：

$$\begin{aligned}
s_\lambda^{\det}(x) &= (x_1 \cdots x_n)^{\lambda_n} s_{\lambda-(\lambda_n{}^n)}^{\det}(x) \\
&= (x_1 \cdots x_n)^{\lambda_n} \sum_{\substack{\mu \subset \lambda-(\lambda_n{}^n) \\ \lambda-(\lambda_n{}^n)/\mu \text{ は h.s.}}} s_\mu^{\det}(x_1, \ldots, x_{n-1}) x_n{}^{|\lambda-(\lambda_n{}^n)|-|\mu|} \\
&= \sum_{\substack{\mu \subset \lambda-(\lambda_n{}^n) \\ \lambda-(\lambda_n{}^n)/\mu \text{ は h.s.}}} s_{\mu+(\lambda_n{}^{n-1})}^{\det}(x_1, \ldots, x_{n-1}) x_n{}^{|\lambda|-(n-1)\lambda_n-|\mu|} \\
&= \sum_{\substack{\mu \subset \lambda-(\lambda_n{}^n) \\ \lambda-(\lambda_n{}^n)/\mu \text{ は h.s.}}} s_{\mu+(\lambda_n{}^{n-1})}^{\det}(x_1, \ldots, x_{n-1}) x_n{}^{|\lambda|-\left|\mu+\left(\lambda_n{}^{n-1}\right)\right|} \\
&= \sum_{\substack{\nu \subset \lambda \\ \lambda/\nu \text{ は h.s.}}} s_\nu^{\det}(x_1, \ldots, x_{n-1}) x_n{}^{|\lambda|-|\nu|}. \quad \square
\end{aligned}$$

系 1.25. (i) 任意の $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対し, 組み合わせ論的 Schur 函数 $s_\lambda^{\mathrm{comb}}(x)$ は対称多項式である.

(ii) 任意の $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対し, 行列式による Schur 函数 $s_\lambda^{\det}(x)$ を

$$s_\lambda^{\det}(x) = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^n} c_\mu x^\mu \quad (\leftarrow \text{有限和})$$

と表示するとき, 係数 c_μ (のうち 0 でないもの) はすべて自然数である.

以下では $s_\lambda(x) := s_\lambda^{\mathrm{comb}}(x) = s_\lambda^{\det}(x)$ を単に Schur 函数と呼ぶ. また

$$s_\lambda(x) = \sum_{T \in \mathrm{SSTab}_n(\lambda)} x^{\mathrm{wt}(T)} \quad (\lambda \in \mathcal{P}_n)$$

を Schur 函数のタブロー表示と呼ぶ.

1.6 Schur 函数の特殊値

Schur 函数のタブロー表示によれば, 文字 $x_1, \ldots, x_n$ すべてに 1 を代入することで

$$s_\lambda(1, \ldots, 1) = \sum_{T \in \mathrm{SSTab}_n(\lambda)} 1 = \#\mathrm{SSTab}_n(\lambda) \quad (\lambda \in \mathcal{P}_n)$$

が成り立つ. Schur 函数の行列式表示をうまく使えば, $\#\mathrm{SSTab}_n(\lambda)$ が分割 $\lambda \in \mathcal{P}_n$ の情報からどのように決まるのかがわかる.

Young 図形 λ があるとき, これを行列の転置と同じ要領でひっくり返すことができる (行

と列を入れ換えるということ). そうしてできる分割を λ' と書き, これも λ の転置と呼ぶ. 例えば

$$\lambda=(5,3,1)=\ydiagram{5,3,1}, \quad \lambda'=(3,2,2,1,1)=\ydiagram{3,2,2,1,1}$$

という具合である.

定義 1.26. Young 図形 λ のサイト $s=(i,j)\in\lambda$ に対し

$$a_\lambda(s):=\lambda_i-j, \quad \ell_\lambda(s):=\lambda'_j-i, \quad h_\lambda(s):=a_\lambda(s)+\ell_\lambda(s)+1, \quad c_\lambda(s):=j-i$$

をそれぞれアーム長, レッグ長, フック長, content と呼ぶ. また $n(\lambda)$ を次で定める :

$$n(\lambda):=\sum_{i\geq 1}(i-1)\lambda_i.$$

Young 図形 λ のサイト $s\in\lambda$ のアーム長 $a_\lambda(s)$, レッグ長 $\ell_\lambda(s)$ などの意味は次の通りである. Young 図形 $\lambda=(7,6,4,3)\in\mathcal{P}_4$ のサイト $s=(3,2)$ に対し

- $a_\lambda(s)=(\circ$ の個数$)=3$,
- $\ell_\lambda(s)=(\triangle$ の個数$)=2$

$$\begin{ytableau} \; & & & & & & \\ & & s & \circ & \circ & \circ \\ & & \triangle & \\ & & \triangle \end{ytableau}$$

である. この場合のフック長 $h_\lambda(s)$ とは, 右の図中に見えている

$$\begin{ytableau} s & \circ & \circ & \circ \\ \triangle \\ \triangle \end{ytableau}$$

という“フック”に含まれる箱の個数のことであり $h_\lambda(s)=a_\lambda(s)+\ell_\lambda(s)+1=6$ である.

$f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ を n 変数多項式, $\mu\in\mathbb{N}^n$ とする. 例えば $f(x)$ に $x_i=q^{\mu_i}$ $(1\leq i\leq n)$ なる代入を行ったものを単に次のように表記する :

$$f(q^\mu)=f(q^{\mu_1},\ldots,q^{\mu_n}).$$

命題 1.27. 任意の $\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対し次が成り立つ :

$$s_\lambda\left(t^\delta\right)=t^{n(\lambda)}\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{1-t^{\lambda_i-\lambda_j+j-i}}{1-t^{j-i}}=t^{n(\lambda)}\prod_{s\in\lambda}\frac{1-t^{n+c_\lambda(s)}}{1-t^{h_\lambda(s)}}.$$

証明の概略. 分割 $\delta=(n-1,n-2,n-3,\dots,2,1,0)\in\mathcal{P}_n$ の j 番目の成分を

$$\delta_j=n-j \quad (1\le j\le n)$$

と書くと, 分割 $\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対し

$$s_\lambda(t^\delta)=\frac{\det\left[t^{\delta_i(\lambda_j+\delta_j)}\right]_{1\le i,j\le n}}{\det[t^{\delta_i\delta_j}]_{1\le i,j\le n}}=\frac{\det\left[t^{(\lambda_i+\delta_i)\delta_j}\right]_{1\le i,j\le n}}{\det[t^{\delta_i\delta_j}]_{1\le i,j\le n}}=\prod_{1\le i<j\le n}\frac{t^{\lambda_i+\delta_i}-t^{\lambda_j+\delta_j}}{t^{\delta_i}-t^{\delta_j}}$$
$$=\prod_{1\le i<j\le n}t^{\lambda_j}\cdot\frac{1-t^{\lambda_i+\delta_i-\lambda_j-\delta_j}}{1-t^{\delta_i-\delta_j}}$$

である. ここで

$$\prod_{1\le i<j\le n}t^{\lambda_j}=\prod_{j=2}^{n}t^{(j-1)\lambda_j}=t^{n(\lambda)}$$

なので

$$s_\lambda(t^\delta)=t^{n(\lambda)}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{1-t^{\lambda_i-\lambda_j+j-i}}{1-t^{j-i}}$$

が得られる. 命題 1.27 のもう 1 つの等号を示すには

$$\prod_{1\le i<j\le n}\frac{1-t^{\lambda_i-\lambda_j+j-i}}{1-t^{j-i}}=\prod_{s\in\lambda}\frac{1-t^{n+c_\lambda(s)}}{1-t^{h_\lambda(s)}}$$

が必要であるが, この証明については

- I.G. Macdonald『Symmetric Functions and Hall Polynomials Second Edition』(Oxford University Press, 1995)

を参照してほしい. □

命題 1.28. 任意の $\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対し

$$s_\lambda(1,\dots,1)=\#\mathrm{SSTab}_n(\lambda)=\prod_{s\in\lambda}\frac{n+c_\lambda(s)}{h_\lambda(s)}.$$

例 1.29. 例 1.10 から, $\lambda=(2,1,0)\in\mathcal{P}_3$ を台に持つ半標準盤は

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array},\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array},\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array},\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array},\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array},\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array},\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array},\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$$

ですべてなので $\#\mathrm{SSTab}_3(\lambda)=8$ である. これが先の命題によっても得られるか見てみる. 先の命題から

$$\#\mathrm{SSTab}_n(\lambda)=\prod_{s\in\lambda}\frac{n+c_\lambda(s)}{h_\lambda(s)}$$

であるので, $\lambda \in \mathcal{P}_n$ が手元にあるとき, この各サイトごとに $n+c_\lambda(s)$ および $h_\lambda(s)$ を求め, これらをかけ合わせたものの比をとればよい. それは次のように書くとわかりやすい : $\lambda=(2,1,0)\in\mathcal{P}_3$ に対し

$$\#\mathrm{SSTab}_3(\lambda)=\frac{\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 4 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}}{\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}}=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{3}=8.$$

この式の分子の Young 図形の箱には $n+c_\lambda(s)$ を書き込み, 分母の Young 図形の箱には $h_\lambda(s)$ を書き込んだ (上の Young 図形に数字が書き込まれたものは半標準盤ではないことに注意). それらを分子, 分母ごとにかけ合わせたものの比をとれば $\#\mathrm{SSTab}_3(\lambda)$ がわかる. これによっても $\#\mathrm{SSTab}_n(\lambda)=8$ という正しい結果が得られている.

対称多項式についてもっと詳しいことや関連する話題を見たい読者には

- I.G. Macdonald『Symmetric Functions and Hall Polynomials Second Edition』(Oxford University Press, 1995)

をすすめる. 対称群 $\mathfrak{S}_n$ や一般線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の表現と Schur 函数の関係について知りたい読者には, 次のものも助けになると考える :

- 池田 岳『テンソル代数と表現論　線型代数続論』(東京大学出版会, 2022)
- 本間 泰史「有限群の表現, 対称群の表現の基礎」 (本間 氏によるノート)

第 2 章　Macdonald 多項式の定義と例

Macdonald 多項式とは, Macdonald 作用素のある固有函数として特徴づけられる対称多項式である. ここでは Macdonald 多項式の定義と具体例, Macdonald 作用素の形式冪級数としての固有函数などについて触れる.

2.1　Macdonald 作用素

文字 $x{=}(x_1,\dots,x_n)$ を, これまで通り n 変数多項式のための不定元と思ったり, $\mathbb{C}^n$ や $(\mathbb{C}^*)^n$ の座標だと思ったりする ($\mathbb{C}^*{=}\mathbb{C}\backslash\{0\}$). 以下では q を $|q|{<}1$ なる複素数, $t{\in}\mathbb{C}^*$ とする.

定義 2.1 (Macdonald 作用素). n 変数函数に働く q-シフト作用素 T_{q,x_i} $(1{\leq}i{\leq}n)$ を

$$T_{q,x_i}f(x_1,\dots,x_n){:=}f(x_1,\dots,\overbrace{qx_i}^{i\text{ 番目}},\dots,x_n)$$

によって定める. q-差分作用素 D_x を

- $$D_x{:=}\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}T_{q,x_i}$$

によって定め, これを Macdonald-Ruijsenaars 作用素と呼ぶ.

1987 年に, Ruijsenaars は

- S.N.M. Ruijsenaars “Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities” (Communications in Mathematical Physics 110.2 (1987): 191-213)

において, 楕円 Calogero-Moser 系と呼ばれる量子多体系の q-変形 (特殊相対論版) として楕円 Ruijsenaars 系を導入し, この系が保存量として可換な q-差分作用素たちを有することを示した. 上の q-差分作用素 D_x は, 楕円 Ruijsenaars 系のハミルトニアンの三角極限 (楕円函数を三角函数に退化させる操作を行ったもの) であるとみなせる.

Macdonald 作用素 D_x は “$\displaystyle\prod_{j\neq i}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}$” という有理函数を係数に持つので, D_x が n 変数の複素数値有理函数の空間 $\mathbb{C}(x_1,\dots,x_n)$ に働くことはわかる. 実は, D_x は対称多項式の空間 $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ に作用することが後に示される.

有理函数を係数に持つ q-差分作用素への対称群 $\mathfrak{S}_n$ の元の作用を以下のように定義する. まず, 置換 $\sigma{\in}\mathfrak{S}_n$ に対し

$$\sigma(T_{q,x_i}){:=}T_{q,x_{\sigma(i)}}\quad(1{\leq}i{\leq}n)$$

と定める. q-シフト作用素 $T_{q,x_1},\dots,T_{q,x_n}$ に対しても多重指数の記法を用いる：多重指数 $\mu{=}(\mu_1,\dots,\mu_n){\in}\mathbb{Z}^n$ に対し

$$T_{q,x}{}^{\mu}{:=}T_{q,x_1}{}^{\mu_1}\cdots T_{q,x_n}{}^{\mu_n}.$$

また, 置換 $\sigma{\in}\mathfrak{S}_n$ と多重指数 $\mu{=}(\mu_1,\dots,\mu_n){\in}\mathbb{Z}^n$ に対し

$$\sigma(T_{q,x}{}^{\mu}){:=}T_{q,x_{\sigma(1)}}{}^{\mu_1}\cdots T_{q,x_{\sigma(n)}}{}^{\mu_n}$$

とする. より一般の有理函数を係数に持つ q-差分作用素に対しては次のようにする：ある有限個の $\mu{\in}\mathbb{Z}^n$ に対して有理函数 $f_\mu(x){\in}\mathbb{C}(x_1,\dots,x_n)$ が選ばれているとき, q-差分作用素

$$\sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n} f_\mu(x)T_{q,x}{}^{\mu} \quad (\leftarrow \text{有限和})$$

と置換 $\sigma{\in}\mathfrak{S}_n$ に対し

$$\sigma\left(\sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n} f_\mu(x)T_{q,x}{}^{\mu}\right){:=}\sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n}\sigma(f_\mu(x))\sigma(T_{q,x}{}^{\mu}).$$

命題 2.2 (**Macdonald の q-差分作用素 D_x の性質**). (1) D_x は対称群 $\mathfrak{S}_n$ の作用で不変である.

(2) D_x は $\mathfrak{S}_n$ の作用で不変な有理函数の空間 $\mathbb{C}(x_1,\dots,x_n)^{\mathfrak{S}_n}$ を保つ.

(3) D_x は対称多項式の空間 $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ を保つ.

証明. (1)　まず次が成り立つことに注意する：

$$\prod_{j\neq i}\frac{tx_i{-}x_j}{x_i{-}x_j}{=}\frac{T_{t,x_i}\Delta(x)}{\Delta(x)}.$$

これは次のようにしてわかる. $i{\in}\{1,\dots,n\}$ を 1 つとるとき

$$\Delta(x){=}\prod_{1\leq j\leq i-1}(x_j{-}x_i)\prod_{i+1\leq j\leq n}(x_i{-}x_j){\times}(x_i \text{ を含まない部分})$$

と書けるので

$$\frac{T_{t,x_i}\Delta(x)}{\Delta(x)}{=}\prod_{1\leq j\leq i-1}\frac{x_j{-}tx_i}{x_j{-}x_i}\prod_{i+1\leq j\leq n}\frac{tx_i{-}x_j}{x_i{-}x_j}{=}\prod_{j\neq i}\frac{tx_i{-}x_j}{x_i{-}x_j}$$

がわかる. よって

$$D_x{=}\sum_{i=1}^{n}\frac{T_{t,x_i}\Delta(x)}{\Delta(x)}T_{q,x_i}$$

である．これより，任意の $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ に対し

$$\begin{aligned}\sigma(D_x)&=\sum_{i=1}^{n}\sigma\left(\frac{T_{t,x_i}\Delta(x)}{\Delta(x)}\right)T_{q,x_{\sigma(i)}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{sgn}(\sigma)T_{t,x_{\sigma(i)}}\Delta(x)}{\mathrm{sgn}(\sigma)\Delta(x)}T_{q,x_{\sigma(i)}}\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{T_{t,x_{\sigma(i)}}\Delta(x)}{\Delta(x)}T_{q,x_{\sigma(i)}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{T_{t,x_i}\Delta(x)}{\Delta(x)}T_{q,x_i}=D_x\end{aligned}$$

がわかる (任意の $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ に対し $\{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)\}=\{1,\ldots,n\}$ であることを使った)．

(2) (1) から，任意の $f\in\mathbb{C}(x_1,\ldots,x_n)^{\mathfrak{S}_n}$ および $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ に対し

$$\sigma(D_xf)=\sigma(D_x)\sigma(f)=D_xf$$

が成り立つ．よって，D_x は $\mathbb{C}(x_1,\ldots,x_n)^{\mathfrak{S}_n}$ を保つ．

(3) 対称多項式 $f(x)\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ を 1 つとるとき，これに Macdonald 作用素 D_x を当てると $D_xf(x)\in\mathbb{C}(x_1,\ldots,x_n)^{\mathfrak{S}_n}$ であることは知っている．また

$$D_x=\frac{1}{\Delta(x)}\sum_{i=1}^{n}T_{t,x_i}\Delta(x)T_{q,x_i}$$

であったので，$\Delta(x)D_xf(x)$ は n 変数の多項式である．更に (2) から，$\Delta(x)D_xf(x)$ は n 変数の反対称な有理函数である．これらより，$\Delta(x)D_xf(x)$ は反対称多項式であるが，これは $D_xf(x)\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ を意味する．□

$\mathbb{Z}^n$ の dominance order について説明する．$\varepsilon_j:=(0,\ldots,\overbrace{1}^{j\text{ 番目}},\ldots,0)\in\mathbb{Z}^n$ $(1\leq j\leq n)$ とおくと $\mathbb{Z}^n=\mathbb{Z}\varepsilon_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}\varepsilon_n$ である．

定義 2.3 ($\mathbb{Z}^n$ **の dominance order**)**.** $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$, $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\mathbb{Z}^n$ について $\mu\leq\nu$ であることを次の条件によって定める：

$$\mu\leq\nu\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}\begin{cases}\text{任意の } i \ (1\leq i\leq n-1) \text{ に対し } \mu_1+\cdots+\mu_i\leq\nu_1+\cdots+\nu_i,\\|\mu|=|\nu|.\end{cases}$$

$P:=\mathbb{Z}^n=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}\varepsilon_i$ を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の weight lattice と思い，$\alpha_j:=\varepsilon_j-\varepsilon_{j+1}\in\mathbb{Z}^n$ $(1\leq j\leq n-1)$ として $Q:=\bigoplus_{i=1}^{n-1}\mathbb{Z}\alpha_i$ を $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ の root lattice だと思うと，dominance order の意味が明瞭になる．$\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$, $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\mathbb{Z}^n$ のペアリング $\langle\mu,\nu\rangle\in\mathbb{Z}$ を次で定める：

$$\langle\mu,\nu\rangle:=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\nu_i.$$

命題 2.4. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ の root lattice Q の元のうち正であるものの全体を

$$Q^+ := \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} c_i \alpha_i \in Q \;\middle|\; c_i \in \mathbb{N}\ (1 \le i \le n-1) \right\}$$

とおく. $\mu, \nu \in \mathbb{Z}^n$ について $\nu - \mu \in Q^+$ であるとき $\mu \le \nu$ であり, この逆も正しい.

証明. $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対し, ある $k_1, \ldots, k_{n-1} \in \mathbb{N}$ で

$$\nu - \mu = \sum_{i=1}^{n-1} k_i \alpha_i \in Q^+$$

なるものが存在したと仮定する. ここで $\omega_i := \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_i$ $(1 \le i \le n-1)$ とおくと

$$\langle \omega_i, \alpha_j \rangle = \delta_{i,j} \quad (1 \le i, j \le n-1)$$

が確かめられる. また, 任意の $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対し

$$\langle \omega_i, \lambda \rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \lambda_1 + \cdots + \lambda_i \quad (1 \le i \le n-1)$$

である. これらによって

$$0 \le k_i = \langle \omega_i, \nu - \mu \rangle = \nu_1 + \cdots + \nu_i - (\mu_1 + \cdots + \mu_i) \quad (1 \le i \le n-1)$$

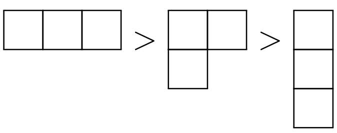
であるので $\mu \le \nu$ が成り立つ.

この逆が成り立つのは明らかで, $\mu \le \nu$ なる $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対し

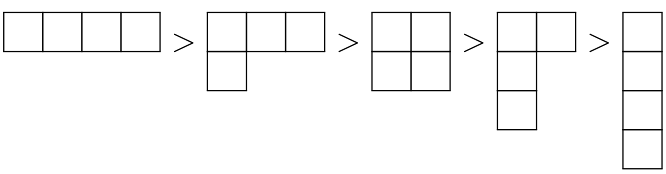
$$k_i := \nu_1 + \cdots + \nu_i - (\mu_1 + \cdots + \mu_i) \quad (1 \le i \le n-1)$$

とおくと $\nu - \mu = \sum_{i=1}^{n-1} k_i \alpha_i \in Q^+$ である. □

例 2.5. 分割については, 直感的には「Young 図形 λ の上の方にある箱を下の行に移したものが分割 μ になっている場合, $\lambda \ge \mu$ である」ことがいえる. 例えば大きさが 3 の Young 図形については



という具合である. 大きさが 4 の Young 図形に対しては



である．dominance order は全順序ではなく, 例えば

$$\lambda=(4,1,1)=\ydiagram{4,1,1}\,,\quad \mu=(3,3)=\ydiagram{3,3}$$

は dominance order の意味での大小が定まらない．この他,

$$\lambda=(3,1,1,1)=\ydiagram{3,1,1,1}\,,\quad \mu=(2,2,2)=\ydiagram{2,2,2}$$

などもそうである．

以下, dominance order について小さな多重指数から来る項を無視して, 例えば

$$m_\lambda(x)=\sum_{\substack{\mu\in\mathbb{N}^n\\ \mu\ \text{は}\ \lambda\ \text{の置換}}} x^\mu=x^\lambda+(\text{lower terms})\quad (\lambda\in\mathcal{P}_n)$$

などと書いたりする．これは次のように見ることもできる．多重指数 $\lambda,\ \mu\in\mathbb{N}^n$ について $\lambda\geq\mu$ であるとは, ある $k_1,\ldots,k_{n-1}\in\mathbb{N}$ があって

$$\lambda-\mu=\sum_{i=1}^{n-1}k_i\alpha_i$$

となることであった．ここで $\alpha_i=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}\ (1\leq i\leq n-1)$ であったが, 多重指数の記号を次のようにとらえ直してみる．$\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\varepsilon_i\in\mathbb{N}^n$ に対し, x^μ とは

$$x^\mu={x_1}^{\mu_1}\cdots{x_n}^{\mu_n}$$

のことであったが, これを素朴に

$$x^\mu=x^{\mu_1\varepsilon_1+\cdots+\mu_n\varepsilon_n}=(x^{\varepsilon_1})^{\mu_1}\cdots(x^{\varepsilon_n})^{\mu_n}$$

と書き, x^{ε_i} と x_i を同一視する．こうするとき, $\lambda-\mu=\sum_{i=1}^{n-1}k_i\alpha_i$ である $\lambda,\ \mu\in\mathbb{N}^n$ について

$$\begin{aligned}x^\mu&=x^{\lambda-k_1\alpha_1-\cdots-k_{n-1}\alpha_{n-1}}\\&=x^\lambda(x_2/x_1)^{k_1}\cdots(x_n/x_{n-1})^{k_{n-1}}\in\mathbb{C}[[x_2/x_1,\ldots,x_n/x_{n-1}]]x^\lambda\end{aligned}$$

とみなせる．ここで, 複素係数の $z_1,\ldots,z_n$ の形式冪級数の全体を $\mathbb{C}[[z_1,\ldots,z_n]]$ とした．よって, 例えば dominance order について一番大きな項のみを残し, 小さな項たちを無視するというのは, $x_1,\ldots,x_n$ の適当な函数を

$$\text{“}\,|x_1|\gg|x_2|\gg\cdots\gg|x_{n-1}|\gg|x_n|\,\text{”}$$

である領域で冪展開し, そうして現れる項のうち最も大きな項 (全く素朴な意味で) に注目することと同じである.

モノミアル対称多項式たち $\{m_\lambda(x)\}_{\lambda\in\mathcal{P}_n}$ は n 変数対称多項式の空間 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ の $\mathbb{C}$-基底であった. Macdonald 作用素は, 次の意味で都合のよい性質を持っている.

補題 2.6 (Macdonald 作用素 D_x の上三角性). Macdonald 作用素 D_x は, モノミアル対称多項式による基底 $\{m_\lambda(x)\}_{\lambda\in\mathcal{P}_n}$ について dominance order の意味で上三角性を持つ：各 $\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対し係数 $d^\lambda{}_\mu\in\mathbb{C}$ $(\mu\leq\lambda)$ がとれて

- $$D_x m_\lambda(x)=d^\lambda{}_\lambda m_\lambda(x)+\sum_{\substack{\mu\in\mathcal{P}_n\\ \mu<\lambda}} d^\lambda{}_\mu m_\mu(x).$$

証明. 最初に $D_x x^\mu$ $(\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)\in\mathbb{N}^n)$ を調べる. まず

$$D_x x^\mu=\sum_{i=1}^n\prod_{j\neq i}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}T_{q,x_i}x^\mu=\sum_{i=1}^n\prod_{j\neq i}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}q^{\mu_i}x^\mu$$

であるが, i についての和の中の有理函数 $\displaystyle\prod_{j\neq i}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}$ を

$$|x_1|\gg|x_2|\gg\cdots\gg|x_{n-1}|\gg|x_n|$$

なる領域で冪展開して $\mathbb{C}[[x_2/x_1,\ldots,x_n/x_{n-1}]]$ の元とみなすとき

$$\begin{aligned}\prod_{j\neq i}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}&=\prod_{j<i}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}\prod_{j>i}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}=\prod_{j<i}\frac{1-tx_i/x_j}{1-x_i/x_j}\prod_{j>i}t\cdot\frac{1-x_j/tx_i}{1-x_j/x_i}\\&=\{1+(\text{lower terms})\}\cdot t^{n-i}\{1+(\text{lower terms})\}\\&=t^{n-i}+(\text{lower terms})\end{aligned}$$

とできる. よって

$$D_x x^\mu=\sum_{i=1}^n q^{\mu_i}t^{n-i}x^\mu+(\text{lower terms})$$

がわかる. これより, 分割 $\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対し $m_\lambda(x)=x^\lambda+(\text{lower terms})$ であることから

$$D_x m_\lambda(x)=D_x x^\lambda+(\text{lower terms})=\sum_{i=1}^n q^{\lambda_i}t^{n-i}x^\lambda+(\text{lower terms})$$

である. ここで $\displaystyle d_\lambda:=\sum_{i=1}^n q^{\lambda_i}t^{n-i}$ とおくとき,

$$D_x m_\lambda(x)-d_\lambda m_\lambda(x)=(\text{lower terms})$$

は対称多項式で (D_x が $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ に作用するので), モノミアル対称多項式たち $\{m_\lambda(x)\}_{\lambda\in\mathcal{P}_n}$ が対称多項式の空間 $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ の基底であることを思い起こすと, 有限個の係数 ${d^\lambda}_\mu\in\mathbb{C}$ $(\mu<\lambda)$ を適当に選んで

$$D_x m_\lambda(x)=d_\lambda m_\lambda(x)+\sum_{\mu<\lambda}{d^\lambda}_\mu m_\mu(x)$$

とできる (${d^\lambda}_\lambda:=d_\lambda$ とおけば上に述べた命題と同じ格好になる). □

以上のことから, 各 $\lambda\in\mathcal{P}_n$ について, Macdonald 作用素 D_x は

$$V_\lambda:=\bigoplus_{\substack{\mu\in\mathcal{P}_n\\ \mu\leq\lambda}}\mathbb{C}m_\mu(x)\quad(\leftarrow \text{これは有限次元})$$

を不変に保つ. D_x を V_λ に作用する $\mathbb{C}$-線型写像とみなして行列表示すると, あるサイズの上三角行列が現れる ("上三角性" とはこういう意味である). その固有値が

$$d_\mu=\sum_{i=1}^{n}q^{\mu_i}t^{n-i}\quad(\mu\leq\lambda)$$

であることもわかった. q, t を十分に "generic" にとれば, $\mu\neq\nu$ なる分割 μ, $\nu\in\mathcal{P}_n$ に対しては $d_\mu\neq d_\nu$ となるようにできる. よって,

「固有値がすべて相異なる正方行列は対角化できる」

ことから, q, t が十分に generic にとられている場合, Macdonald 作用素 D_x は V_λ において対角化できる. そうするときの D_x の固有値 d_λ の固有ベクトルとして Macdonald 多項式 $P_\lambda(x;q,t)$ が定義できる.

定理 2.7 (Macdonald 多項式). q, t は generic にとられているとする. 任意の $\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対し, 次の条件を満たす $P_\lambda(x;q,t)\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ がただ 1 つ存在する :

(1) $P_\lambda(x;q,t)$ は次の展開を持つ : 係数 ${u^\lambda}_\mu\in\mathbb{C}$ $(\mu<\lambda)$ がただ 1 組存在して

$$P_\lambda(x;q,t)=m_\lambda(x)+\sum_{\substack{\mu\in\mathcal{P}_n\\ \mu<\lambda}}{u^\lambda}_\mu m_\mu(x).$$

(2) $D_xP_\lambda(x;q,t)=d_\lambda P_\lambda(x;q,t)$ が成り立つ.

これらによって特徴づけられる対称多項式 $P_\lambda(x;q,t)$ を Macdonald 多項式と呼ぶ.

第 0 章でそうしていたように, 基礎体を $\mathbb{C}$ から $\mathbb{Q}(q,t)$ に変更して

$$\mathbb{Q}(q,t)[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$$

において Macdonald 作用素 D_x の性質や Macdonald 多項式の存在に関わる話を進めてもよいことがわかる．よって

$$P_\lambda(x;q,t)\in\mathbb{Q}(q,t)[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$$

とみなすこともできる．

2.2　Macdonald 多項式の具体例

ここでは, Macdonald 多項式を簡単な場合に具体的に求めることを考える．以下, q, t を明記する必要がない場合には, Macdonald 多項式を $P_\lambda(x)$ と書く．

例 2.8. 1 列型の Young 図形である

$$\lambda=(\overbrace{1,\ldots,1}^{r\text{ 個}},0,\ldots,0)=\underbrace{\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}}_{\text{縦に } r \text{ 個}}\in\mathcal{P}_n\quad(r\leq n)$$

に付随する Macdonald 多項式は, Macdonald 多項式の性質から

$$P_{\underbrace{\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}}_{\text{縦に } r \text{ 個}}}(x)=m_{\underbrace{\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}}_{\text{縦に } r \text{ 個}}}(x)+\underbrace{(\text{lower terms})}_{\text{ない}}=m_{\underbrace{\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}}_{\text{縦に } r \text{ 個}}}(x)=e_r(x)\quad(\leftarrow\text{ 基本対称式})$$

である．このとき

$$D_xP_{\underbrace{\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}}_{\text{縦に } r \text{ 個}}}(x)=d_{\underbrace{\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}}_{\text{縦に } r \text{ 個}}}P_{\underbrace{\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}}_{\text{縦に } r \text{ 個}}}(x)$$

であるが, この固有値 $d_{\underbrace{\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}}_{\text{縦に } r \text{ 個}}}$ は

$$d_{\underbrace{\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}}_{\text{縦に } r \text{ 個}}}=\sum_{i=1}^{r}q^rt^{n-i}+\sum_{i=r+1}^{n}t^{n-i}=q^rt^{n-r}\cdot\frac{1-t^r}{1-t}+\frac{1-t^{n-r}}{1-t}$$

である．これらの内容は

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}e_r(x_1,\ldots,\overbrace{qx_i}^{i\text{ 番目}},\ldots,x_n)=d_{\underbrace{\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}}_{\text{縦に } r \text{ 個}}}e_r(x_1,\ldots,x_n)$$

という函数等式が成り立つことを意味するが, これは一見すると明らかではない. 実は, これが成り立つことの背後には

$$\bullet \ \sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}=\frac{1-t^n}{1-t}$$

という恒等式がある. これを示す方法はいくつか存在するが, ここでは対称多項式の話題らしい証明を紹介する.

まず次が成り立つことは既に知っている：

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{T_{t,x_i}\Delta(x)}{\Delta(x)}=\frac{1}{\Delta(x)}\sum_{i=1}^{n}T_{t,x_i}\Delta(x).$$

ここで差積 $\Delta(x)=\det\bigl[{x_i}^{n-j}\bigr]_{1\leq i,j\leq n}$ を行列式として素朴に展開する. 分割 $\delta\in\mathcal{P}_n$ の第 i 成分を $\delta_i=n-i$ と書くと

$$\Delta(x)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^{n}{x_{\sigma(k)}}^{\delta_k}=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^{n}{x_k}^{\delta_{\sigma^{-1}(k)}}=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^{n}{x_k}^{\delta_{\sigma(k)}}$$

である. これより

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta(x)}\sum_{i=1}^{n}T_{t,x_i}\Delta(x)&=\frac{1}{\Delta(x)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)t^{\delta_{\sigma(i)}}\prod_{k=1}^{n}{x_k}^{\delta_{\sigma(k)}}\\&=\frac{1}{\Delta(x)}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\left(\sum_{i=1}^{n}t^{\delta_{\sigma(i)}}\right)\prod_{k=1}^{n}{x_k}^{\delta_{\sigma(k)}}\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ が何であれ

$$\sum_{i=1}^{n}t^{\delta_{\sigma(i)}}=\sum_{i=1}^{n}t^{\delta_i}=\sum_{i=1}^{n}t^{n-i}=\frac{1-t^n}{1-t}$$

が成り立つことに注意すると

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}=\frac{1}{\Delta(x)}\sum_{i=1}^{n}T_{t,x_i}\Delta(x)=\frac{1}{\Delta(x)}\cdot\frac{1-t^n}{1-t}\underbrace{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^{n}{x_k}^{\delta_{\sigma(k)}}}_{\Delta(x)}=\frac{1-t^n}{1-t}$$

がわかる. このような「n 変数の有理函数であると思われたものが, 実は簡単な定数になる」という風な恒等式が, Macdonald 多項式の理論においてうまく働いている.

補題 2.9. 多重指数 $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)\in\mathbb{N}^n$ に対し $\Delta_\mu(x):=\det[{x_i}^{\mu_j}]_{1\leq i,j\leq n}$ とおくとき

$$\sum_{i=1}^{n}T_{q,x_i}\Delta_\mu(x)=\sum_{i=1}^{n}q^{\mu_i}\Delta_\mu(x).$$

証明. $\Delta_\mu(x)$ を素朴に展開すると

$$\Delta_\mu(x)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^{n}x_{\sigma(k)}{}^{\mu_k}=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^{n}x_k{}^{\mu_{\sigma^{-1}(k)}}=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^{n}x_k{}^{\mu_{\sigma(k)}}$$

なので, これに $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}T_{q,x_i}$ を当てると

$$\sum_{i=1}^{n}T_{q,x_i}\Delta_\mu(x)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\underbrace{\sum_{i=1}^{n}q^{\mu_{\sigma(i)}}}_{\sum_{i=1}^{n}q^{\mu_i}}\prod_{k=1}^{n}x_k{}^{\mu_{\sigma(k)}}=\sum_{i=1}^{n}q^{\mu_i}\Delta_\mu(x).\quad\square$$

例 2.10. $t=1$ の場合の Macdonald 作用素は $D_x^{t=1}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}T_{q,x_i}$ であるが, ここで

$$D_x^{t=1}m_\lambda(x)=\sum_{\mu\in\mathfrak{S}_n.\lambda}D_x^{t=1}x^\mu=\sum_{\mu\in\mathfrak{S}_n.\lambda}\sum_{i=1}^{n}T_{q,x_i}x^\mu=\sum_{\mu\in\mathfrak{S}_n.\lambda}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}q^{\mu_i}}_{\sum_{i=1}^{n}q^{\lambda_i}}x^\mu=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}q^{\lambda_i}}_{d_\lambda^{t=1}}m_\lambda(x)$$

なので $P_\lambda(x;q,1)=m_\lambda(x)$ がわかる.

例 2.11. $t=q$ の場合の Macdonald 作用素 $D_x^{t=q}$ は

$$D_x^{t=q}=\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{qx_i-x_j}{x_i-x_j}T_{q,x_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{T_{q,x_i}\Delta(x)}{\Delta(x)}T_{q,x_i}$$

である. このとき, 任意の対称多項式 $f\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ に対し

$$D_x^{t=q}f=\frac{1}{\Delta(x)}\sum_{i=1}^{n}T_{q,x_i}\Delta(x)\cdot T_{q,x_i}f=\frac{1}{\Delta(x)}\sum_{i=1}^{n}T_{q,x_i}(\Delta(x)f)$$

が成り立つ. 特に $D_x^{t=q}$ を Schur 函数 $s_\lambda(x)=\dfrac{1}{\Delta(x)}\det\left[x_i{}^{\lambda_j+\delta_j}\right]_{1\le i,j\le n}$ に当てると

$$D_x^{t=q}s_\lambda(x)=\frac{1}{\Delta(x)}\sum_{i=1}^{n}T_{q,x_i}\left(\det\left[x_i{}^{\lambda_j+\delta_j}\right]_{1\le i,j\le n}\right)=\sum_{i=1}^{n}q^{\lambda_i+\delta_i}s_\lambda(x)$$

がわかる (補題 2.9 を用いた). よって $P_\lambda(x;q,q)=s_\lambda(x)$ である.

命題 2.12. 任意の $\lambda\in\mathcal{P}_n$ と $\ell\in\mathbb{N}$ に対し

$$(x_1\cdots x_n)^\ell P_\lambda(x)=P_{\lambda+(\ell^n)}(x)$$

が成り立つ ((ℓ^n) は ℓ 個の箱から成る行が n 個重なってできる長方形 Young 図形である).

証明. まず, $(x_1\cdots x_n)^\ell P_\lambda(x)$ について

$$D_x(x_1\cdots x_n)^\ell P_\lambda(x)=d_{\lambda+(\ell^n)}(x_1\cdots x_n)^\ell P_\lambda(x)\quad(\lambda\in\mathcal{P}_n,\,\ell\in\mathbb{N})$$

が成り立つことが確かめられる. これより, $(x_1\cdots x_n)^\ell P_\lambda(x)$ は $P_{\lambda+(\ell^n)}(x)$ のスカラー倍であるが (標語的に述べると「Macdonald 作用素 D_x の固有空間は 1 次元だから」), モノミアル対称多項式について

$$(x_1\cdots x_n)^\ell m_\lambda(x)=m_{\lambda+(\ell^n)}(x)\quad(\lambda\in\mathcal{P}_n,\,\ell\in\mathbb{N})$$

が成り立つことから $(x_1\cdots x_n)^\ell P_\lambda(x)=P_{\lambda+(\ell^n)}(x)$ がわかる. □

2.3 q-2 項定理

後に q-2 項定理と呼ばれる命題を使うので, ここで関連する事柄と合わせて解説しておく. 第 0 章で少し触れた q-無限積や q-shifted factorial について振り返っておく. $|q|<1$ である複素数 q と $x\in\mathbb{C}$ に対し

- $$(x;q)_\infty:=\prod_{n\geq 0}(1-xq^n)$$

とおき, q-無限積と呼ぶ. これについて

$$(qx;q)_\infty=\frac{(x;q)_\infty}{1-x}$$

が成り立つ. これが成り立つのは

$$(qx;q)_\infty=(1-xq)\bigl(1-xq^2\bigr)\bigl(1-xq^3\bigr)\cdots=\frac{1}{1-x}(1-x)(1-xq)\bigl(1-xq^2\bigr)\bigl(1-xq^3\bigr)\cdots=\frac{(x;q)_\infty}{1-x}$$

からわかる. また

$$(x;q)_n:=\frac{(x;q)_\infty}{(q^nx;q)_\infty}=(1-x)(1-xq)\cdots\bigl(1-xq^{n-1}\bigr)\quad(n\in\mathbb{N})$$

を q-shifted factorial と呼ぶ.

命題 2.13 (q-2 項定理)**.** $|q|<1$ なる複素数 q と $a\in\mathbb{C}$ に対し次が成り立つ：

$$\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}x^n\quad(|x|<1).$$

証明. 有理型函数 $\dfrac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$ の極の全体は $\bigl\{q^{-k}\in\mathbb{C}\bigm| k\in\mathbb{N}\bigr\}$ である (これらの極はみな 1 位である). よって, $\dfrac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$ は $|x|<1$ において正則である. また $\dfrac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$ は次の q-差分方程式の解である：

$$(1-ax)f(qx)=(1-x)f(x),\quad f(0)=1.$$

そこで, この q-差分方程式の解のうち $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ なる冪級数で $c_0=1$ を満たすものを求めることを考える. これを $(1-ax)f(qx)=(1-x)f(x)$ に代入すると

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n c_n x^n - a\sum_{n=0}^{\infty} q^n c_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$$

であるが, この両辺の x の冪が等しい項の係数を比較すると

$$q^n c_n - aq^{n-1} c_{n-1} = c_n - c_{n-1} \Leftrightarrow c_n = \frac{1-aq^{n-1}}{1-q^n} c_{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z}_{>0})$$

がわかる. この漸化式は

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1-aq^{n-1}}{1-q^n} c_{n-1} = \frac{(1-aq^{n-1})(1-aq^{n-2})}{(1-q^n)(1-q^{n-1})} c_{n-2} = \frac{(1-aq^{n-1})(1-aq^{n-2})(1-aq^{n-3})}{(1-q^n)(1-q^{n-1})(1-q^{n-2})} c_{n-3} \\ &= \cdots = \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} c_0 = \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} \end{aligned}$$

と解くことができる. こうして $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} x^n$ なる冪級数解が得られた. 右辺の冪級数の収束半径が 1 であることも実際に確かめられる. 以上のことと「収束する冪級数は収束領域において正則な函数を定める」ことから,

「q-差分方程式 $(1-ax)f(qx)=(1-x)f(x)$ の解のうち, $|x|<1$ において正則で $f(0)=1$ を満たすものは $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} x^n$ しかない」

ことがわかったので, $\dfrac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$ と $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} x^n$ は $|x|<1$ において一致することがわかる :

$$\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} x^n \quad (|x|<1). \quad \square$$

上の命題が “q-2 項定理” と呼ばれるのには次の理由がある. まず (一般化された) 2 項定理と呼ばれる次の命題がある : $b \in \mathbb{C}$ に対し $(b)_0 := 1$, $(b)_n := b(b+1)(b+2)\cdots(b+n-1)$ $(n \in \mathbb{Z}_{>0})$ とおくとき

$$(1-x)^{-b} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} x^n \quad (|x|<1).$$

一方, q-2 項定理 $\dfrac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} x^n$ に現れている $\dfrac{(a;q)_n}{(q;q)_n}$ について, $a=q^b$ とおくと

$$\frac{(q^b;q)_n}{(q;q)_n} = \frac{1-q^b}{1-q} \cdot \frac{1-q^{b+1}}{1-q^2} \cdot \frac{1-q^{b+2}}{1-q^3} \cdots \frac{1-q^{b+n-1}}{1-q^n} \xrightarrow[q \to 1]{} \frac{(b)_n}{n!}$$

がわかる. これらのことによって, q-2 項定理は 2 項定理の q-変形であることがわかる.

2.4　2 変数の場合の Macdonald 作用素の固有函数

$\lambda \in \mathcal{P}_2$ に付随する 2 変数の場合の Macdonald 多項式は, 定義によって

$$P_\lambda(x_1, x_2) = \sum_{\substack{\mu \in \mathbb{N}^2 \\ \mu \leq \lambda}} a_\mu x^\mu$$

なる展開を持つ. dominance order の性質から, $\mu \leq \lambda$ なる λ, $\mu \in \mathbb{N}^2$ について, ある $k \in \mathbb{N}$ があって $\lambda - \mu = k\alpha_1$ である $(\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = (1, -1))$. このとき

$$x^\mu = x^{\lambda - k\alpha_1} = x^\lambda (x_2/x_1)^k$$

である. よって, 2 変数の場合の Macdonald 多項式は

$$P_\lambda(x_1, x_2) = {x_1}^{\lambda_1} {x_2}^{\lambda_2} \sum_{k \geq 0} c_k (x_2/x_1)^k \quad (\leftarrow \text{有限和})$$

なる展開を持つ. そこで, Macdonald 作用素 D_x の固有函数のうち

$$\varphi(x_1, x_2) = {x_1}^{\lambda_1} {x_2}^{\lambda_2} \sum_{k \geq 0} c_k (x_2/x_1)^k$$

なる形式冪級数によって表されるものを求めることを考える. また, λ_1, λ_2 は分割の成分とは限らない一般の複素数としておく.

形式冪級数 $\varphi(x_1, x_2) = {x_1}^{\lambda_1} {x_2}^{\lambda_2} \sum_{k \geq 0} c_k (x_2/x_1)^k$ とある複素数 ε があって

$$D_x \varphi(x_1, x_2) = \varepsilon \varphi(x_1, x_2)$$

が成り立つと仮定する. $f(z) = \sum_{k \geq 0} c_k z^k$ とおくとき, これが成り立つことと

$$\begin{aligned} & q^{\lambda_1} \frac{t - z}{1 - z} f\left(q^{-1} z\right) + q^{\lambda_2} \frac{tz - 1}{z - 1} f(qz) = \varepsilon f(z) \\ \Leftrightarrow\ & q^{\lambda_1} (t - z) f\left(q^{-1} z\right) + q^{\lambda_2} (1 - tz) f(qz) = \varepsilon (1 - z) f(z) \end{aligned}$$

が成り立つことは同値である. これを

$$\begin{aligned} & q^{\lambda_1} t \sum_{k \geq 0} q^{-k} c_k z^k - q^{\lambda_1} \sum_{k \geq 0} q^{-k} c_k z^{k+1} + q^{\lambda_2} \sum_{k \geq 0} q^k c_k z^k - q^{\lambda_2} t \sum_{k \geq 0} q^k c_k z^{k+1} \\ = {} & \varepsilon \sum_{k \geq 0} c_k z^k - \varepsilon \sum_{k \geq 0} c_k z^{k+1} \end{aligned}$$

としておき, z の冪の等しい項の係数を比較することで

- $\left(q^{\lambda_1 - k} t + q^{\lambda_2 + k} - \varepsilon\right) c_k = \left(q^{\lambda_1 - k + 1} + q^{\lambda_2 + k - 1} t - \varepsilon\right) c_{k-1} \quad (k \in \mathbb{Z}_{>0})$,
- $\left(q^{\lambda_1} t + q^{\lambda_2}\right) c_0 = \varepsilon c_0$

がわかる．ここで $c_0=1$ とおくと $\varepsilon=q^{\lambda_1}t+q^{\lambda_2}$ がわかる．これと

- $q^{\lambda_1-k}t+q^{\lambda_2+k}-q^{\lambda_1}t-q^{\lambda_2}=\left(q^{\lambda_1-k}t-q^{\lambda_2}\right)\left(1-q^k\right)$,
- $q^{\lambda_1-k+1}+q^{\lambda_2+k-1}t-q^{\lambda_1}t-q^{\lambda_2}=\left(q^{\lambda_1-k+1}-q^{\lambda_2}\right)\left(1-q^{k-1}t\right)$

から, 係数 c_k の漸化式は

$$c_k=\frac{\left(q^{\lambda_1-k+1}-q^{\lambda_2}\right)\left(1-q^{k-1}t\right)}{\left(q^{\lambda_1-k}t-q^{\lambda_2}\right)\left(1-q^k\right)}c_{k-1}=\frac{\left(1-q^{\lambda_2-\lambda_1+k-1}\right)\left(1-q^{k-1}t\right)}{\left(1-q^{\lambda_2-\lambda_1+k}t^{-1}\right)\left(1-q^k\right)}qt^{-1}c_{k-1}$$

となる．この漸化式は

$$c_k=\frac{\left(q^{\lambda_2-\lambda_1};q\right)_k(t;q)_k}{\left(q^{\lambda_2-\lambda_1+1}t^{-1};q\right)_k(q;q)_k}\left(qt^{-1}\right)^k$$

と解ける．以上によって

$$\begin{aligned}\varphi(x_1,x_2)&={x_1}^{\lambda_1}{x_2}^{\lambda_2}f(x_2/x_1)={x_1}^{\lambda_1}{x_2}^{\lambda_2}\sum_{k\geq 0}\frac{\left(q^{\lambda_2-\lambda_1};q\right)_k(t;q)_k}{\left(q^{\lambda_2-\lambda_1+1}t^{-1};q\right)_k(q;q)_k}\left(qt^{-1}\right)^k(x_2/x_1)^k\\&={x_1}^{\lambda_1}{x_2}^{\lambda_2}\phi\left(\begin{matrix}q^{\lambda_2-\lambda_1},t\\q^{\lambda_2-\lambda_1+1}t^{-1}\end{matrix};q,qx_2/tx_1\right)\end{aligned}$$

がわかった．ここで q-超幾何級数を次によって定めた：

$$\phi\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};q,z\right):=\sum_{k\geq 0}\frac{(a;q)_k(b;q)_k}{(c;q)_k(q;q)_k}z^k.$$

上で得られた Macdonald 作用素 D_x の固有函数は形式冪級数の格好をしていたが, これは (λ_1,λ_2) が分割であるときには有限和になる．実際, この場合には $k\geq\lambda_1-\lambda_2+1$ なる $k\in\mathbb{N}$ に対し $\left(q^{\lambda_2-\lambda_1};q\right)_k=0$ なので

$$\varphi(x_1,x_2)={x_1}^{\lambda_1}{x_2}^{\lambda_2}\sum_{k=0}^{\lambda_1-\lambda_2}\frac{\left(q^{\lambda_2-\lambda_1};q\right)_k(t;q)_k}{\left(q^{\lambda_2-\lambda_1+1}t^{-1};q\right)_k(q;q)_k}\left(qt^{-1}\right)^k(x_2/x_1)^k$$

となる．特に $\ell\in\mathbb{N}$ によって $\lambda=(\ell,0)$ と表される場合は

$$\begin{aligned}\varphi(x_1,x_2)&={x_1}^{\ell}\sum_{k=0}^{\ell}\frac{\left(q^{-\ell};q\right)_k(t;q)_k}{\left(q^{-\ell+1}t^{-1};q\right)_k(q;q)_k}\left(qt^{-1}\right)^k(x_2/x_1)^k\\&=\sum_{k=0}^{\ell}\prod_{m=0}^{k-1}\frac{1-q^{\ell-m}}{1-q^{-1}tq^{\ell-m}}\cdot\frac{(t;q)_k}{(q;q)_k}{x_1}^{\ell-k}{x_2}^k\\&=\sum_{k=0}^{\ell}\prod_{m=\ell-k+1}^{\ell}\frac{1-q^m}{1-tq^{m-1}}\cdot\frac{(t;q)_k}{(q;q)_k}{x_1}^{\ell-k}{x_2}^k\\&=\frac{(q;q)_\ell}{(t;q)_\ell}\sum_{k=0}^{\ell}\frac{(t;q)_{\ell-k}(t;q)_k}{(q;q)_{\ell-k}(q;q)_k}{x_1}^{\ell-k}{x_2}^k=\frac{(q;q)_\ell}{(t;q)_\ell}\sum_{\substack{\mu_1,\mu_2\geq 0\\\mu_1+\mu_2=\ell}}\frac{(t;q)_{\mu_1}(t;q)_{\mu_2}}{(q;q)_{\mu_1}(q;q)_{\mu_2}}{x_1}^{\mu_1}{x_2}^{\mu_2}\end{aligned}$$

となることがわかる.

ここで見たような「Macdonald 作用素の固有函数のうち, 形式冪級数のものを求める話」を, 変数の個数が一般の場合に行っているのが次の論文である：

- M. Noumi, J. Shiraishi "A direct approach to the bispectral problem for the Ruijsenaars-Macdonald q-difference operators" (arXiv preprint arXiv:1206.5364 (2012))

2.5 1 行の分割に付随する Macdonald 多項式

今度は変数の個数が一般の場合の 1 行型の分割に付随する Macdonald 多項式について考える (以下, "1 行型の Macdonald 多項式" などと表現する). Schur 函数のタブロー表示によれば, 1 行型の Schur 函数は完全同次対称式 $h_k(x)$ なのであった：

$$s_{\underbrace{\square\square\square\square\square}_{k\text{ 個}}}(x)=h_k(x)=\sum_{1\le i_1\le\cdots\le i_k\le n} x_{i_1}\cdots x_{i_k}.$$

また, 完全同次対称式 $h_k(x)$ は次の $H(x;u)$ を生成母函数に持っていた：

$$H(x;u)=\frac{1}{(1-x_1u)\cdots(1-x_nu)}=\sum_{k\ge 0}h_k(x)u^k.$$

そこで, この $H(x;u)$ の適当な q-変形を用意し, その展開の係数として 1 行型の Macdonald 多項式を得ることを試みる. 以下では, $H(x;u)$ の q-変形として

$$\Phi(x,y):=\prod_{i=1}^{n}\frac{(tx_iy;q)_\infty}{(x_iy;q)_\infty}\quad\left(\leftarrow x=(x_1,\ldots,x_n)\text{ は }n\text{ 変数, }y\text{ は 1 変数}\right)$$

を調べる (後々のために, 展開のための文字 u を y に変えた).

なぜこの $\Phi(x,y)$ を $H(x;y)$ の q-変形であると思うのかについてであるが, $t=q^\beta$ とおいて $q\to 1$ とすると

$$\Phi(x,y)\xrightarrow[q\to 1]{t=q^\beta}\prod_{i=1}^{n}(1-x_iy)^{-\beta}=H(x;y)^{-\beta}$$

が成り立つからである. これは次のようにして確かめられる：

$$\begin{aligned}\Phi(x,y)&=\prod_{i=1}^{n}\frac{(tx_iy;q)_\infty}{(x_iy;q)_\infty}=\prod_{i=1}^{n}\exp\left(\sum_{k>0}\frac{1-q^{\beta k}}{1-q^k}\cdot\frac{(x_iy)^k}{k}\right)\\&\xrightarrow[q\to 1]{}\prod_{i=1}^{n}\exp\left(\beta\sum_{k>0}\frac{(x_iy)^k}{k}\right)=\prod_{i=1}^{n}(1-x_iy)^{-\beta}=H(x;y)^{-\beta}.\end{aligned}$$

用意した函数 $\Phi(x,y)$ を y について展開することを考える. q-2 項定理を使うと

$$\Phi(x,y)=\prod_{i=1}^{n}\frac{(tx_iy;q)_\infty}{(x_iy;q)_\infty}=\prod_{i=1}^{n}\sum_{\mu_i\ge 0}\frac{(t;q)_{\mu_i}}{(q;q)_{\mu_i}}{x_i}^{\mu_i}y^{\mu_i}=\sum_{\ell\ge 0}y^\ell\sum_{\substack{\mu_1,\ldots,\mu_n\ge 0\\ \mu_1+\cdots+\mu_n=\ell}}\prod_{i=1}^{n}\frac{(t;q)_{\mu_i}}{(q;q)_{\mu_i}}{x_1}^{\mu_1}\cdots{x_n}^{\mu_n}$$

とできる. よって, 以下で問題になるのは

$$Q_{(\ell)}(x) := \sum_{\substack{\mu_1,\ldots,\mu_n\geq 0\\ \mu_1+\cdots+\mu_n=\ell}} \prod_{i=1}^{n} \frac{(t;q)_{\mu_i}}{(q;q)_{\mu_i}} {x_1}^{\mu_1}\cdots {x_n}^{\mu_n}$$

は 1 行型の Macdonald 多項式であるのか？ということである.

仮に, 上の $Q_{(\ell)}(x)$ が 1 行の分割 (ℓ) に付随する Macdonald 多項式であるとすると

$$D_x Q_{(\ell)}(x) = \left(q^\ell t^{n-1} + \frac{1-t^{n-1}}{1-t}\right) Q_{(\ell)}(x)$$

であるが, これを使うと

$$\begin{aligned} D_x\Phi(x,y) &= \sum_{\ell\geq 0} D_x Q_{(\ell)}(x) y^\ell = \sum_{\ell\geq 0}\left(q^\ell t^{n-1} + \frac{1-t^{n-1}}{1-t}\right) Q_{(\ell)}(x) y^\ell \\ &= \sum_{\ell\geq 0} Q_{(\ell)}(x)\left(t^{n-1}T_{q,y} + \frac{1-t^{n-1}}{1-t}\right) y^\ell = \left(t^{n-1}T_{q,y} + \frac{1-t^{n-1}}{1-t}\right)\Phi(x,y) \end{aligned}$$

となる. ここに述べてきたことの逆も正しいことに注意する：$\Phi(x,y)$ が函数等式

$$D_x\Phi(x,y) = \left(t^{n-1}T_{q,y} + \frac{1-t^{n-1}}{1-t}\right)\Phi(x,y)$$

を満たす場合, $\Phi(x,y)$ を

$$\Phi(x,y) = \sum_{\ell\geq 0} Q_{(\ell)}(x) y^\ell$$

と展開するときに現れる $Q_{(\ell)}(x)$ は 1 行型の Macdonald 多項式である.

では実際にはどうなのか？ということであるが, この $\Phi(x,y)$ は上の函数等式を実際に満たすことがわかる.

命題 2.14. 函数 $\Phi(x,y) = \prod_{i=1}^{n} \frac{(tx_i y;q)_\infty}{(x_i y;q)_\infty}$ は次の函数等式を満たす：

$$D_x\Phi(x,y) = \left(t^{n-1}T_{q,y} + \frac{1-t^{n-1}}{1-t}\right)\Phi(x,y).$$

証明. 証明は部分分数分解による. 詳細は第 6 章「付録」の 6.1 節「部分分数分解」において述べるが, $x_1,\ldots,x_n$ を互いに相異なる複素数とみなすとき, z の有理函数としての次の恒等式が成り立つ：

- $$\prod_{i=1}^{n} \frac{1-x_i z}{1-tx_i z} = \frac{1-t}{1-t^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1-t^{-n+1}x_i z}{1-tx_i z} \prod_{j\neq i} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j}.$$

これを知っていると, $D_x\Phi(x,y)$ を次のように変形できる：

$$
\begin{aligned}
D_x\Phi(x,y)&=\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}T_{q,x_i}\Phi(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}\cdot\frac{1-x_iy}{1-tx_iy}\Phi(x,y)\\
&=t^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{t^{-n+1}-1+1-t^{-n+1}x_iy}{1-tx_iy}\prod_{j\neq i}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}\Phi(x,y)\\
&=\left\{t^{n-1}\cdot\frac{1-t^n}{1-t}\prod_{i=1}^{n}\frac{1-x_iy}{1-tx_iy}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1-t^{n-1}}{1-tx_iy}\prod_{j\neq i}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}\right\}\Phi(x,y)\\
&=\left\{t^{n-1}T_{q,y}+t^{n-1}\cdot\frac{t-t^n}{1-t}\prod_{i=1}^{n}\frac{1-x_iy}{1-tx_iy}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1-t^{n-1}}{1-tx_iy}\prod_{j\neq i}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}\right\}\Phi(x,y)\\
&=\left\{t^{n-1}T_{q,y}+t^{n}\cdot\frac{1-t^{n-1}}{1-t^n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1-t^{-n+1}x_iy}{1-tx_iy}\prod_{j\neq i}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1-t^{n-1}}{1-tx_iy}\prod_{j\neq i}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}\right\}\Phi(x,y)\\
&=\left\{t^{n-1}T_{q,y}+\frac{1-t^{n-1}}{1-t^n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}\right\}\Phi(x,y)\\
&=\left(t^{n-1}T_{q,y}+\frac{1-t^{n-1}}{1-t}\right)\Phi(x,y).\quad\square
\end{aligned}
$$

上の函数等式は, Macdonald 作用素の核函数 (kernel function) の満たす函数等式の特別な場合である．このことについては, 例えば次の論文を参照してほしい：

- Y. Komori, M. Noumi, J. Shiraishi "Kernel functions for difference operators of Ruijsenaars type and their applications" (SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications 5 (2009): 054)

Macdonald 多項式は次の性質を持っている：$\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対し

- $P_\lambda(x_1,\dots,x_{n-1},0)=\begin{cases}0 & (\lambda_n>0),\\ P_\lambda(x_1,\dots,x_{n-1}) & (\lambda_n=0).\end{cases}$

これは次のようにしてわかる．まず, モノミアル対称多項式が同様の性質である

$$m_\lambda(x_1,\dots,x_{n-1},0)=\begin{cases}0 & (\lambda_n>0),\\ m_\lambda(x_1,\dots,x_{n-1}) & (\lambda_n=0).\end{cases}$$

を満たしていたことに注意する．これと, Macdonald 多項式が

$$\text{“}P_\lambda(x)=m_\lambda(x)+\sum_{\mu<\lambda}c^\lambda{}_\mu m_\mu(x)\text{”}$$

なる展開を持つことから, $\lambda\in\mathcal{P}_n$ で $\lambda_n>0$ なるものについて $P_\lambda(x_1,\dots,x_{n-1},0)=0$ であることはわかる．残るは $\lambda_n=0$ の場合であるが, この場合には $P_\lambda(x_1,\dots,x_{n-1},0)$ が Macdonald 多項式を特徴づける 2 つの条件を満たすことを確かめればよい．すなわち, $P_\lambda(x_1,\dots,x_{n-1},0)$ がモノミアル対

称多項式たち $\{m_\mu(x)\}_{\mu\leq\lambda}^{\mu\in\mathcal{P}_{n-1}}$ で展開されること, $(n{-}1)$ 変数の Macdonald 作用素 $\overset{(n-1)\text{ 変数}}{D_x}$ の固有函数になっていること見ればよい. $\lambda\in\mathcal{P}_n$ で $\lambda_n{=}0$ なるものを 1 つとる. このとき, Macdonald 多項式 $P_\lambda(x)$ がある係数 $c^\lambda{}_\mu\in\mathbb{C}$ $(\mu{<}\lambda)$ によって

$$P_\lambda(x){=}m_\lambda(x){+}\sum_{\substack{\mu\in\mathcal{P}_n\\ \mu<\lambda}}c^\lambda{}_\mu m_\mu(x)$$

と表示されるとする. ここで $x_n{=}0$ とおくと, モノミアル対称多項式の性質から

$$\begin{aligned}P_\lambda(x_1,\ldots,x_{n-1},0)&{=}m_\lambda(x_1,\ldots,x_{n-1},0){+}\sum_{\substack{\mu\in\mathcal{P}_n\\ \mu<\lambda}}c^\lambda{}_\mu m_\mu(x_1,\ldots,x_{n-1},0)\\ &{=}m_\lambda(x_1,\ldots,x_{n-1}){+}\sum_{\substack{\mu\in\mathcal{P}_n\\ \mu<\lambda,\,\mu_n=0}}c^\lambda{}_\mu m_\mu(x_1,\ldots,x_{n-1})\\ &{=}m_\lambda(x_1,\ldots,x_{n-1}){+}\sum_{\substack{\mu\in\mathcal{P}_{n-1}\\ \mu<\lambda}}c^\lambda{}_\mu m_\mu(x_1,\ldots,x_{n-1})\end{aligned}$$

がわかる. あとは $\overset{(n-1)\text{ 変数}}{D_x}$ $P_\lambda(x_1,\ldots,x_{n-1},0)$ がどうなっているのかを調べればよい. n 変数の Macdonald 多項式 $P_\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ について

$$\begin{aligned}&\overset{n\text{ 変数}}{D_x}\ P_\lambda(x_1,\ldots,x_n){=}\sum_{i=1}^{n}q^{\lambda_i}t^{n-i}P_\lambda(x_1,\ldots,x_n)\\ &{=}\sum_{i=1}^{n-1}\prod_{\substack{1\leq j\leq n-1\\ j\neq i}}\frac{tx_i{-}x_j}{x_i{-}x_j}\cdot\frac{tx_i{-}x_n}{x_i{-}x_n}T_{q,x_i}P_\lambda(x_1,\ldots,x_n){+}\prod_{j=1}^{n}\frac{tx_n{-}x_j}{x_n{-}x_j}T_{q,x_n}P_\lambda(x_1,\ldots,x_n)\end{aligned}$$

である. ここで $x_n{=}0$ とおくと

$$t\ \overset{(n-1)\text{ 変数}}{D_x}\ P_\lambda(x_1,\ldots,x_{n-1},0){+}P_\lambda(x_1,\ldots,x_{n-1},0){=}\sum_{i=1}^{n}q^{\lambda_i}t^{n-i}P_\lambda(x_1,\ldots,x_{n-1},0)$$

となるが, $\lambda_n{=}0$ なので

$$\overset{(n-1)\text{ 変数}}{D_x}\ P_\lambda(x_1,\ldots,x_{n-1},0){=}\sum_{i=1}^{n-1}q^{\lambda_i}t^{n-1-i}P_\lambda(x_1,\ldots,x_{n-1},0)$$

が得られる. 以上より, $\lambda\in\mathcal{P}_n$ について $\lambda_n{=}0$ ならば $P_\lambda(x_1,\ldots,x_{n-1},0){=}P_\lambda(x_1,\ldots,x_{n-1})$ が成り立つ.

第 3 章　直交関係式, q-差分作用素の可換族

量子力学でよく見られるように, ハミルトニアンの固有函数が具体的に求められる系は, その系のハミルトニアンと可換な「保存量」を十分に多く持っており, それらも互いに可換であるということがよくある. また, それらの互いに可換な線型写像たちの同時固有函数たちは適当な内積に関して直交している. このようなことが Macdonald 作用素や Macdonald 多項式に関しても起こっていることを概観する.

3.1　内積の直交関係式

これまで通り, q は $|q|<1$ である複素数とし, t は $|t|<1$ であり, かつ, q, t は十分に generic にとられていると仮定する.

次の n 変数函数 $w(x)=w(x_1,\dots,x_n)$ を重み函数と呼ぶ：

$$w(x)=w(x_1,\dots,x_n):=\prod_{1\le i\ne j\le n}\frac{(x_i/x_j;q)_\infty}{(tx_i/x_j;q)_\infty}.$$

n 次元トーラス $\mathbb{T}^n:=\{(z_1,\dots,z_n)\in(\mathbb{C}^*)^n \mid |z_i|=1\ (1\le i\le n)\}$ の近傍で正則な函数 $f(x_1,\dots,x_n)$, $g(x_1,\dots,x_n)$ の内積 $\langle f,g\rangle$ を

$$\langle f,g\rangle:=\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{T}^n}\prod_{j=1}^n\frac{dx_j}{2\pi i x_j}f\big({x_1}^{-1},\dots,{x_n}^{-1}\big)g(x_1,\dots,x_n)w(x_1,\dots,x_n)$$

によって定める. 以下では $f\big(x^{-1}\big):=f\big({x_1}^{-1},\dots,{x_n}^{-1}\big)$ と表記する.

上で定めた内積 $\langle\bullet,\bullet\rangle$ は複素双線型で対称ではあるが, 一般には正定値でないことに注意する. $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ では正則で, $z=0$ では有理型な函数 $f(z)$ に対し, $\displaystyle\int_{\mathbb{T}}\frac{dz}{2\pi i z}f(z)$ は $f(z)$ の $z=0$ の周りでの Laurent 展開の定数項なので, 上の内積を

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{n!}\mathrm{CT}\big[f\big(x^{-1}\big)g(x)w(x)\big]$$

などとも書く (constant term の “CT”).

内積 $\langle\bullet,\bullet\rangle$ は被積分函数として重み函数 $w(x)$ を含んでいるが, この $w(x)$ は

$$Z:=\Big\{(x_1,\dots,x_n)\in(\mathbb{C}^*)^n \;\Big|\; 1\le i\ne j\le n \text{ なるある } i,\, j \text{ およびある } k\in\mathbb{N} \text{ に対し } tx_i/x_j=q^{-k}\Big\}$$

において分母が 0 になる. よって, 積分路 C を適当にとって

$$\int_C\prod_{j=1}^n\frac{dx_j}{2\pi i x_j}f\big({x_1}^{-1},\dots,{x_n}^{-1}\big)g(x_1,\dots,x_n)w(x_1,\dots,x_n)$$

が意味を持つようにするには, Z の点が C 上に現れないようにする必要がある. そのような積分路 C としては, 例えば $(x_1,\dots,x_n)\in C$ について

$$|t|<|x_i/x_j|<|t|^{-1}\quad(1\le i<j\le n)$$

が満たされるようにしながら各 x_i について積分するというものがある (これは t を $|t|<1$ となるようにとっているので可能である). この条件は $\mathbb{T}^n$ において満たされている. すなわち, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{T}^n$ に対し $|x_i/x_j|=1$ $(1\leq i<j\leq n)$ なので

$$|t|<1=|x_i/x_j|<|t|^{-1}$$

である. よって, 内積 $\langle\bullet,\bullet\rangle$ を上のように定めることができる.

定理 3.1 (Macdonald 多項式の直交性). 分割 λ, $\mu\in\mathcal{P}_n$ に対し次が成り立つ：

$$\langle P_\lambda,P_\mu\rangle=\delta_{\lambda,\mu}N_\lambda,\quad N_\lambda:=\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{\left(q^{\lambda_i-\lambda_j}t^{j-i};q\right)_\infty\left(q^{\lambda_i-\lambda_j+1}t^{j-i};q\right)_\infty}{\left(q^{\lambda_i-\lambda_j}t^{j-i+1};q\right)_\infty\left(q^{\lambda_i-\lambda_j+1}t^{j-i-1};q\right)_\infty}.$$

上の N_λ について, 特に $\lambda=\varnothing$ の場合は

$$N_\varnothing=\left(\frac{(t;q)_\infty}{(q;q)_\infty}\right)^n\prod_{i=1}^n\frac{\left(t^{i-1};q\right)_\infty}{\left(t^i;q\right)_\infty}$$

が知られている. これら N_λ の詳細については, 次の Macdonald の本などを参照してほしい：

- I.G. Macdonald『Symmetric Functions and Hall Polynomials Second Edition』(Oxford University Press, 1995)

- I.G. Macdonald “A New Class Of Symmetric Functions” (Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1988, 372/S20 Actes 20e Śeminaire Lotharingien, p. 131-171)

証明の概略. 以下では, $\langle P_\lambda,P_\mu\rangle\propto\delta_{\lambda,\mu}$ $(\lambda,\ \mu\in\mathcal{P}_n)$ であることをあまり細かいことを気にせずに述べる. 示すべき内容は, 対称多項式 f, $g\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ に対し

$$\langle D_xf,g\rangle=\langle f,D_xg\rangle$$

が成り立つということである (D_x が内積 $\langle\bullet,\bullet\rangle$ について形式的に自己共役であること). 実際, これが成り立つことを知っている場合, 相異なる分割 λ, $\mu\in\mathcal{P}_n$ に付随する Macdonald 多項式 $P_\lambda(x)$, $P_\mu(x)$ について $D_xP_\lambda(x)=d_\lambda P_\lambda(x)$, $D_xP_\mu(x)=d_\mu P_\mu(x)$ なので

$$\begin{aligned}\langle D_xP_\lambda,P_\mu\rangle&=d_\lambda\langle P_\lambda,P_\mu\rangle\\&=\langle P_\lambda,D_xP_\mu\rangle=d_\mu\langle P_\lambda,P_\mu\rangle\end{aligned}$$

が出て, $\lambda\neq\mu$ ならば $d_\lambda\neq d_\mu$ であったので $\langle P_\lambda,P_\mu\rangle=0$ が得られる (線型代数や量子力学においておなじみの話題である).

D_x の形式的自己共役性の (軽い) 証明に入る. 対称多項式 f, $g\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ に対し, 内積 $\langle\bullet,\bullet\rangle$ の定義から

$$\begin{aligned}\langle D_xf,g\rangle&=\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{T}^n}\prod_{k=1}^n\frac{dx_k}{2\pi ix_k}\sum_{i=1}^n\prod_{j\neq i}\frac{tx_i{}^{-1}-x_j{}^{-1}}{x_i{}^{-1}-x_j{}^{-1}}f\left(x_1{}^{-1},\ldots,qx_i{}^{-1},\ldots,x_n{}^{-1}\right)g(x)w(x)\\&=\frac{1}{n!}\sum_{i=1}^n\int_{\mathbb{T}^n}\prod_{k=1}^n\frac{dx_k}{2\pi ix_k}\prod_{j\neq i}\frac{x_i-tx_j}{x_i-x_j}f\left(x_1{}^{-1},\ldots,qx_i{}^{-1},\ldots,x_n{}^{-1}\right)g(x)w(x)\end{aligned}$$

である．ここで「定数項は積分変数のスカラー倍で不変である」ことから (← これについては後述する), i についての和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}$ の中で $x_i \mapsto qx_i$ とすると

$$\langle D_x f, g\rangle = \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{T}^n}\prod_{k=1}^{n}\frac{dx_k}{2\pi i x_k}\prod_{j\neq i}\frac{qx_i - tx_j}{qx_i - x_j} f\left(x^{-1}\right) T_{q,x_i}\{g(x)w(x)\}$$

とできる．重み函数 $w(x)$ について，ある $i\in\{1,\ldots,n\}$ を選ぶときに

$$w(x) = \prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}\frac{(x_i/x_j;q)_\infty}{(tx_i/x_j;q)_\infty}\cdot\frac{(x_j/x_i;q)_\infty}{(tx_j/x_i;q)_\infty}\times(x_i \text{ を含まない部分})$$

なので，$w(x)$ を q-シフトした $T_{q,x_i}w(x)$ $(1\leq i\leq n)$ は

$$T_{q,x_i}w(x) = \prod_{j\neq i}\frac{1-tx_i/x_j}{1-x_i/x_j}\cdot\frac{1-q^{-1}x_j/x_i}{1-q^{-1}tx_j/x_i}w(x) = \prod_{j\neq i}\frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j}\cdot\frac{qx_i - x_j}{qx_i - tx_j}w(x)$$

となる．これより

$$\langle D_x f, g\rangle = \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{T}^n}\prod_{k=1}^{n}\frac{dx_k}{2\pi i x_k} f\left(x^{-1}\right)\prod_{j\neq i}\frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j}\{T_{q,x_i}g(x)\}w(x) = \langle f, D_x g\rangle. \quad \square$$

Macdonald 作用素 D_x が内積 $\langle\bullet,\bullet\rangle$ について形式的自己共役であることの証明では,「定数項は積分変数のスカラー倍で不変である」として

$$\text{“}\int_{\mathbb{T}}\frac{dz}{2\pi i z}f(qz) = \int_{\mathbb{T}}\frac{dz}{2\pi i z}f(z)\text{”}$$

としていた．これについて少しコメントする．

命題 3.2. 複素函数 $f(z)$ が，ある閉曲線 C とこれを q-シフトしてできる閉曲線

$$qC := \{qz\in\mathbb{C} \mid z\in C\}$$

を境界に持つ領域 D の閉包 $\overline{D}$ において正則であるとき，次が成り立つ：

$$\int_C \frac{dz}{2\pi i z}T_{q,z}f(z) = \int_C \frac{dz}{2\pi i z}f(z).$$

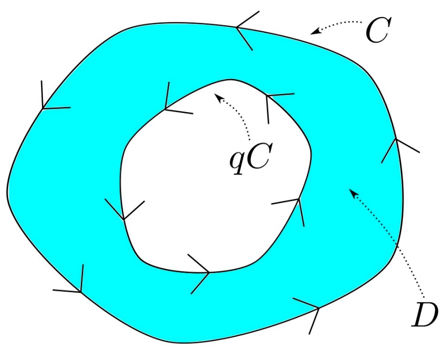


図 3.1: 閉曲線 C と qC によって囲まれてできる領域 D の模式図.

証明. 複素函数 $f(z)$ が上の仮定を満たすとすると, Cauchy の積分定理によって積分路の変形が $\overline{D}$ 内でできるので

$$\int_C \frac{dz}{2\pi iz} T_{q,z} f(z) = \int_C \frac{dz}{2\pi iz} f(qz) \overset{w=qz}{=\!=\!=} \int_{qC} \frac{dw}{2\pi iw} f(w) \overset{\text{Cauchy の積分定理}}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \int_C \frac{dw}{2\pi iw} f(w). \quad \square$$

q-差分作用素の内積 $\langle \bullet, \bullet \rangle$ についての形式的自己共役性に対してもう少しコメントしておく. q-差分作用素

$$L_x = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} a_\mu(x) {T_{q,x}}^\mu \quad (\leftarrow \text{有限和})$$

が内積 $\langle \bullet, \bullet \rangle$ について形式的自己共役であるための条件を考えてみる. まず, $\mathbb{T}^n$ の近傍で正則な函数 f, g に対し

$$\langle L_x f, g \rangle = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{j=1}^n \frac{dx_j}{2\pi i x_j} (L_x f)\big(x^{-1}\big) g(x) w(x) = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{j=1}^n \frac{dx_j}{2\pi i x_j} L_{x^{-1}} f\big(x^{-1}\big) g(x) w(x)$$

であるが, ここで

$$ {L_x}^* := \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} {T_{q,x}}^{-\mu} a_\mu(x)$$

とおくと次が成り立つ：

$$\begin{aligned} \langle L_x f, g \rangle &= \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{j=1}^n \frac{dx_j}{2\pi i x_j} f\big(x^{-1}\big) {L_{x^{-1}}}^* \{g(x) w(x)\} \\ &= \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{j=1}^n \frac{dx_j}{2\pi i x_j} f\big(x^{-1}\big) \big[\big\{w(x)^{-1} {L_{x^{-1}}}^* w(x)\big\} g(x)\big] w(x). \end{aligned}$$

ただし, 函数 f, g は先に見たような「定数項は積分変数のスカラー倍で不変である」と言えるような性質を満たしているとする. これを見つつ

$$ {L_x}^\dagger := w(x)^{-1} {L_{x^{-1}}}^* w(x)$$

とおくと $\langle L_x f, g \rangle = \big\langle f, {L_x}^\dagger g \big\rangle$ が成り立つ. よって, q-差分作用素 L_x が ${L_x}^\dagger = L_x$ を満たすとき, L_x は内積 $\langle \bullet, \bullet \rangle$ に関して形式的自己共役となることがわかる.

命題 3.3. q-差分作用素 $L_x = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} a_\mu(x) {T_{q,x}}^\mu$ に対し

$$ {L_x}^* := \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} {T_{q,x}}^{-\mu} a_\mu(x), \quad {L_x}^\dagger := w(x)^{-1} {L_{x^{-1}}}^* w(x)$$

とおく. L_x が ${L_x}^\dagger = L_x$ を満たすとき, L_x は内積 $\langle \bullet, \bullet \rangle$ に関して形式的自己共役である.

3.2 q-差分作用素の可換族

詳しいことは Ruijsenaars の

- S.N.M. Ruijsenaars "Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities" (Communications in Mathematical Physics 110.2 (1987): 191-213)

を参照してほしいが, Macdonald 作用素は楕円 Ruijsenaars 系のハミルトニアンの三角極限であるとみなせる. 楕円 Ruijsenaars 系は互いに可換な保存量を十分に有するので, それらの三角極限も存在するはずである. それらが高階の Macdonald 作用素たちである.

定義 3.4 (**高階の Macdonald 作用素**)**.** $\{1,\ldots,n\}$ の部分集合 I で $\#I{=}r$ $(0{\le}r{\le}n)$ なるものに対し

$$T^{\varepsilon_I}_{q,x}{:=}\prod_{i\in I}T_{q,x_i},\quad A_I(x){:=}t^{\frac{r(r-1)}{2}}\prod_{\substack{i\in I\\ j\notin I}}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}=\frac{T^{\varepsilon_I}_{t,x}\Delta(x)}{\Delta(x)}$$

とおく. 次の q-差分作用素 $D^{(r)}_x$ $(0{\le}r{\le}n)$ を r 階の Macdonald 作用素と呼ぶ：

- $$D^{(r)}_x{:=}\sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n\}\\ \#I=r}}A_I(x)T^{\varepsilon_I}_{q,x}.$$

この $D^{(r)}_x$ $(0{\le}r{\le}n)$ を "r 階の Macdonald 作用素" と呼ぶのは, これが q-シフト作用素を r 個含んでいるからである. また次のことは直ちにわかる：

$$D^{(0)}_x{=}1,\quad D^{(1)}_x{=}D_x,\quad D^{(n)}_x{=}t^{\frac{n(n-1)}{2}}T_{q,x_1}\cdots T_{q,x_n}.$$

命題 3.5 ($D^{(r)}_x$ **たちの性質**)**.** (1) $D^{(r)}_x$ $(0{\le}r{\le}n)$ は $\mathfrak{S}_n$-不変な q-差分作用素であり, 対称多項式の空間 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ に作用する.

(2) $D^{(r)}_x$ $(0{\le}r{\le}n)$ はモノミアル対称多項式から成る基底 $\{m_\lambda(x)\}_{\lambda\in\mathcal{P}_n}$ について dominance order の意味で上三角性を持つ：任意の $\lambda{\in}\mathcal{P}_n$ に対し

- $$D^{(r)}_x m_\lambda(x){=}d^{(r)}_\lambda m_\lambda(x){+}\sum_{\substack{\mu\in\mathcal{P}_n\\ \mu<\lambda}}d^{(r)}_{\lambda\mu}m_\mu(x)$$

なる係数 $d^{(r)}_\lambda{\in}\mathbb{C}$, $d^{(r)}_{\lambda\mu}{\in}\mathbb{C}$ $(\mu{<}\lambda)$ がただ 1 つ存在する. ここで次が成り立つ：

$$d^{(r)}_\lambda{=}e_r\big(q^\lambda t^\delta\big)\quad(\leftarrow e_r \text{ は基本対称式}).$$

(3) $D^{(r)}_x$ $(0{\le}r{\le}n)$ は内積 $\langle\bullet,\bullet\rangle$ について形式的自己共役である.

証明. (1) は $D_x^{(r)}=\dfrac{1}{\Delta(x)}\displaystyle\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \#I=r}} T_{t,x}^{\varepsilon_I}\Delta(x)T_{q,x}^{\varepsilon_I}$ から従う.

(2) は Macdonald 作用素 D_x の場合と同様, dominance order についてのリーディング項に注目すればよい. $D_x^{(r)}x^\mu$ $(\mu\in\mathbb{N}^n)$ を見ると

$$D_x^{(r)}x^\mu=\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \#I=r}} A_I(x)T_{q,x}^{\varepsilon_I}x^\mu=\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \#I=r}} A_I(x)\prod_{i\in I}q^{\mu_i}x^\mu$$

であるが, この和の中の $A_I(x)$ について

$$\begin{aligned}
A_I(x)&=t^{\frac{r(r-1)}{2}}\prod_{\substack{i\in I\\ j\notin I}}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}=t^{\frac{r(r-1)}{2}}\prod_{i\in I}\left\{\prod_{\substack{j\notin I\\ j<i}}\frac{1-tx_i/x_j}{1-x_i/x_j}\prod_{\substack{j\notin I\\ j>i}}t\cdot\frac{1-x_j/tx_i}{1-x_j/x_i}\right\}\\
&=t^{\frac{r(r-1)}{2}}\prod_{i\in I}\prod_{\substack{j\notin I\\ j>i}}t+(\text{lower terms})=\prod_{\substack{i,j\in I\\ i<j}}t\times\prod_{i\in I}\prod_{\substack{j\notin I\\ j>i}}t+(\text{lower terms})\\
&=t^{nr}\prod_{\substack{i\in I\\ 1\le j\le i}}t^{-1}+(\text{lower terms})=\prod_{i\in I}t^{n-i}+(\text{lower terms})
\end{aligned}$$

とできるので, 次が成り立つことがわかる：

$$D_x^{(r)}x^\mu=\left(\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \#I=r}}\prod_{i\in I}q^{\mu_i}t^{n-i}\right)x^\mu+(\text{lower terms})=e_r\left(q^\mu t^\delta\right)x^\mu+(\text{lower terms}).$$

これより, $\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対し

$$D_x^{(r)}m_\lambda(x)=e_r\left(q^\lambda t^\delta\right)m_\lambda(x)+(\text{lower terms})$$

がわかるので結論を得る.

(3) は次のように直接確かめられる. 対称多項式 $f,\ g\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ に対し

$$\begin{aligned}
\left\langle D_x^{(r)}f,g\right\rangle&=\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{T}^n}\prod_{k=1}^n\frac{dx_k}{2\pi ix_k}\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \#I=r}}A_I\left(x^{-1}\right)f\left(q^{\varepsilon_I}x^{-1}\right)g(x)w(x)\\
&=\frac{1}{n!}\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \#I=r}}\int_{\mathbb{T}^n}\prod_{k=1}^n\frac{dx_k}{2\pi ix_k}A_I\left(q^{-\varepsilon_I}x^{-1}\right)f\left(x^{-1}\right)g(q^{\varepsilon_I}x)w(q^{\varepsilon_I}x)
\end{aligned}$$

であるが ($T_{q,x}^{\varepsilon_I}f(x)=f(q^{\varepsilon_I}x)$ と表記した), ここで

$$T_{q,x}^{\varepsilon_I}w(x)=w(q^{\varepsilon_I}x)=\prod_{\substack{i\in I\\ j\notin I}}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}\cdot\frac{qx_i-x_j}{qx_i-tx_j}w(x)=A_I\left(q^{-\varepsilon_I}x\right)^{-1}A_I(x)w(x)$$

に注意すると次が成り立つ：

$$\left\langle D_x^{(r)}f,g\right\rangle=\frac{1}{n!}\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \#I=r}}\int_{\mathbb{T}^n}\prod_{k=1}^{n}\frac{dx_k}{2\pi i x_k}f\left(x^{-1}\right)A_I(x)g(q^{\varepsilon_I}x)w(x)=\left\langle f,D_x^{(r)}g\right\rangle. \quad \square$$

3.3 高階の Macdonald 作用素たちの可換性

定理 3.6. (1) 任意の r, $s\in\{0,1,\dots,n\}$ に対し $D_x^{(r)}D_x^{(s)}=D_x^{(s)}D_x^{(r)}$ が成り立つ.

(2) 任意の $r\in\{0,1,\dots,n\}$ および $\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対し

$$D_x^{(r)}P_\lambda(x)=e_r\left(q^\lambda t^\delta\right)P_\lambda(x).$$

上の (1) については後述する. (1) から (2) が従うことは, いわゆる「可換な行列の同時対角化」と同じ要領で理解できる. 高階の Macdonald 作用素たち $D_x^{(r)}$ は (1 階の) Macdonald 作用素 D_x と可換である. 一方, 各 $\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対し, 1 次元部分空間

$$\mathbb{C}P_\lambda(x)\subset\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$$

は D_x の固有値 $d_\lambda=\sum_{i=1}^{n}q^{\lambda_i}t^{n-i}$ の固有空間である (q, t を generic にとれば「$\lambda\neq\mu$ ならば $d_\lambda\neq d_\mu$」が成り立つようにできるので). $D_x^{(r)}$ と D_x は可換なので, $D_x^{(r)}$ も $\mathbb{C}P_\lambda(x)$ を不変に保つが, $\mathbb{C}P_\lambda(x)$ は 1 次元なので, 明らかに $D_x^{(r)}$ も Macdonald 多項式によって対角化されることがわかる.

高階の Macdonald 作用素たちの可換性がどのようにして従うのかについて少しコメントしておく. r, $s\in\{0,1,\dots,n\}$ に対し $D_x^{(r)}D_x^{(s)}$ および $D_x^{(s)}D_x^{(r)}$ を書き下し, これらが等しくなるための条件を見てみる. まず

$$D_x^{(r)}=\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \#I=r}}A_I(x)T_{q,x}^{\varepsilon_I},\quad D_x^{(s)}=\sum_{\substack{J\subset\{1,\dots,n\}\\ \#J=s}}A_J(x)T_{q,x}^{\varepsilon_J}$$

と書いておくと, $D_x^{(r)}D_x^{(s)}$ は

$$D_x^{(r)}D_x^{(s)}=\sum_{\substack{I,J\subset\{1,\dots,n\}\\ \#I=r,\,\#J=s}}A_I(x)A_J(q^{\varepsilon_I}x)T_{q,x}^{\varepsilon_I+\varepsilon_J}$$

である. ここで I, J についての和の中で $K:=I\cap J$ とおいて $I\cup J=P\sqcup K\sqcup Q$ とみなし ($P=I\backslash J$, $Q=J\backslash I$ である. 下図を参照), $L:=P\sqcup Q$ とおくと $\varepsilon_I+\varepsilon_J=\varepsilon_L+2\varepsilon_K$ なので

$$D_x^{(r)}D_x^{(s)}=\sum_{\substack{K,L\subset\{1,\dots,n\}\\ K\cap L=\varnothing\\ \#K\leq\min\{r,s\}}}\left(\sum_{\substack{P\sqcup Q=L\\ \#K+\#P=r\\ \#K+\#Q=s}}A_{K\sqcup P}(x)A_{K\sqcup Q}\left(q^{\varepsilon_P+\varepsilon_K}x\right)\right)T_{q,x}^{\varepsilon_L+2\varepsilon_K}$$

となる. $D_x^{(s)}D_x^{(r)}$ も同様に表せるが, これらを見比べるとき, この式の中の

$$\sum_{\substack{P\sqcup Q=L\\ \#K+\#P=r\\ \#K+\#Q=s}} A_{K\sqcup P}(x)A_{K\sqcup Q}\left(q^{\varepsilon_P+\varepsilon_K}x\right)$$

が r, s の交換 $r\leftrightarrow s$ や P, Q の適当な交換の下で不変であれば $D_x^{(r)}D_x^{(s)}=D_x^{(s)}D_x^{(r)}$ が従うことがわかる. これを保証するのが次の命題である.

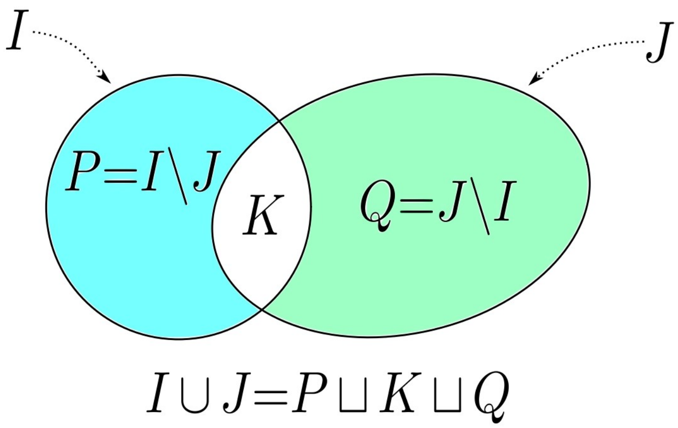


図 3.2: 添え字集合 I, J から P, Q, K を "このように" 定める.

命題 3.7 (Ruijsenaars 恒等式). z の有理函数 $\gamma(z)$ を

$$\gamma(z):=\frac{(1-tz)(1-qt^{-1}z)}{(1-z)(1-qz)}$$

とおく. このとき, $r+s=n$ なる整数 r, s に対し次が成り立つ :

$$\sum_{\substack{I,J\subset\{1,\dots,n\}\\ I\cup J=\{1,\dots,n\}\\ \#I=r,\#J=s}}\prod_{\substack{i\in I\\ j\in J}}\gamma(x_i/x_j)=(r\ \text{と}\ s\ \text{を入れ換えたもの})=\left(x_i\leftrightarrow {x_i}^{-1}\ \text{としたもの}\right).$$

もともとは, Ruijsenaars が

- S.N.M. Ruijsenaars "Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities" (Communications in Mathematical Physics 110.2 (1987): 191-213)

において, 有理型函数

$$\gamma(z;p):=\frac{\theta(tz;p)\theta(qt^{-1}z;p)}{\theta(z;p)\theta(qz;p)}\quad\left(\theta(z;p):=(z;p)_\infty(pz^{-1};p)_\infty\right)$$

に対する Ruijsenaars 恒等式を証明し, それによって楕円 Ruijsenaars 系が互いに可換な保存量を十分に持つことを示したのである. 上の命題 3.7 は Ruijsenaars の結果の三角函数版である.

第 4 章　双対性, Pieri 公式, 核函数,. . .

Macdonald 多項式のある特殊値の自己双対性という性質があり, これと「Macdonald 作用素たち $D_x^{(r)}$ $(r\in\{0,1,\dots,n\})$ が Macdonald 多項式によって同時対角化される」ことを合わせると, Macdonald 多項式の Pieri 公式が得られる. また, Macdonald 作用素たちの核函数と呼ばれるものが存在し, それらの満たす函数等式から Littlewood-Richardson 係数や分岐係数のいくつかの性質が従う.

4.1　特殊値, 自己双対性, Pieri 公式

Young 図形に関する記号を少し補っておく. Young 図形 λ のサイト $s=(i,j)\in\lambda$ に対し, $a_\lambda(s)=\lambda_i-j$ をアーム長, $\ell_\lambda(s)=\lambda'_j-i$ をレッグ長と呼んでいた (λ' は λ の転置である). ここで

$$a'_\lambda(s):=j-1,\quad \ell'_\lambda(s):=i-1$$

とし, $a'_\lambda(s)$ を双対アーム長, $\ell'_\lambda(s)$ を双対レッグ長と呼ぶ. 絵を描くと次のような具合である：$\lambda=(4,4,3,2)$, $s=(2,2)\in\lambda$ の場合,

$$\begin{cases} a_\lambda(s)=(\circ \text{ の個数})=2, & \ell_\lambda(s)=(\triangle \text{ の個数})=2, \\ a'_\lambda(s)=(\circ' \text{ の個数})=1, & \ell'_\lambda(s)=(\triangle' \text{ の個数})=1. \end{cases}$$

$$\lambda=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & \triangle' & & \\ \hline \circ' & s & \circ & \circ \\ \hline & \triangle & & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} & \triangle & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array}$$

Macdonald 多項式に“$x=t^\delta$”なる代入を行ったものの具体的な表示は次の通りである.

> **命題 4.1.** 分割 $\lambda\in\mathcal{P}_n$ に関する
>
> $$n(\lambda)=\sum_{i\geq 0}(i-1)\lambda_i$$
>
> やアーム長 $a_\lambda(s)$, レッグ長 $\ell_\lambda(s)$, それらの双対 $a'_\lambda(s)$, $\ell'_\lambda(s)$ などの記号を使うとき
>
> $$P_\lambda\big(t^\delta\big)=t^{n(\lambda)}\prod_{s\in\lambda}\frac{1-q^{a'_\lambda(s)}t^{n-\ell'_\lambda(s)}}{1-q^{a_\lambda(s)}t^{\ell_\lambda(s)+1}}=t^{n(\lambda)}\frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\big(t^{n-i+1};q\big)_{\lambda_i}}{\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n}\big(q^{\lambda_i-\lambda_j}t^{j-i+1};q\big)_{\lambda_i-\lambda_{j+1}}}.$$

この命題 4.1 の証明については

- I.G. Macdonald『Symmetric Functions and Hall Polynomials Second Edition』(Oxford University Press, 1995)

を参照してほしい.

命題 4.2 (Macdonald 多項式の特殊値の自己双対性). Macdonald 多項式を

$$\widetilde{P}_\lambda(x){:=}\frac{P_\lambda(x)}{P_\lambda\left(t^\delta\right)} \quad (\lambda{\in}\mathcal{P}_n)$$

と規格化する. このとき, 任意の λ, $\mu{\in}\mathcal{P}_n$ に対し次が成り立つ：

- $\widetilde{P}_\lambda\left(q^\mu t^\delta\right){=}\widetilde{P}_\mu\left(q^\lambda t^\delta\right)$.

この命題 4.2 の証明については後ほどコメントする.

Macdonald 多項式の Pieri 公式について述べる前に「skew diagram が vertical strip である」ことについて少し説明する. 分割 λ とこれに含まれる分割 $\mu{\subset}\lambda$ に対し, skew diagram λ/μ のどの "列" を見ても, 箱が高々 1 つしかないとき, λ/μ は horizontal strip であるというのであった. これに対し, 次の条件を満たす skew diagram λ/μ は vertical strip であるという：

- 分割 λ とこれに含まれる分割 $\mu{\subset}\lambda$ に対し, skew diagram λ/μ のどの "行" を見ても, 箱が高々 1 つしかない.

例えば $\lambda{=}(4,4,2)$, $\mu{=}(3,3,1)$ の場合の skew diagram λ/μ は vertical strip である：

$$\lambda/\mu{=}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \bullet & \bullet & \bullet & \\ \hline \bullet & \bullet & \bullet & \\ \hline \bullet & & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array}\,.$$

以下では, vertical strip を短く「v.s.」と書く.

命題 4.3 (Macdonald 多項式の Pieri 公式). 任意の $\mu{\in}\mathcal{P}_n$ および $r{\in}\mathbb{N}$ に対し

$$P_\mu(x)e_r(x){=}\sum_{\substack{\lambda\in\mathcal{P}_n \\ \lambda/\mu \text{ は v.s. で } |\lambda/\mu|=r}}\psi'_{\lambda/\mu}(q,t)P_\lambda(x)$$

が成り立つ. ここで $\psi'_{\lambda/\mu}(q,t)$ は

$$\psi_{\lambda/\mu}(q,t){:=}\prod_{1\le i<j\le\ell(\mu)}\frac{\left(q^{\mu_i-\mu_j}t^{j-i+1};q\right)_{\lambda_i-\mu_i}\left(q^{\mu_i-\lambda_{j+1}+1}t^{j-i};q\right)_{\lambda_i-\mu_i}}{\left(q^{\mu_i-\mu_j+1}t^{j-i};q\right)_{\lambda_i-\mu_i}\left(q^{\mu_i-\lambda_{j+1}}t^{j-i+1};q\right)_{\lambda_i-\mu_i}}$$

によって $\psi'_{\lambda/\mu}(q,t){:=}\psi_{\lambda'/\mu'}(t,q)$ として定義される.

この命題の詳細については次の Macdonald の本を参照されたい：

- I.G. Macdonald『Symmetric Functions and Hall Polynomials Second Edition』(Oxford University Press, 1995)

4.2 q-差分方程式と Pieri 公式

ここでは, Macdonald 作用素たち $D_x^{(r)}$ $(r\in\{0,1,\dots,n\})$ が Macdonald 多項式によって同時対角化されることと Macdonald 多項式の特殊値の自己双対性から Pieri 公式が得られることを紹介する.

まず, r 階の Macdonald 作用素 $D_x^{(r)}$ $(r\in\{0,1,\dots,n\})$ とは

- $$D_x^{(r)}=\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \#I=r}} A_I(x)T_{q,x}^{\varepsilon_I} \quad \left(T_{q,x}^{\varepsilon_I}=\prod_{i\in I}T_{q,x_i},\quad A_I(x)=t^{\frac{r(r-1)}{2}}\prod_{\substack{i\in I\\ j\notin I}}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}\right)$$

のことであったが, これと Macdonald 多項式について

$$D_x^{(r)}P_\lambda(x)=e_r\big(q^\lambda t^\delta\big)P_\lambda(x) \quad (\lambda\in\mathcal{P}_n)$$

が成り立つのであった. 正規化した Macdonald 多項式 $\widetilde{P}_\lambda(x)=P_\lambda(x)/P_\lambda\big(t^\delta\big)$ も $D_x^{(r)}$ の固有函数なので, そのことを書き下すと

$$\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \#I=r}} A_I(x)\widetilde{P}_\lambda(q^{\varepsilon_I}x)=e_r\big(q^\lambda t^\delta\big)\widetilde{P}_\lambda(x)$$

である. ここである $\mu\in\mathcal{P}_n$ をとって $x=q^\mu t^\delta$ とおくと

$$\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \#I=r}} A_I\big(q^\mu t^\delta\big)\widetilde{P}_\lambda\big(q^{\mu+\varepsilon_I}t^\delta\big)=e_r\big(q^\lambda t^\delta\big)\widetilde{P}_\lambda\big(q^\mu t^\delta\big)$$

であるが, 正規化された Macdonald 多項式の特殊値の自己双対性を使うと

$$\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \#I=r}} A_I\big(q^\mu t^\delta\big)\widetilde{P}_{\mu+\varepsilon_I}\big(q^\lambda t^\delta\big)=e_r\big(q^\lambda t^\delta\big)\widetilde{P}_\mu\big(q^\lambda t^\delta\big)$$

が成り立つ. ここで, $\#I=r$ である部分集合 $I\subset\{1,\dots,n\}$ および分割 $\mu\in\mathcal{P}_n$ について

$$A_I\big(q^\mu t^\delta\big)=t^{\frac{r(r-1)}{2}}\prod_{\substack{i\in I\\ j\notin I}}\frac{q^{\mu_i}t^{n-i+1}-q^{\mu_j}t^{n-j}}{q^{\mu_i}t^{n-i}-q^{\mu_j}t^{n-j}}$$

であるが,「$I\subset\{1,\dots,n\}$ および $\mu\in\mathcal{P}_n$ について, $\mu+\varepsilon_I$ が分割でなければ $A_I\big(q^\mu t^\delta\big)=0$ である」ことに注意する. $\mu+\varepsilon_I$ が分割にならないということは, ある $a\in I$ で $a-1\notin I$ なるものがあって $\mu_a=\mu_{a-1}$ となっているということである. こういう添え字 a について

$$q^{\mu_a}t^{n-a+1}-q^{\mu_{a-1}}t^{n-a+1}=0$$

が成り立つからである. 以上より, 任意の $\lambda,\mu\in\mathcal{P}_n$ に対し

$$\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \#I=r\\ \mu+\varepsilon_I\ \text{は分割}}} A_I\big(q^\mu t^\delta\big)\widetilde{P}_{\mu+\varepsilon_I}\big(q^\lambda t^\delta\big)=e_r\big(q^\lambda t^\delta\big)\widetilde{P}_\mu\big(q^\lambda t^\delta\big)$$

であることがわかった．これより，多項式

$$\sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n\}\\ \#I=r\\ \mu+\varepsilon_I\ \text{は分割}}} A_I\bigl(q^{\mu}t^{\delta}\bigr)\widetilde{P}_{\mu+\varepsilon_I}(x)-e_r(x)\widetilde{P}_{\mu}(x)$$

は $x=q^{\lambda}t^{\delta}$ $(\lambda\in\mathcal{P}_n)$ という無限個の零点を持つので，恒等的に 0 である．あとは

$$\sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n\}\\ \#I=r\\ \mu+\varepsilon_I\ \text{は分割}}} A_I\bigl(q^{\mu}t^{\delta}\bigr)\widetilde{P}_{\mu+\varepsilon_I}(x)=e_r(x)\widetilde{P}_{\mu}(x)$$

において $\psi'_{\lambda/\mu}(q,t)$ を

$$\psi'_{\lambda/\mu}(q,t):=A_I\bigl(q^{\mu}t^{\delta}\bigr)\frac{P_{\mu}\bigl(t^{\delta}\bigr)}{P_{\lambda}\bigl(t^{\delta}\bigr)}$$

とおけば Macdonald 多項式の Pieri 公式が得られる (「$\mu+\varepsilon_I$ が分割である」という条件は「$\mu+\varepsilon_I/\mu$ は v.s.」とも述べられることに注意).

Macdonald 多項式の特殊値の自己双対性の証明としては次のものがある．

(1)：**帰納法による証明.** 詳細は Macdonald の

- I.G. Macdonald『Symmetric Functions and Hall Polynomials Second Edition』(Oxford University Press, 1995)

や Koornwinder のホームページにある

- T. Koornwinder "Self-duality for q-ultraspherical polynomials associated with the root system A_n"

を参照してほしい．大まかに述べると，Macdonald 多項式の特殊値の自己双対性と Macdonald 多項式の Pieri 公式を，分割のサイズに関する帰納法によって証明するというものである．

(2)：**二重アフィン Hecke 環の Cherednik 対合を使う証明.** 二重アフィン Hecke 環 (double affine Hecke algebra) の Cherednik 対合と呼ばれるものがあり，これによって二重アフィン Hecke 環のある内積を構成すると，そこから Macdonald 多項式の特殊値の自己双対性がほとんど自動的に従う (q-Dunkl 作用素の性質も使う)．これについては第 5 章「アフィン Hecke 環と q-Dunkl 作用素」を参照してほしい．

これまで見てきた Macdonald 作用素たち $D_x^{(r)}$ $(r\in\{0,1,\ldots,n\})$ は

$$D_x^{(r)}P_{\lambda}(x)=e_r\bigl(q^{\lambda}t^{\delta}\bigr)P_{\lambda}(x)\quad(\lambda\in\mathcal{P}_n)$$

を満たすという意味で“1 列型”である (基本対称式は 1 列型の分割に付随する Macdonald 多項式であった). これに対し, Macdonald 多項式を同時固有函数に持つ“1 行型”の q-差分作用素も存在する.

命題 4.4 (野海-佐野作用素). q-差分作用素 $H_x^{(\ell)}$ $(\ell\in\mathbb{N})$ を

- $$H_x^{(\ell)}:=\sum_{\substack{\mu\in\mathbb{N}^n\\|\mu|=\ell}}\frac{\Delta(q^\mu x)}{\Delta(x)}\prod_{1\le i,j\le n}\frac{(tx_i/x_j;q)_{\mu_i}}{(qx_i/x_j;q)_{\mu_i}}T_{q,x}^\mu$$

と定める. 完全同次対称式の q-変形である $g_\ell(x)$ $(\ell\in\mathbb{N})$ を

$$g_\ell(x):=\sum_{\substack{\mu_1,\dots,\mu_n\ge 0\\\mu_1+\cdots+\mu_n=\ell}}\prod_{i=1}^n\frac{(t;q)_{\mu_i}}{(q;q)_{\mu_i}}{x_1}^{\mu_1}\cdots{x_n}^{\mu_n}$$

と定めるとき, $H_x^{(\ell)}$ たちは Macdonald 多項式によって次のように同時対角化される：

$$H_x^{(\ell)}P_\lambda(x)=g_\ell\bigl(q^\lambda t^\delta\bigr)P_\lambda(x)\quad(\lambda\in\mathcal{P}_n).$$

野海-佐野作用素については次の論文を参照されたい：

- M. Noumi, A. Sano “An infinite family of higher-order difference operators that commute with Ruijsenaars operators of type A” (Letters in Mathematical Physics 111.4 (2021): 1-17)

4.3 Macdonald 作用素の核函数

Schur 函数 $s_\lambda(x)$ について Cauchy の公式と呼ばれる

$$\prod_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}(1-x_iy_j)^{-1}=\sum_{\substack{\lambda\in\mathcal{P}\\\ell(\lambda)\le\min\{m,n\}}}s_\lambda(x)s_\lambda(y)$$

が成り立つのであったが, これの Macdonald 多項式版も存在する.

命題 4.5. m 個の x-変数と n 個の y-変数の函数 $\Phi(x,y)$ を

$$\Phi(x,y):=\prod_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}\frac{(tx_iy_j;q)_\infty}{(x_iy_j;q)_\infty}$$

によって定める. これについて次が成り立つ：

- $$\Phi(x,y)=\sum_{\substack{\lambda\in\mathcal{P}\\\ell(\lambda)\le\min\{m,n\}}}b_\lambda P_\lambda(x)P_\lambda(y).$$

ここで $b_\lambda{=}b_\lambda(q,t)$ は q, t の有理式で, 次の表示が知られている：

$$b_\lambda(q,t)=\prod_{s\in\lambda}\frac{1-q^{a_\lambda(s)}t^{\ell_\lambda(s)+1}}{1-q^{a_\lambda(s)+1}t^{\ell_\lambda(s)}}\quad(\lambda\in\mathcal{P}).$$

以下ではこの命題の証明の概略を述べる. Macdonald 作用素たち $D_x^{(r)}$ $(r\in\{0,1,\dots,n\})$ の生成母函数 $D_x(u)$ を

$$D_x(u):=\sum_{r=0}^{n}(-u)^r D_x^{(r)}$$

とおくと, $D_x^{(r)}$ $(r\in\{0,1,\dots,n\})$ たちは Macdonald 多項式によって同時対角化されるので

$$\begin{aligned}D_x(u)P_\lambda(x)&=\sum_{r=0}^{n}(-u)^r D_x^{(r)}P_\lambda(x)=\sum_{r=0}^{n}(-u)^r e_r\big(q^\lambda t^\delta\big)P_\lambda(x)\\&=\prod_{i=1}^{n}\big(1-uq^{\lambda_i}t^{n-i}\big)P_\lambda(x)\end{aligned}$$

がわかる. ここで, q-差分作用素 $D_x(u)$ と函数 $\Phi(x,y)$ について次のことが知られている.

命題 4.6 (函数 $\Phi(x,y)$ の満たす函数等式)**.** 函数 $\Phi(x,y)$ の x-変数も y-変数も共に n 個である場合には次が成り立つ：

- $D_x(u)\Phi(x,y)=D_y(u)\Phi(x,y).$

証明の概略. 函数 $\Phi(x,y)$ に $D_x^{(r)}$ および $D_y^{(r)}$ $(r\in\{0,1,\dots,n\})$ を作用させたものは

- $D_x^{(r)}\Phi(x,y)=\displaystyle\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \#I=r}}A_I(x)T_{q,x}^{\varepsilon_I}\Phi(x,y)=\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \#I=r}}A_I(x)\prod_{\substack{i\in I\\ 1\le k\le n}}\frac{1-tx_iy_k}{1-x_iy_k}\Phi(x,y),$
- $D_y^{(r)}\Phi(x,y)=\displaystyle\sum_{\substack{K\subset\{1,\dots,n\}\\ \#K=r}}A_K(y)T_{q,y}^{\varepsilon_K}\Phi(x,y)=\sum_{\substack{K\subset\{1,\dots,n\}\\ \#K=r}}A_K(y)\prod_{\substack{k\in K\\ 1\le i\le n}}\frac{1-tx_iy_k}{1-x_iy_k}\Phi(x,y)$

である. ここで, 任意の $r\in\{0,1,\dots,n\}$ に対し

$$\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \#I=r}}A_I(x)\prod_{\substack{i\in I\\ 1\le k\le n}}\frac{1-tx_iy_k}{1-x_iy_k}=\sum_{\substack{K\subset\{1,\dots,n\}\\ \#K=r}}A_K(y)\prod_{\substack{k\in K\\ 1\le i\le n}}\frac{1-tx_iy_k}{1-x_iy_k}$$

なる $x_1,\dots,x_n$, $y_1,\dots,y_n$ の有理函数の恒等式が成り立つことが知られている (梶原-野海).
こうして, 任意の $r\in\{0,1,\dots,n\}$ に対し

$$D_x^{(r)}\Phi(x,y)=D_y^{(r)}\Phi(x,y)$$

が成り立つので, $D_x(u)\Phi(x,y)=D_y(u)\Phi(x,y)$ も成り立つ.　□

この性質によって, 函数 $\Phi(x,y)$ は Macdonald 作用素の核函数と呼ばれる.

上に現れたような恒等式については次の論文を参照されたい：

- Y. Kajihara, M. Noumi "Multiple elliptic hypergeometric series —An approach from the Cauchy determinant—" (Indagationes Mathematicae 14.3-4 (2003): 395-421)

"$\Phi(x,y) = \sum_{\substack{\lambda\in\mathcal{P} \\ \ell(\lambda)\le\min\{m,n\}}} b_\lambda P_\lambda(x)P_\lambda(y)$" の証明の概略に戻る. Schur 函数についてのときと同様, $m=n$ の場合を考えるので十分である. 函数 $\Phi(x,y)$ は x-変数の入れ換えについて対称なので, y-変数の入れ換えについて対称な函数 $F_\lambda(y)$ があって

$$\Phi(x,y) = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n} P_\lambda(x)F_\lambda(y)$$

と展開できる. ここで $\Phi(x,y)$ の満たす函数等式を使うと

$$\begin{aligned} D_x(u)\Phi(x,y) &= \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n} D_x(u)P_\lambda(x)F_\lambda(y) = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n}\prod_{i=1}^{n}\left(1-uq^{\lambda_i}t^{n-i}\right)P_\lambda(x)F_\lambda(y) \\ &= D_y(u)\Phi(x,y) = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n} P_\lambda(x)D_y(u)F_\lambda(y) \end{aligned}$$

であるが, Macdonald 多項式の直交性から

$$D_y(u)F_\lambda(y) = \prod_{i=1}^{n}\left(1-uq^{\lambda_i}t^{n-i}\right)F_\lambda(y)$$

がわかる. これは, 函数 $F_\lambda(y)$ が $D_y^{(r)}$ $(r\in\{0,1,\ldots,n\})$ の同時固有函数であることを意味するので, $F_\lambda(y)$ は Macdonald 多項式 $P_\lambda(y)$ に比例することがわかる.

4.4 Littlewood-Richardson 係数と分岐係数

分割 $\mu,\nu\in\mathcal{P}_n$ に対し $P_\mu(x)P_\nu(x)$ は n 変数の対称多項式である. よって, Macdonald 多項式の族 $\{P_\lambda(x)\}_{\lambda\in\mathcal{P}_n}$ が対称多項式の空間 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ の基底であったことを思い起こすと, $P_\mu(x)P_\nu(x)$ は Macdonald 多項式によって展開できる.

定義 4.7 (Littlewood-Richardson 係数). 分割 $\mu,\nu\in\mathcal{P}_n$ に対し

$$P_\mu(x)P_\nu(x) = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n} c^\lambda{}_{\mu\nu}P_\lambda(x)$$

と展開するときの係数 $c^\lambda{}_{\mu\nu}\in\mathbb{C}$ を Littlewood-Richardson 係数と呼ぶ.

Littlewood-Richardson 係数を表現論の側から見ることができる. 一般線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の最高ウェイト $\lambda\in\mathcal{P}_n$ の既約表現を $V(\lambda)$ とすると, この指標は Schur 函数 $s_\lambda(x)$ なのであった. また,

Macdonald 多項式は Schur 函数の q-変形である．よって

$$P_\mu(x)P_\nu(x) = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n} c^\lambda{}_{\mu\nu} P_\lambda(x)$$

は, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ のテンソル積表現 $V(\mu)\otimes V(\nu)$ の

$$V(\mu)\otimes V(\nu) \simeq \bigoplus_{\lambda\in\mathcal{P}_n} V(\lambda)^{\oplus m^\lambda{}_{\mu\nu}}$$

という既約分解を指標によって表したものの q-変形であると理解できる (重複度 $m^\lambda{}_{\mu\nu}$ に対応するのが Littlewood-Richardson 係数 $c^\lambda{}_{\mu\nu}$ である).

一般線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の表現については次の本を参照してほしい：

- 池田 岳『テンソル代数と表現論 線型代数続論』(東京大学出版会, 2022)

また, Macdonald 多項式の Pieri 公式によれば

$$P_\mu(x)e_r(x) = \sum_{\substack{\lambda\in\mathcal{P}_n \\ \lambda/\mu \text{ は v.s. で } |\lambda/\mu|=r}} \psi'_{\lambda/\mu}(q,t)P_\lambda(x)$$

であったので, Littlewood-Richardson 係数 $c^\lambda{}_{\mu\nu}$ は特別な場合として係数 $\psi'_{\lambda/\mu}(q,t)$ を含んでいる.

m 個の x-変数と n 個の y-変数を含む $(m+n)$ 変数の Macdonald 多項式 $P_\lambda(x,y)$ を x-変数のみ, y-変数のみの Macdonald 多項式によって表すことを考える.

定義 4.8 (分岐係数). 分割 $\lambda\in\mathcal{P}_{m+n}$ に対し

$$P_\lambda(x,y) = \sum_{\substack{\mu\in\mathcal{P}_m \\ \nu\in\mathcal{P}_n}} b^\lambda{}_{\mu\nu} P_\mu(x)P_\nu(y)$$

と展開するときの係数 $b^\lambda{}_{\mu\nu}\in\mathbb{C}$ を分岐係数と呼ぶ.

分岐係数は, $\mathrm{GL}_{m+n}(\mathbb{C})$ の既約表現 $V(\lambda)$ を直積群 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})\times\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の表現とみなして

$$V(\lambda) \simeq \bigoplus_{\substack{\mu\in\mathcal{P}_m \\ \nu\in\mathcal{P}_n}} \{V(\mu)\otimes V(\nu)\}^{\oplus n^\lambda{}_{\mu\nu}}$$

と分解するときの $n^\lambda{}_{\mu\nu}$ に対応するものである.

分岐係数の定義から

$$P_\lambda(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n) = \sum_{\substack{\mu\in\mathcal{P}_{n-1} \\ \ell\in\mathbb{N}}} b^\lambda{}_{\mu\,(\ell)} P_\mu(x_1,\ldots,x_{n-1}){x_n}^\ell$$

であるが, これは Schur 函数の満たす次の恒等式の q-変形であるとみなせる：

$$s_\lambda(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\substack{\mu\subset\lambda \\ \lambda/\mu \text{ は h.s.}}} s_\mu(x_1,\ldots,x_{n-1}){x_n}^{|\lambda|-|\mu|}.$$

定理 4.9. (1) 係数 b_λ を

$$\prod_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}\frac{(tx_iy_j;q)_\infty}{(x_iy_j;q)_\infty}=\sum_{\substack{\lambda\in\mathcal{P}\\ \ell(\lambda)\le\min\{m,n\}}}b_\lambda P_\lambda(x)P_\lambda(y)$$

に現れるものとする. 任意の $\lambda\in\mathcal{P}_{m+n}$, $\mu\in\mathcal{P}_m$, $\nu\in\mathcal{P}_n$ に対し

$$b_\lambda {b^\lambda}_{\mu\nu}=b_\mu b_\nu {c^\lambda}_{\mu\nu}.$$

(2) q, t の解析函数 $f(q,t)$ に対し, q と t を入れ換えたもの $f(t,q)$ を $f(q,t)^\circ$ と書く. 任意の $\lambda\in\mathcal{P}_{m+n}$, $\mu\in\mathcal{P}_m$, $\nu\in\mathcal{P}_n$ に対し

$${b^\lambda}_{\mu\nu}=\left({c^{\lambda'}}_{\mu'\nu'}\right)^\circ.$$

証明の概略. (1) 以下, 核函数の変数の個数を明記して

$$\Phi_{m,n}(x;y)=\prod_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}\frac{(tx_iy_j;q)_\infty}{(x_iy_j;q)_\infty}$$

などと書くことにする. 例えば, m 個の x-変数と n 個の y-変数, $(m+n)$ 個の w-変数を含む核函数を

$$\Phi_{m+n,m+n}(x,y;w)=\Phi_{m,m+n}(x;w)\Phi_{n,m+n}(y;w)$$

と表記する. これらについて次が成り立つ : $\Phi_{m+n,m+n}(x,y;w)$ は

$$\Phi_{m+n,m+n}(x,y;w)=\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_{m+n}}b_\lambda P_\lambda(x,y)P_\lambda(w)=\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_{m+n}}\sum_{\substack{\mu\in\mathcal{P}_m\\ \nu\in\mathcal{P}_n}}b_\lambda {b^\lambda}_{\mu\nu}P_\mu(x)P_\nu(y)P_\lambda(w)$$

と展開でき, $\Phi_{m,m+n}(x;w)\Phi_{n,m+n}(y;w)$ は

$$\begin{aligned}\Phi_{m,m+n}(x;w)\Phi_{n,m+n}(y;w)&=\sum_{\mu\in\mathcal{P}_m}b_\mu P_\mu(x)P_\mu(w)\sum_{\nu\in\mathcal{P}_n}b_\nu P_\nu(y)P_\nu(w)\\&=\sum_{\substack{\mu\in\mathcal{P}_m\\ \nu\in\mathcal{P}_n}}\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_{m+n}}b_\mu b_\nu {c^\lambda}_{\mu\nu}P_\mu(x)P_\nu(y)P_\lambda(w)\end{aligned}$$

と展開できる. これらより $b_\lambda {b^\lambda}_{\mu\nu}=b_\mu b_\nu {c^\lambda}_{\mu\nu}$ がわかる.

(2) については概略のみ述べる. まず, 対称多項式の変数の個数を無限個にしたような "対称函数" と呼ばれるものを考えることができる. 対称函数の全体を Λ と書くとき, この基底として冪和対称函数からなるものがとれる : $p_\lambda(x):=p_{\lambda_1}(x)\cdots p_{\lambda_{\ell(\lambda)}}(x)$ $(\lambda\in\mathcal{P})$ とおくとき

$$\Lambda=\bigoplus_{\lambda\in\mathcal{P}}\mathbb{C}p_\lambda(x).$$

こうして, Macdonald 多項式の変数の個数が無限個になった“Macdonald 対称函数”について考えられるようになる (これも Macdonald 多項式と同じ記号によって“$P_\lambda(x;q,t)$”と表記する). ここで次のことが知られている：自己準同型 $\omega_{q,t}:\Lambda\to\Lambda$ を

$$\omega_{q,t}(p_n(x)):=(-1)^{n-1}\frac{1-q^n}{1-t^n}p_n(x)\quad(n\in\mathbb{Z}_{>0})$$

によって定めるとき, $Q_\lambda(x;q,t):=b_\lambda(q,t)P_\lambda(x;q,t)$ $(\lambda\in\mathcal{P})$ とおくと

$$\omega_{q,t}(P_\lambda(x;q,t))=Q_{\lambda'}(x;t,q).$$

また $b_\lambda(q,t)=b_{\lambda'}(t,q)^{-1}$ $(\lambda\in\mathcal{P})$ であることも知られている. これらの性質を認めると (2) が従う. まず, Littlewood-Richardson 係数 ${c^\lambda}_{\mu\nu}(q,t)$ の定義から

$$P_\mu(x;q,t)P_\nu(x;q,t)=\sum_{\lambda\in\mathcal{P}}{c^\lambda}_{\mu\nu}(q,t)P_\lambda(x;q,t)$$

である. これに $\omega_{q,t}$ を施すと

$$Q_{\mu'}(x;t,q)Q_{\nu'}(x;t,q)=\sum_{\lambda\in\mathcal{P}}{c^\lambda}_{\mu\nu}(q,t)Q_{\lambda'}(x;t,q)$$

であるが, 分割の転置をとったり $q\leftrightarrow t$ とすることで

$$Q_\mu(x;q,t)Q_\nu(x;q,t)=\sum_{\lambda\in\mathcal{P}}{c^{\lambda'}}_{\mu'\nu'}(t,q)Q_\lambda(x;q,t)$$

がわかる. これともともとの Littlewood-Richardson 係数の定義を比較すると

$${c^\lambda}_{\mu\nu}(q,t)={c^{\lambda'}}_{\mu'\nu'}(t,q)b_\lambda(q,t)b_\mu(q,t)^{-1}b_\nu(q,t)^{-1}$$

であるが, 既に知っている (1) と $b_\lambda(q,t)=b_{\lambda'}(t,q)^{-1}$ $(\lambda\in\mathcal{P})$ から

$$\begin{aligned}{c^{\lambda'}}_{\mu'\nu'}(t,q)b_\lambda(q,t)b_\mu(q,t)^{-1}b_\nu(q,t)^{-1}&=b_\lambda(q,t){c^{\lambda'}}_{\mu'\nu'}(t,q)b_{\mu'}(t,q)b_{\nu'}(t,q)\\&=b_\lambda(q,t)\cdot b_{\lambda'}(t,q)b^{\lambda'}_{\mu'\nu'}(t,q)\\&=b^{\lambda'}_{\mu'\nu'}(t,q)\end{aligned}$$

となって ${c^\lambda}_{\mu\nu}(q,t)=b^{\lambda'}_{\mu'\nu'}(t,q)$ がわかる.　□

上の証明で決定的な働きをしたのは, $\omega_{q,t}:\Lambda\to\Lambda$ の性質や $\omega_{q,t}(P_\lambda(x;q,t))=Q_{\lambda'}(x;t,q)$, $b_\lambda(q,t)=b_{\lambda'}(t,q)^{-1}$ などである. これらの詳細については Macdonald の

- I.G. Macdonald『Symmetric Functions and Hall Polynomials Second Edition』(Oxford University Press, 1995)

などの適当な文献を参照してほしい.

第 5 章　アフィン Hecke 環と q-Dunkl 作用素

これまで, Macdonald 作用素たち $D_x^{(r)}$ $(r\in\{0,1,\ldots,n\})$ の性質をいくつか見てきたが, その中でも特に重要なのは $D_x^{(r)}$ たちが互いに可換だということである．この性質は, アフィン Hecke 環の q-Dunkl 作用素と呼ばれる元の可換性として理解できる．ここではそういったアフィン Hecke 環に関連するいくつかの事柄を概観する.

5.1　アフィン Weyl 群

これまで T_{q,x_i} $(1\leq i\leq n)$ と書いてきた q-シフト作用素を, 以下では τ_i $(1\leq i\leq n)$ と書く．多重指数 $\mu\in\mathbb{Z}^n$ に対し $\tau^\mu:=\tau_1{}^{\mu_1}\cdots\tau_n{}^{\mu_n}$ とおく．q-シフト作用素の定義から

$$\tau_i x_j=q^{\delta_{i,j}}x_j\tau_i \quad (1\leq i,j\leq n)$$

である (x_i をかけ算作用素とみなしている)．よって, $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$, $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\mathbb{Z}^n$ に対し

$$\langle\mu,\nu\rangle:=\sum_{i=1}^n\mu_i\nu_i$$

おくと $\tau^\mu x^\nu=q^{\langle\mu,\nu\rangle}x^\nu\tau^\mu$ $(\mu,\,\nu\in\mathbb{Z}^n)$ が成り立つ.

定義 5.1 (q-差分作用素の全体 $\mathcal{D}_{q,x}$ を係数環に持つ W の群環 $\mathcal{D}_{q,x}[W]$)**.** $W:=\mathfrak{S}_n$ を (A 型の) Weyl 群と呼ぶ．$x_1,\ldots,x_n$ の有理函数を係数に持つ q-差分作用素の全体を

$$\mathcal{D}_{q,x}:=\mathbb{C}(x_1,\ldots,x_n)\left[\tau_1{}^{\pm1},\ldots,\tau_n{}^{\pm1}\right]$$

とおく．$\mathcal{D}_{q,x}$ を係数環に持つ W の群環を $\mathcal{D}_{q,x}[W]$ と書く：

$$\mathcal{D}_{q,x}[W]:=\left\{\sum_{\substack{\mu\in\mathbb{Z}^n\\ w\in W}}a_{\mu,w}(x)\tau^\mu w\ \ (\text{有限和})\ \middle|\ a_{\mu,w}(x)\in\mathbb{C}(x_1,\ldots,x_n)\ \ (\mu\in\mathbb{Z}^n,\,w\in W)\right\}.$$

対称群 $\mathfrak{S}_n$ を “Weyl 群” と呼ぶのは, Lie 代数やルート系の話が背後にあるからである．これらの話題については, 例えば次の本を参照してほしい：

- 谷崎 俊之『リー代数と量子群』(共立出版, 2002)
- 井ノ口 順一『はじめて学ぶリー環』(現代数学社, 2018)

第 2 章で用いた記号について振り返っておく．$\varepsilon_j:=(0,\ldots,\overbrace{1}^{j\text{ 番目}},\ldots,0)\in\mathbb{Z}^n$ $(1\leq j\leq n)$ とおき, $\alpha_j:=\varepsilon_j-\varepsilon_{j+1}\in\mathbb{Z}^n$ $(1\leq j\leq n-1)$ とする．以下では

$$P:=\mathbb{Z}^n=\bigoplus_{i=1}^n\mathbb{Z}\varepsilon_i,\quad Q:=\bigoplus_{i=1}^{n-1}\mathbb{Z}\alpha_i=\left\{\mu\in P\ \middle|\ \sum_{i=1}^n\mu_i=0\right\}$$

とおく. P を (GL$_n(\mathbb{C})$ の) weight lattice, Q を (SL$_n(\mathbb{C})$ の) root lattice と呼ぶ.

さて, これまで, q-シフト作用素にも

$$w(\tau^\mu)={\tau_{w(1)}}^{\mu_1}\cdots{\tau_{w(n)}}^{\mu_n} \quad (\mu\in\mathbb{Z}^n,\, w\in\mathfrak{S}_n)$$

によって対称群 $W=\mathfrak{S}_n$ が作用するとみなしてきた. よって, Weyl 群 $W=\mathfrak{S}_n$ と q-シフト作用素から成る可換な乗法群 $\tau^P:=\{\tau^\mu \mid \mu\in P\}$ との半直積 $\tau^P\rtimes W$ が考えられる. 群演算は次のようにして定義される：$\mu\in\mathbb{Z}^n$, $w\in W$ および $\mu'\in\mathbb{Z}^n$, $w'\in W$ に対し

- $\tau^\mu w\cdot\tau^{\mu'}w':=\tau^\mu w\left(\tau^{\mu'}\right)ww'$.

定義 5.2 (アフィン **Weyl** 群 W^{aff}, 拡大アフィン **Weyl** 群 $\widetilde{W}$). Weyl 群 W と乗法群 $\tau^Q:=\{\tau^\mu \mid \mu\in Q\}$ の半直積 $W^{\mathrm{aff}}:=\tau^Q\rtimes W$ をアフィン Weyl 群と呼び, 半直積 $\widetilde{W}:=\tau^P\rtimes W$ を拡大アフィン Weyl 群と呼ぶ.

拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}$ を生成元と基本関係式によって表示することを考える. まず Weyl 群 $W=\mathfrak{S}_n$ は i と $i+1$ を入れ換える隣接互換 $s_i=(i\ \ i+1)$ $(1\le i\le n-1)$ によって生成される. 隣接互換については次が成り立つ：

$$ {s_i}^2=1 \quad (1\le i\le n-1), \quad s_is_j=s_js_i \quad (|i-j|\ge2), \quad s_is_js_i=s_js_is_j \quad (|i-j|=1).$$

s_0 を $s_0:={\tau_1}^{-1}\tau_n(1\ \ n)$ と定め, これをアフィン鏡映と呼ぶ. このとき

$$s_0(x_1)=qx_n, \quad s_0(x_n)=q^{-1}x_1, \quad s_0(x_i)=x_i \quad (i\ne1,n)$$

が成り立つ. また $\omega:=\tau_ns_{n-1}s_{n-2}\cdots s_2s_1$ とおくと

$$\omega(x_1)=qx_n, \quad \omega(x_i)=x_{i-1} \quad (2\le i\le n)$$

が成り立つ. この他, $s_0,s_1,\ldots,s_{n-1}$ と ω について

$$\omega s_i=s_{i-1}\omega \quad (i\in\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n)$$

であることや次が確かめられる：

- $\tau_1=s_1s_2\cdots s_{n-1}\omega$,
- $\tau_2=s_2s_3\cdots s_{n-1}\omega s_1$,
- $\tau_3=s_3s_4\cdots s_{n-1}\omega s_1s_2$,

$$\vdots$$

- $\tau_i=s_is_{i+1}\cdots s_{n-1}\omega s_1\cdots s_{i-1}$,

$$\vdots$$

- $\tau_n=\omega s_1\cdots s_{n-1}$.

上で“$\omega s_i = s_{i-1}\omega$ $(i \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}n)$”と書いたが, この意味は次の通りである. 例えば $n=3$ の場合にこれを真正直に書くと

$$\omega s_2 = s_1\omega, \quad \omega s_1 = s_0\omega, \quad \omega s_0 = \text{“}s_{-1}\text{”}\omega$$

という具合に“s_{-1}”が現れるが, $-1=2 \bmod 3$ と見て“$s_{-1}=s_2$”とみなし

$$\omega s_0 = s_2\omega$$

が成り立つと理解する. 実際にこれらが成り立つことは後に確かめる.

例 5.3. $n=2$ の場合には $s_0={\tau_1}^{-1}\tau_2 s_1$, $\omega=\tau_2 s_1$ である. ${s_0}^2$ を見ると

$${s_0}^2 = {\tau_1}^{-1}\tau_2 s_1 {\tau_1}^{-1}\tau_2 s_1 = {\tau_1}^{-1}\tau_2{\tau_2}^{-1}\tau_1 s_1 s_1 = 1$$

から ${s_0}^2=1$ がわかる. $\omega s_1 \omega^{-1}$ については

$$\omega s_1 \omega^{-1} = \tau_2 s_1 s_1 {s_1}^{-1}{\tau_2}^{-1} = \tau_2 s_1 {\tau_2}^{-1} = \tau_2{\tau_1}^{-1}s_1 = s_0$$

となるので $\omega s_1 = s_0\omega$ がわかる. $\omega s_0 \omega^{-1}$ も同様にできて

$$\omega s_0 \omega^{-1} = \tau_2 s_1 {\tau_1}^{-1}\tau_2 s_1 {s_1}^{-1}{\tau_2}^{-1} = \tau_2{\tau_2}^{-1}s_1\tau_2{\tau_2}^{-1} = s_1$$

となるので $\omega s_0 = s_1\omega$ が成り立つ. ω^2 は

$$\omega^2 = \tau_2 s_1 \tau_2 s_1 = \tau_2\tau_1{s_1}^2 = \tau_1\tau_2$$

なので, $\omega^2=\tau_1\tau_2$ は $n=2$ の場合の拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}$ のすべての元と可換である. また次も成り立つ：

$$s_1\omega = s_1\tau_2 s_1 = \tau_1, \quad \omega{s_1}^{-1} = \tau_2 s_1 {s_1}^{-1} = \tau_2.$$

例 5.4. $n=3$ の場合に $s_0={\tau_1}^{-1}\tau_3(1\ 3)$ および $\omega=\tau_3 s_2 s_1$ の性質を見てみる. 例えば

$${s_0}^2 = {\tau_1}^{-1}\tau_3(1\ 3){\tau_1}^{-1}\tau_3(1\ 3) = {\tau_1}^{-1}\tau_3{\tau_3}^{-1}\tau_1(1\ 3)^2 = 1$$

から, s_0 も s_1, s_2 と同様に ${s_0}^2=1$ を満たす. 次に $\omega s_1 \omega^{-1}$ を見ると

$$\omega s_1 \omega^{-1} = \tau_3 \underbrace{s_2 s_1 s_2}_{(1\ 3)} {\tau_3}^{-1} = \tau_3{\tau_1}^{-1}(1\ 3) = s_0$$

なので $\omega s_1 = s_0\omega$ が成り立つ. $\omega s_2 \omega^{-1}$ も同様にできて

$$\omega s_2 \omega^{-1} = \tau_3 s_2 \underbrace{s_1 s_2 s_1}_{s_2 s_1 s_2} s_2 {\tau_3}^{-1} = s_1$$

となるので $\omega s_2 = s_1\omega$ がわかる. また $\omega s_0 \omega^{-1}$ は

$$\omega s_0 \omega^{-1} = \tau_3 s_2 s_1 {\tau_1}^{-1}\tau_3 \underbrace{(1\ 3)s_1 s_2}_{s_1} {\tau_3}^{-1} = \tau_3 s_2 s_1 {\tau_1}^{-1} s_1 = \tau_3{\tau_3}^{-1}s_2 s_1 s_1 = s_2$$

であるので $\omega s_0{=}s_2\omega$ が成り立つ．以上によって

$$\omega s_1{=}s_0\omega,\quad \omega s_2{=}s_1\omega,\quad \omega s_0{=}s_2\omega$$

がわかったが, これによって, $s_1s_2s_1{=}s_2s_1s_2$ に ω をかけることで

$$s_0s_1s_0{=}s_1s_0s_1,\quad s_2s_0s_2{=}s_0s_2s_0$$

も成り立つことがわかる．また ω^2, ω^3 を見ると

- $\omega^2{=}\tau_3s_2s_1\tau_3s_2s_1{=}\tau_3\tau_2\underbrace{s_2s_1s_2}_{s_1s_2s_1}s_1{=}\tau_2\tau_3s_1s_2,$
- $\omega^3{=}\tau_2\tau_3s_1s_2\tau_3s_2s_1{=}\tau_2\tau_3\tau_1s_1s_2s_2s_1{=}\tau_1\tau_2\tau_3$

がわかる．よって, $\omega^3{=}\tau_1\tau_2\tau_3$ は $n{=}3$ の場合の拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}$ のすべての元と可換である．また次が成り立つこともわかる：

- $s_1s_2\omega{=}s_1s_2\tau_3s_2s_1{=}\tau_1s_1s_2s_2s_1{=}\tau_1,$
- $s_2\omega s_1{=}s_2\tau_3s_2s_1s_1{=}\tau_2s_2s_2{=}\tau_2,$
- $\omega s_1s_2{=}\tau_3s_2s_1s_1s_2{=}\tau_3.$

命題 5.5. 拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}$ は生成元 $\langle s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}, \omega\rangle$ と次の基本関係式によって生成される：

- $n{=}2$ の場合は $\widetilde{W}{=}\langle s_0, s_1, \omega\rangle\big/$(基本関係式) で, 基本関係式は

  - ${s_1}^2{=}1$,　- ${s_0}^2{=}1$,　- $\omega s_1{=}s_0\omega$,　- $\omega s_0{=}s_1\omega$.

- $n{\geq}3$ の場合は $\widetilde{W}{=}\langle s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}, \omega\rangle\big/$(基本関係式) で, 基本関係式は

  - ${s_i}^2{=}1\quad(0{\leq}i{\leq}n{-}1)$,　- $s_is_j{=}s_js_i\quad(|i{-}j|{\geq}2)$,
  - $s_is_js_i{=}s_js_is_j\quad(|i{-}j|{=}1)$,　- $\omega s_i{=}s_{i-1}\omega\quad(i{\in}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n)$.

アフィン Weyl 群 $W^{\mathrm{aff}}{=}\tau^Q{\rtimes}W$ は生成元 $\langle s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}\rangle$ と上の基本関係式のうち ω を含まないものによって生成される.

よって, q-シフト作用素 $\tau_1, \ldots, \tau_n$ と結びつけずに「生成元 $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}, \omega$ と上の基本関係式によって生成される群が拡大アフィン Weyl 群である」と述べられるのであるが, 今回は Macdonald 作用素などの q-差分作用素との関連に興味があるので, 専ら $\widetilde{W}{=}\tau^P{\rtimes}W$ であるとみなす.

以上のことから $W^{\mathrm{aff}}{\subset}\widetilde{W}$ なので,「アフィン Weyl 群」と「“拡大” アフィン Weyl 群」は区別するべきかもしれないが, 以下では, これらをしっかりと区別する必要が生じない限り, $\widetilde{W}$ のことも単にアフィン Weyl 群と呼ぶ.

5.2 アフィン Hecke 環の q-Dunkl 作用素

(拡大) アフィン Weyl 群の群環の基本関係式を変形することで, アフィン Hecke 環が次のように定義される.

定義 5.6 (アフィン Hecke 環). 生成元 $\langle T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}, T_\omega\rangle$ と次の基本関係式によって生成される $\mathbb{C}$-代数 $H\left(\widetilde{W}\right)$ をアフィン Hecke 環と呼ぶ：

- $n{=}2$ の場合は $H\left(\widetilde{W}\right)=\langle T_0, T_1, T_\omega\rangle/(\text{基本関係式})$ で, 基本関係式は
  - $\left(T_i-t^{\frac{1}{2}}\right)\left(T_i+t^{-\frac{1}{2}}\right)=0 \quad (i=0,1)$, • $T_\omega T_1=T_0 T_\omega$, • $T_\omega T_0=T_1 T_\omega$.
- $n{\geq}3$ の場合は $H\left(\widetilde{W}\right)=\langle T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}, T_\omega\rangle/(\text{基本関係式})$ で, 基本関係式は
  - $\left(T_i-t^{\frac{1}{2}}\right)\left(T_i+t^{-\frac{1}{2}}\right)=0 \quad (0\leq i\leq n-1)$, • $T_iT_j=T_jT_i \quad (|i-j|\geq 2)$,
  - $T_iT_jT_i=T_jT_iT_j \quad (|i-j|=1)$, • $T_\omega T_i=T_{i-1}T_\omega \quad (i\in\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n)$.

基本関係式 $\left(T_i-t^{\frac{1}{2}}\right)\left(T_i+t^{-\frac{1}{2}}\right)=0$ $(0\leq i\leq n-1)$ において $t=1$ とおくと ${T_i}^2=1$ となるが, この意味で“アフィン Hecke 環はアフィン Weyl 群の群環の t-変形である”と述べていた. また $T_1, \ldots, T_{n-1}$ たちのみで生成される $\mathbb{C}$-代数 $H(W):=\mathbb{C}\langle T_1, \ldots, T_{n-1}\rangle$ を単に Weyl 群 W の Hecke 環と呼ぶ.

Weyl 群たちの側の拡大の列

$$W=\langle s_1, \ldots, s_{n-1}\rangle\subset W^{\mathrm{aff}}=\langle s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}\rangle\subset\widetilde{W}=\langle s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}, \omega\rangle$$

に対応して, Hecke 環たちの側には次の拡大の列ができている：

$$H(W)=\mathbb{C}\langle T_1, \ldots, T_{n-1}\rangle\subset H\left(W^{\mathrm{aff}}\right):=\mathbb{C}\langle T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}\rangle\subset H\left(\widetilde{W}\right)=\mathbb{C}\langle T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}, T_\omega\rangle.$$

また, アフィン Hecke 環の基本関係式の中の $\left(T_i-t^{\frac{1}{2}}\right)\left(T_i+t^{-\frac{1}{2}}\right)=0$ $(0\leq i\leq n-1)$ から

$${T_i}^2+\left(-t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}\right)T_i-1=0 \Leftrightarrow T_i\left(T_i-t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}\right)=\left(T_i-t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}\right)T_i=1$$

がわかるので, T_i $(0\leq i\leq n-1)$ は可逆元で ${T_i}^{-1}=T_i-t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}$ $(0\leq i\leq n-1)$ である.

命題 5.7 (アフィン Hecke 環の Demazure-Lusztig 作用素による実現). s_i $(1\leq i\leq n-1)$ を Weyl 群 $W=\mathfrak{S}_n$ の隣接互換とし $s_0:={\tau_1}^{-1}\tau_n(1\ \ n)$ とおく. ここで

- $\pi^{\mathrm{DL}}(T_i):=t^{-\frac{1}{2}}\dfrac{1-tx_i/x_{i+1}}{1-x_i/x_{i+1}}(s_i-1)+t^{\frac{1}{2}} \quad (1\leq i\leq n-1)$,
- $\pi^{\mathrm{DL}}(T_0):=t^{-\frac{1}{2}}\dfrac{1-qtx_n/x_1}{1-qx_n/x_1}(s_0-1)+t^{\frac{1}{2}}$,
- $\pi^{\mathrm{DL}}(T_\omega):=\omega=\tau_n s_{n-1}s_{n-2}\cdots s_1$

とおき, $\pi^{\mathrm{DL}}(T_i)$ $(1\leq i\leq n-1)$, $\pi^{\mathrm{DL}}(T_0)$ を Demazure-Lusztig 作用素と呼ぶ. これら

はアフィン Hecke 環 $H\left(\widetilde{W}\right)$ の基本関係式を満たす．よって，これらによって準同型写像 $\pi^{\mathrm{DL}}: H\left(\widetilde{W}\right) \to \mathcal{D}_{q,x}[W]$ が自然に定まる．また $\mathcal{D}_{q,x}[W] \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(x_1,\ldots,x_n))$ とみなすと，組 $\left(\pi^{\mathrm{DL}}, \mathbb{C}(x_1,\ldots,x_n)\right)$ はアフィン Hecke 環 $H\left(\widetilde{W}\right)$ の表現を与える．

例 5.8. $n=2$ の場合にこの命題を確かめてみる．$a(z) := \dfrac{1-tz}{1-z}$ とおくと

$$\pi^{\mathrm{DL}}(T_1) = t^{-\frac{1}{2}} a(x_1/x_2)(s_1-1) + t^{\frac{1}{2}}, \quad \pi^{\mathrm{DL}}(T_0) = t^{-\frac{1}{2}} a(qx_2/x_1)(s_0-1) + t^{\frac{1}{2}}$$

である $(s_0 = \tau_1{}^{-1}\tau_2 s_1)$．また，$a(z)$ について

$$a(z) + a\left(z^{-1}\right) = t+1$$

であることにも注意する．これらによって，$\pi^{\mathrm{DL}}(T_1)$ について

- $\left\{\pi^{\mathrm{DL}}(T_1) - t^{\frac{1}{2}}\right\}\left\{\pi^{\mathrm{DL}}(T_1) + t^{-\frac{1}{2}}\right\} = t^{-1}\left\{t^{\frac{1}{2}}\pi^{\mathrm{DL}}(T_1) - t\right\}\left\{t^{\frac{1}{2}}\pi^{\mathrm{DL}}(T_1) + 1\right\}$

$$\begin{aligned}
&= t^{-1} a(x_1/x_2)(s_1-1)\{a(x_1/x_2)(s_1-1) + t+1\} \\
&= t^{-1} a(x_1/x_2)[\{a(x_2/x_1)s_1 - a(x_1/x_2)\}(s_1-1) + (t+1)(s_1-1)] \\
&= t^{-1} a(x_1/x_2)\{a(x_2/x_1)s_1(1-s_1) - a(x_1/x_2)(s_1-1) + (t+1)(s_1-1)\} \\
&= t^{-1} a(x_1/x_2)[-\underbrace{\{a(x_1/x_2) + a(x_2/x_1)\}}_{t+1}(s_1-1) + (t+1)(s_1-1)] \\
&= t^{-1} a(x_1/x_2)\{-(t+1)(s_1-1) + (t+1)(s_1-1)\} = 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．$\pi^{\mathrm{DL}}(T_0)$ の方は $s_0 a(qx_2/x_1) = a\left(q^{-1}x_1/x_2\right)s_0$ に注意すると

- $\left\{\pi^{\mathrm{DL}}(T_0) - t^{\frac{1}{2}}\right\}\left\{\pi^{\mathrm{DL}}(T_0) + t^{-\frac{1}{2}}\right\} = t^{-1}\left\{t^{\frac{1}{2}}\pi^{\mathrm{DL}}(T_0) - t\right\}\left\{t^{\frac{1}{2}}\pi^{\mathrm{DL}}(T_0) + 1\right\}$

$$\begin{aligned}
&= t^{-1} a(qx_2/x_1)(s_0-1)\{a(qx_2/x_1)(s_0-1) + t+1\} \\
&= t^{-1} a(qx_2/x_1)\left[\left\{a\left(q^{-1}x_1/x_2\right)s_0 - a(qx_2/x_1)\right\}(s_0-1) + (t+1)(s_0-1)\right] \\
&= t^{-1} a(qx_2/x_1)\left\{a\left(q^{-1}x_1/x_2\right)s_0(1-s_0) - a(qx_2/x_1)(s_0-1) + (t+1)(s_0-1)\right\} \\
&= t^{-1} a(qx_2/x_1)[-\underbrace{\left\{a\left(q^{-1}x_1/x_2\right) + a(qx_2/x_1)\right\}}_{t+1}(s_0-1) + (t+1)(s_0-1)] \\
&= t^{-1} a(qx_2/x_1)\{-(t+1)(s_0-1) + (t+1)(s_0-1)\} = 0
\end{aligned}$$

がわかる．また，今回の場合は $\omega = \tau_2 s_1$ であり $\omega a(x_1/x_2) = a(qx_2/x_1)\omega$ なので

- $$\begin{aligned}\pi^{\mathrm{DL}}(T_\omega)\pi^{\mathrm{DL}}(T_1) &= \omega\left\{t^{-\frac{1}{2}} a(x_1/x_2)(s_1-1) + t^{\frac{1}{2}}\right\} = t^{-\frac{1}{2}} a(qx_2/x_1)\omega(s_1-1) + t^{\frac{1}{2}}\omega \\ &= t^{-\frac{1}{2}} a(qx_2/x_1)(s_0-1)\omega + t^{\frac{1}{2}}\omega = \pi^{\mathrm{DL}}(T_0)\pi^{\mathrm{DL}}(T_\omega)\end{aligned}$$

なので $\pi^{\mathrm{DL}}(T_\omega)\pi^{\mathrm{DL}}(T_1) = \pi^{\mathrm{DL}}(T_0)\pi^{\mathrm{DL}}(T_\omega)$ もわかる．同様に，$\omega a(qx_2/x_1) = a(x_1/x_2)\omega$ に注意すると

- $$\begin{aligned}\pi^{\mathrm{DL}}(T_\omega)\pi^{\mathrm{DL}}(T_0) &= \omega\left\{t^{-\frac{1}{2}} a(qx_2/x_1)(s_0-1) + t^{\frac{1}{2}}\right\} = t^{-\frac{1}{2}} a(x_1/x_2)\omega(s_0-1) + t^{\frac{1}{2}}\omega \\ &= t^{-\frac{1}{2}} a(x_1/x_2)(s_1-1)\omega + t^{\frac{1}{2}}\omega = \pi^{\mathrm{DL}}(T_1)\pi^{\mathrm{DL}}(T_\omega)\end{aligned}$$

なので $\pi^{\mathrm{DL}}(T_\omega)\pi^{\mathrm{DL}}(T_0)=\pi^{\mathrm{DL}}(T_1)\pi^{\mathrm{DL}}(T_\omega)$ も成り立つ.

$n=3$ の場合の Demazure-Lusztig 作用素がアフィン Hecke 環の基本関係式を満たすことのチェックは付録にて行う.

ここで次が成り立つことに注意する：

$$\mathbb{C}\left[\widetilde{W}\right]=\mathbb{C}\left[{\tau_1}^{\pm1},\ldots,{\tau_n}^{\pm1}\right][W]\subset\mathcal{D}_{q,x}[W].$$

すなわち, アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}$ の群環 $\mathbb{C}\left[\widetilde{W}\right]$ は q-差分作用素を係数環に持つ Weyl 群 W の群環 $\mathcal{D}_{q,x}[W]$ に含まれる. また, $\mathbb{C}\left[\widetilde{W}\right]$ は q-シフト作用素のみの Laurent 多項式から成る可換な部分環 $\mathbb{C}\left[{\tau_1}^{\pm1},\ldots,{\tau_n}^{\pm1}\right]$ を含んでいる. そこで, アフィン Hecke 環 $H\left(\widetilde{W}\right)$ の中に $\mathbb{C}\left[{\tau_1}^{\pm1},\ldots,{\tau_n}^{\pm1}\right]$ に対応する可換な部分環を作ることを考える. そのためには

- $\tau_1=s_1s_2\cdots s_{n-1}\omega,$
- $\tau_2=s_2s_3\cdots s_{n-1}\omega {s_1}^{-1},$
- $\tau_3=s_3s_4\cdots s_{n-1}\omega {s_1}^{-1}{s_2}^{-1},$

$$\vdots$$

- $\tau_i=s_is_{i+1}\cdots s_{n-1}\omega {s_1}^{-1}\cdots {s_{i-1}}^{-1},$

$$\vdots$$

- $\tau_n=\omega {s_1}^{-1}\cdots {s_{n-1}}^{-1}$

と表せたことに注目すればよい. これを見つつ, $Y_i\in H\left(\widetilde{W}\right)$ $(1\le i\le n)$ を

- $Y_1:=T_1T_2\cdots T_{n-1}T_\omega,$
- $Y_2:=T_2T_3\cdots T_{n-1}T_\omega {T_1}^{-1},$
- $Y_3:=T_3T_4\cdots T_{n-1}T_\omega {T_1}^{-1}{T_2}^{-1},$

$$\vdots$$

- $Y_i:=T_iT_{i+1}\cdots T_{n-1}T_\omega {T_1}^{-1}\cdots {T_{i-1}}^{-1},$

$$\vdots$$

- $Y_n:=T_\omega {T_1}^{-1}\cdots {T_{n-1}}^{-1}$

によって定め, これらを q-Dunkl 作用素と呼ぶ.

アフィン Hecke 環の基本関係式は $\left(T_i-t^{\frac{1}{2}}\right)\left(T_i+t^{-\frac{1}{2}}\right)=0$ $(0\le i\le n-1)$ を除くとアフィン Weyl 群のものと同じ形をしているので, $\tau_1,\ldots,\tau_n\in\widetilde{W}$ が互いに可換であるのと同様に, 上の $Y_1,\ldots,Y_n\in H\left(\widetilde{W}\right)$ たちも互いに可換であることは直感的にはわかる. q-Dunkl 作用素たちの可換性については, 以下に続く具体例の中でもコメントする.

定理 5.9 (q**-Dunkl 作用素**)**.** $Y_1,\ldots,Y_n\in H\left(\widetilde{W}\right)$ を次によって定める：

- $Y_1{:=}T_1T_2\cdots T_{n-1}T_\omega$,
- $Y_2{:=}T_2T_3\cdots T_{n-1}T_\omega {T_1}^{-1}$,
- $Y_3{:=}T_3T_4\cdots T_{n-1}T_\omega {T_1}^{-1}{T_2}^{-1}$,

$$\vdots$$

- $Y_i{:=}T_iT_{i+1}\cdots T_{n-1}T_\omega {T_1}^{-1}\cdots {T_{i-1}}^{-1}$,

$$\vdots$$

- $Y_n{:=}T_\omega {T_1}^{-1}\cdots {T_{n-1}}^{-1}$.

これらを q-Dunkl 作用素と呼ぶ. q-Dunkl 作用素たち $Y_1,\ldots,Y_n\in H\left(\widetilde{W}\right)$ は互いに可換である. また

$$\mathbb{C}\left[{Y_1}^{\pm 1},\ldots,{Y_n}^{\pm 1}\right]\subset H\left(\widetilde{W}\right)$$

は n 変数 Laurent 多項式環に同型な部分環である.

例 5.10. q-Dunkl 作用素たちが互いに可換であることを $n{=}2$ の場合に確かめてみる. この場合の q-Dunkl 作用素は

$$Y_1{=}T_1T_\omega,\quad T_2{=}T_\omega {T_1}^{-1}$$

である. ここで $T_\omega {T_1}^{-1}{=}{T_0}^{-1}T_\omega$, $T_\omega {T_0}^{-1}{=}{T_1}^{-1}T_\omega$ も成り立つことに注意すると

- $Y_1Y_2{=}T_1T_\omega T_\omega {T_1}^{-1}{=}T_1T_\omega {T_0}^{-1}T_\omega{=}T_1{T_1}^{-1}{T_\omega}^2{=}{T_\omega}^2$,
- $Y_2Y_1{=}T_\omega {T_1}^{-1}T_1T_\omega{=}{T_\omega}^2$

から $Y_1Y_2{=}Y_2Y_1{=}{T_\omega}^2$ が従う. $n{=}2$ の場合には, 確かに q-Dunkl 作用素 Y_1, Y_2 は可換である.

例 5.11. $n{=}3$ の場合には次のようになる. この場合の q-Dunkl 作用素は

$$Y_1{=}T_1T_2T_\omega,\quad Y_2{=}T_2T_\omega {T_1}^{-1},\quad Y_3{=}T_\omega {T_1}^{-1}{T_2}^{-1}$$

である. これらの積を調べてみる. ${T_i}^{-1}$ についても $T_\omega {T_i}^{-1}{=}{T_{i-1}}^{-1}T_\omega$ $(i\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ であることから, 例えば Y_1, Y_2 について

- $Y_1Y_2{=}T_1T_2T_\omega T_2T_\omega {T_1}^{-1}{=}T_1T_2T_1T_\omega {T_0}^{-1}T_\omega{=}T_1T_2T_1{T_2}^{-1}{T_\omega}^2$,
- $Y_2Y_1{=}T_2T_\omega {T_1}^{-1}T_1T_2T_\omega{=}T_2T_\omega T_2T_\omega{=}T_2T_1{T_\omega}^2$

であるが, $T_1T_2T_1{=}T_2T_1T_2$ から

$$Y_1Y_2{=}Y_2Y_1{=}T_2T_1{T_\omega}^2$$

を得る. Y_1, Y_3 については

- $Y_1Y_3{=}T_1T_2T_\omega T_\omega {T_1}^{-1}{T_2}^{-1}{=}T_1T_2T_\omega {T_0}^{-1}{T_1}^{-1}T_\omega{=}T_1T_2{T_2}^{-1}{T_0}^{-1}{T_\omega}^2{=}T_1{T_0}^{-1}{T_\omega}^2$,
- $Y_3Y_1{=}T_\omega{T_1}^{-1}{T_2}^{-1}T_1T_2T_\omega{=}{T_0}^{-1}{T_1}^{-1}T_\omega T_1T_2T_\omega{=}{T_0}^{-1}{T_1}^{-1}T_0T_1{T_\omega}^2$

であるが, $T_1T_0T_1{=}T_0T_1T_0$ から $T_0T_1{=}T_1T_0T_1{T_0}^{-1}$ なので

$$Y_1Y_3{=}Y_3Y_1{=}T_1{T_0}^{-1}{T_\omega}^2$$

が成り立つ. Y_2, Y_3 についても同様にすると

- $Y_2Y_3{=}T_2T_\omega{T_1}^{-1}T_\omega{T_1}^{-1}{T_2}^{-1}{=}T_2{T_0}^{-1}T_\omega{T_0}^{-1}{T_1}^{-1}T_\omega{=}T_2{T_0}^{-1}{T_2}^{-1}{T_0}^{-1}{T_\omega}^2$,
- $Y_3Y_2{=}T_\omega{T_1}^{-1}{T_2}^{-1}T_2T_\omega{T_1}^{-1}{=}T_\omega{T_1}^{-1}T_\omega{T_1}^{-1}{=}{T_0}^{-1}T_\omega{T_0}^{-1}T_\omega{=}{T_0}^{-1}{T_2}^{-1}{T_\omega}^2$

であるが, $T_2T_0T_2{=}T_0T_2T_0$ から ${T_2}^{-1}{T_0}^{-1}{T_2}^{-1}{=}{T_0}^{-1}{T_2}^{-1}{T_0}^{-1}$ でもあるので

$$Y_2Y_3{=}Y_3Y_2{=}{T_0}^{-1}{T_2}^{-1}{T_\omega}^2$$

がわかる. 以上によって, q-Dunkl 作用素たち Y_1, Y_2, Y_3 は確かに互いに可換である.

上の例 5.10, 例 5.11 では, q-Dunkl 作用素の可換性を示すのには

- $T_iT_jT_i{=}T_jT_iT_j \quad (|i-j|{=}1)$, • $T_\omega T_i{=}T_{i-1}T_\omega \quad (i{\in}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n)$

しか使っていなかった (より大きな n については $T_iT_j{=}T_jT_i$ $(|i-j|{\geq}2)$ も必要になる). よって, 先に述べた「q-Dunkl 作用素たちは, アフィン Weyl 群の元である $\tau_1,\dots,\tau_n$ の

$$\tau_i{=}s_i\cdots s_{n-1}\omega {s_1}^{-1}\cdots {s_{i-1}}^{-1}$$

という表示において $s_i\to T_i$, $\omega\to T_\omega$ という置き換えを行って作られているので可換である」という直感は正しい.

Weyl 群 W の元の最短表示 $w{=}s_{i_1}\cdots s_{i_\ell}{\in}W$ に対し

$$T_w{:=}T_{i_1}\cdots T_{i_\ell}{\in}H(W)$$

とおく. このとき

$$H(W){=}\mathbb{C}\langle T_1,\dots,T_{n-1}\rangle{=}\bigoplus_{w\in W}\mathbb{C}T_w$$

が成り立つ. また, アフィン Weyl 群の群環 $\mathbb{C}\left[\widetilde{W}\right]$ について

$$\mathbb{C}\left[\widetilde{W}\right]{=}\mathbb{C}\left[{\tau_1}^{\pm 1},\dots,{\tau_n}^{\pm 1}\right][W]$$

であったことを思い起こすと

$$H\left(\widetilde{W}\right){=}\mathbb{C}\left[{Y_1}^{\pm 1},\dots,{Y_n}^{\pm 1}\right]\otimes H(W){=}\bigoplus_{w\in W}\mathbb{C}\left[{Y_1}^{\pm 1},\dots,{Y_n}^{\pm 1}\right]T_w$$

が得られる．q-Dunkl 作用素を構成した後では, Hecke 環 $H(W)$ をアフィン Hecke 環 $H\left(\widetilde{W}\right)$ に拡大することは, $H(W)$ の基礎環 $\mathbb{C}$ を q-Dunkl 作用素の作る可換な Laurent 多項式の環 $\mathbb{C}\left[{Y_1}^{\pm 1},\ldots,{Y_n}^{\pm 1}\right]$ に拡大することであると理解できる.

$\mathbb{C}$-代数 $\mathcal{A}$ に対し

$$\mathcal{Z}\mathcal{A}{:=}\{a{\in}\mathcal{A} \mid \text{任意の } x{\in}\mathcal{A} \text{ に対し } ax{=}xa\}$$

を $\mathcal{A}$ の center と呼ぶのであった.

アフィン Hecke 環 $H\left(\widetilde{W}\right)$ の center $\mathcal{Z}H\left(\widetilde{W}\right)$ について次のことが知られている：

定理 5.12 (Bernstein). アフィン Hecke 環 $H\left(\widetilde{W}\right)$ の center $\mathcal{Z}H\left(\widetilde{W}\right)$ は

$$\mathcal{Z}H\left(\widetilde{W}\right){=}\mathbb{C}\left[{Y_1}^{\pm 1},\ldots,{Y_n}^{\pm 1}\right]^W{=}\left\{f(Y){\in}H\left(\widetilde{W}\right) \;\middle|\; f(y){\in}\mathbb{C}\left[{y_1}^{\pm 1},\ldots,{y_n}^{\pm 1}\right]^W\right\}$$

である (対称な Laurent 多項式に q-Dunkl 作用素を代入したものの全体).

q-差分作用素係数の Weyl 群の群環 $\mathcal{D}_{q,x}[W]$ の元の作用を対称 Laurent 多項式の全体 $\mathbb{C}\left[{x_1}^{\pm 1},\ldots,{x_n}^{\pm 1}\right]^W$ に制限することで q-差分作用素が得られる. $\mathcal{D}_{q,x}[W]$ とは

$$\mathcal{D}_{q,x}[W]{=}\left\{\sum_{\substack{\mu\in\mathbb{Z}^n\\ w\in W}} a_{\mu,w}(x)\tau^\mu w \;\middle|\; a_{\mu,w}(x){\in}\mathbb{C}(x_1,\ldots,x_n)\ (\mu{\in}\mathbb{Z}^n,\ w{\in}W)\right\}$$

であったが, この元 $\displaystyle\sum_{\substack{\mu\in\mathbb{Z}^n\\ w\in W}} a_{\mu,w}(x)\tau^\mu w$ を 1 つとるとき, $f(x){\in}\mathbb{C}\left[{x_1}^{\pm 1},\ldots,{x_n}^{\pm 1}\right]^W$ に対し

$$\sum_{\substack{\mu\in\mathbb{Z}^n\\ w\in W}} a_{\mu,w}(x)\tau^\mu \underbrace{wf(x)}_{f(x)} = \sum_{\substack{\mu\in\mathbb{Z}^n\\ w\in W}} a_{\mu,w}(x)\tau^\mu f(x)$$

が成り立つ. こうして q-差分作用素 $\displaystyle\sum_{\substack{\mu\in\mathbb{Z}^n\\ w\in W}} a_{\mu,w}(x)\tau^\mu{\in}\mathcal{D}_{q,x}$ が得られる.

アフィン Hecke 環の Demazure-Lusztig 作用素による実現 $\pi^{\mathrm{DL}}: H\left(\widetilde{W}\right)\to\mathcal{D}_{q,x}[W]$ と q-Dunkl 作用素 $Y_1,\ldots,Y_n{\in}H\left(\widetilde{W}\right)$ を用いることで, Macdonald 作用素たち $D_x^{(r)}$ $(r{\in}\{0,1,\ldots,n\})$ が次のようにして実現される.

定理 5.13. 基本対称式 $e_r(y){\in}\mathbb{C}[y_1,\ldots,y_n]^W$ に $Y_1,\ldots,Y_n$ を代入し π^{DL} で写したもの $\pi^{\mathrm{DL}}(e_r(Y_1,\ldots,Y_n))$ を $\mathbb{C}\left[{x_1}^{\pm 1},\ldots,{x_n}^{\pm 1}\right]^W$ に制限したものは r 階の Macdonald

作用素である：

- $\pi^{\mathrm{DL}}(e_r(Y_1,\ldots,Y_n))\Big|_{\mathbb{C}[x_1{}^{\pm1},\ldots,x_n{}^{\pm1}]^W}=t^{-\frac{r(n-1)}{2}}D_x^{(r)}\quad (r\in\{0,1,\ldots,n\})$.

q-Dunkl 作用素たち $Y_1,\ldots,Y_n$ は互いに可換なので, これらを基本対称式に代入したものたち $e_r(Y_1,\ldots,Y_n)$ $(r\in\{0,1,\ldots,n\})$ も互いに可換である. よって, この定理 5.13 から Macdonald 作用素たち $D_x^{(r)}$ $(r\in\{0,1,\ldots,n\})$ の可換性も従う.

例 5.14. $n=2$ の場合に上の内容を確かめてみる. q-Dunkl 作用素の定義とアフィン Hecke 環の表現 $\pi^{\mathrm{DL}}:H\left(\widetilde{W}\right)\to\mathcal{D}_{q,x}[W]$ の定義である

- $\pi^{\mathrm{DL}}(T_1)=t^{-\frac{1}{2}}a(x_1/x_2)(s_1-1)+t^{\frac{1}{2}}$,
- $\pi^{\mathrm{DL}}(T_0)=t^{-\frac{1}{2}}a(qx_2/x_1)(s_0-1)+t^{\frac{1}{2}}$,
- $\pi^{\mathrm{DL}}(T_\omega)=\omega=\tau_2 s_1\quad\left(a(z):=\dfrac{1-tz}{1-z}\right)$

から, $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1)$, $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_2)$ は次のようになる：$T_1{}^{-1}=T_1-t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}$ に注意すると

- $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1)=\pi^{\mathrm{DL}}(T_1T_\omega)=t^{-\frac{1}{2}}a(x_1/x_2)(s_1-1)\omega+t^{\frac{1}{2}}\omega$,
- $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_2)=\pi^{\mathrm{DL}}\left(T_\omega T_1{}^{-1}\right)=\omega\left\{t^{-\frac{1}{2}}a(x_1/x_2)(s_1-1)+t^{-\frac{1}{2}}\right\}$

である $(s_0=\tau_1{}^{-1}\tau_2 s_1)$. $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_2)$ は上のままでよい. これらを対称 Laurent 多項式に作用させることを考えて

$$\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1)=t^{-\frac{1}{2}}a(x_1/x_2)(s_1-1)\tau_2 s_1+t^{\frac{1}{2}}\tau_2 s_1=t^{-\frac{1}{2}}a(x_1/x_2)(\tau_1-\tau_2 s_1)+t^{\frac{1}{2}}\tau_2 s_1$$

と書いておくと, 対称 Laurent 多項式 $f(x_1,x_2)\in\mathbb{C}\left[x_1{}^{\pm1},x_2{}^{\pm1}\right]^{\mathfrak{S}_2}$ に対し

- $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1)f(x_1,x_2)=\left\{t^{-\frac{1}{2}}a(x_1/x_2)(\tau_1-\tau_2)+t^{\frac{1}{2}}\tau_2\right\}f(x_1,x_2)$,
- $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_2)f(x_1,x_2)=t^{-\frac{1}{2}}\tau_2 f(x_1,x_2)$

が成り立つ. これらより, $f(x_1,x_2)\in\mathbb{C}\left[x_1{}^{\pm1},x_2{}^{\pm1}\right]^{\mathfrak{S}_2}$ に対し

- $$\begin{aligned}\left\{\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1)+\pi^{\mathrm{DL}}(Y_2)\right\}f(x_1,x_2)&=\left[t^{-\frac{1}{2}}a(x_1/x_2)\tau_1+t^{-\frac{1}{2}}\{-a(x_1/x_2)+1+t\}\tau_2\right]f(x_1,x_2)\\&=t^{-\frac{1}{2}}\underbrace{\{a(x_1/x_2)\tau_1+a(x_2/x_1)\tau_2\}}_{D_x^{(1)}}f(x_1,x_2)\\&=t^{-\frac{1}{2}}D_x^{(1)}f(x_1,x_2)\end{aligned}$$

がわかる. また, 例 5.10 で見たように $Y_1Y_2=T_\omega{}^2$ であったので, 直ちに

$$\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1Y_2)=\omega^2=\tau_1\tau_2=t^{-1}D_x^{(2)}$$

がわかる. よって, $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1Y_2)$ を $\mathbb{C}\left[x_1{}^{\pm1},x_2{}^{\pm1}\right]^{\mathfrak{S}_2}$ に制限したものも当然 $t^{-1}D_x^{(2)}$ である.

定理 5.13 の $n=3$ の場合のチェックは付録で行う.

以下では, q-Dunkl 作用素 $Y_1,\dots,Y_n$ の π^{DL} (Demazure-Lusztig 作用素によるアフィン Hecke 環の表現) による像 $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_i)$ を単に Y_i と書く.

Demazure-Lusztig 作用素によるアフィン Hecke 環の実現によって

$$H\left(\widetilde{W}\right)=\mathbb{C}\left[{Y_1}^{\pm1},\dots,{Y_n}^{\pm1}\right]\otimes H(W)\curvearrowright\mathbb{C}\left[{x_1}^{\pm1},\dots,{x_n}^{\pm1}\right]$$

とみなし, q-Dunkl 作用素たち $Y_1,\dots,Y_n$ を $\mathbb{C}\left[{x_1}^{\pm1},\dots,{x_n}^{\pm1}\right]$ において同時対角化しようとするときに現れるのが "non-symmetric Macdonald polynomials" と呼ばれる Laurent 多項式である.

5.3 二重アフィン Hecke 環の Cherednik 対合と自己双対性

$x_1,\dots,x_n$ の有理函数を係数とする q-差分作用素の環を係数環に持つ Weyl 群 W の群環 $\mathcal{D}_{q,x}[W]=\mathbb{C}(x_1,\dots,x_n)\left[{\tau_1}^{\pm1},\cdots{\tau_n}^{\pm1}\right][W]$ について

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{q,x}[W]&\supset\mathbb{C}\left[{x_1}^{\pm1},\dots,{x_n}^{\pm1}\right]\left[{\tau_1}^{\pm1},\cdots{\tau_n}^{\pm1}\right][W]\\&=\mathbb{C}\left\langle{x_1}^{\pm1},\dots,{x_n}^{\pm1},{\tau_1}^{\pm1},\dots,{\tau_n}^{\pm1},s_1,\dots,s_{n-1}\right\rangle\end{aligned}$$

である. これを見つつ次のようにする.

定義 5.15 (二重アフィン Hecke 環 $\mathcal{H}$).

- $$\begin{aligned}\mathcal{H}&:=\mathbb{C}\left\langle{x_1}^{\pm1},\dots,{x_n}^{\pm1},{Y_1}^{\pm1},\dots,{Y_n}^{\pm1},T_1,\dots,T_{n-1}\right\rangle\\&=\mathbb{C}\left[{x_1}^{\pm1},\dots,{x_n}^{\pm1}\right]\otimes H\left(\widetilde{W}\right)\end{aligned}$$

を二重アフィン Hecke 環 (double affine Hecke algebra) と呼ぶ.

二重アフィン Hecke 環の生成元と基本関係式による定義は存在するが, 今回は, アフィン Hecke 環の Demazure-Lusztig 作用素による実現によって $\mathcal{H}\subset\mathcal{D}_{q,x}[W]$ であると思っている.

定義 5.16 (Cherednik 対合). 次によって $\mathbb{C}$-代数の反同型 $\phi:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ が定まる：

$$\phi(x_i):={Y_i}^{-1},\quad \phi(Y_i):={x_i}^{-1}\quad(1\le i\le n),\quad \phi(T_i):=T_i\quad(1\le i\le n-1).$$

このとき $\phi^2=\mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ である. この ϕ を Cherednik 対合と呼ぶ.

成分が有理数の多重指数 $\rho\in\mathbb{Q}^n$ を次によって定める：

$$\rho:=\delta-\frac{n-1}{2}(1,1,\dots,1).$$

ここで $|\delta|=\dfrac{n(n-1)}{2}$ なので $|\rho|=0$ であることに注意する.

定義 5.17. (1) 写像 $\langle\bullet\rangle:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ を

$$\langle A\rangle := A(1)\Big|_{x=t^{-\rho}}$$

によって定める．これについて $\langle\phi(A)\rangle=\langle A\rangle$ $(A\in\mathcal{H})$ が成り立つ．

(2) 写像 $\langle\bullet,\bullet\rangle:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ を

$$\langle A,B\rangle := \langle\phi(A)B\rangle = \{(\phi(A))B\}(1)\Big|_{x=t^{-\rho}}$$

によって定義する．このとき $\langle A,B\rangle=\langle B,A\rangle$ $(A,\ B\in\mathcal{H})$ が成り立つ．この $\langle\bullet,\bullet\rangle$ は Fischer 内積の一種である．

以上の準備によって Macdonald 多項式の特殊値の自己双対性を理解することができるが, ここで次の補題を用意する．

補題 5.18. 同次対称多項式 $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ および分割 $\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対し

$$f(Y)P_\lambda(x)=f\left(q^\lambda t^\rho\right)P_\lambda(x).$$

証明. 第 1 章において述べた対称式の基本定理と

$$e_r(Y)\Big|_{\mathbb{C}[x_1{}^{\pm1},\ldots,x_n{}^{\pm1}]^{\mathfrak{S}_n}} = t^{-\frac{r(n-1)}{2}}D_x^{(r)} \quad (r\in\{0,1,\ldots,n\})$$

から, $r\in\{0,1,\ldots,n\}$ および $\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対し

$$e_r(Y)P_\lambda(x)=e_r\left(q^\lambda t^\rho\right)P_\lambda(x)$$

が確かめられれば十分である．これは次のようにして成り立つ：

$$e_r(Y)P_\lambda(x)=t^{-\frac{r(n-1)}{2}}D_x^{(r)}P_\lambda(x)=t^{-\frac{r(n-1)}{2}}e_r\left(q^\lambda t^\delta\right)P_\lambda(x)=e_r\left(q^\lambda t^\rho\right)P_\lambda(x). \quad \square$$

基本対称式の性質である

$$e_r\left(x_1{}^{-1},\ldots,x_n{}^{-1}\right)=(x_1\cdots x_n)^{-1}e_{n-r}(x_1,\ldots,x_n)$$

から次が成り立つ：

$$e_r\left(q^{-\lambda}t^{-\rho}\right)=q^{-|\lambda|}e_{n-r}\left(q^\lambda t^\rho\right) \quad (\lambda\in\mathcal{P}_n).$$

これより, $e_r\left(Y^{-1}\right)$ を Macdonald 多項式 $P_\lambda(x)$ に作用させたものは

$$e_r\left(Y^{-1}\right)P_\lambda(x)=\underbrace{(Y_1\cdots Y_n)^{-1}}_{\tau_1{}^{-1}\cdots\tau_n{}^{-1}}e_{n-r}(Y)P_\lambda(x)=q^{-|\lambda|}e_{n-r}\left(q^\lambda t^\rho\right)P_\lambda(x)=e_r\left(q^{-\lambda}t^{-\rho}\right)P_\lambda(x)$$

となる．よって, 先の補題と同様に, 同次対称多項式 $f(x)$ と分割 $\lambda\in\mathcal{P}_n$ について次が成り立つ：

$$f\left(Y^{-1}\right)P_\lambda(x)=f\left(q^{-\lambda}t^{-\rho}\right)P_\lambda(x).$$

上で定めた内積 $\langle\bullet,\bullet\rangle$ を用いると, Macdonald 多項式の特殊値の自己双対性が直ちに従う．まず

$$\begin{aligned}\langle P_\lambda(x),P_\mu(x)\rangle&=\{(\phi(P_\lambda(x)))P_\mu(x)\}(1)\Big|_{x=t^{-\rho}}=P_\lambda\left(Y^{-1}\right)P_\mu(x)\Big|_{x=t^{-\rho}}\\&=P_\lambda\left(q^{-\mu}t^{-\rho}\right)P_\mu(x)\Big|_{x=t^{-\rho}}=P_\lambda\left(q^{-\mu}t^{-\rho}\right)P_\mu\left(t^{-\rho}\right)\end{aligned}$$

であるが (途中で補題 5.18 を用いた), 一方で

$$\langle P_\lambda(x),P_\mu(x)\rangle=\langle P_\mu(x),P_\lambda(x)\rangle=P_\mu\left(q^{-\lambda}t^{-\rho}\right)P_\lambda\left(t^{-\rho}\right)$$

でもあるので

$$P_\lambda\left(q^{-\mu}t^{-\rho}\right)P_\mu\left(t^{-\rho}\right)=P_\mu\left(q^{-\lambda}t^{-\rho}\right)P_\lambda\left(t^{-\rho}\right)\Leftrightarrow\frac{P_\lambda\left(q^{-\mu}t^{-\rho}\right)}{P_\lambda\left(t^{-\rho}\right)}=\frac{P_\mu\left(q^{-\lambda}t^{-\rho}\right)}{P_\mu\left(t^{-\rho}\right)}$$

が得られる．これを q, t 依存性を明示して書くと

$$\frac{P_\lambda(q^{-\mu}t^{-\rho};q,t)}{P_\lambda\left(t^{-\rho};q,t\right)}=\frac{P_\mu\left(q^{-\lambda}t^{-\rho};q,t\right)}{P_\mu\left(t^{-\rho};q,t\right)}$$

であるが, ここで $q\to q^{-1}$, $t\to t^{-1}$ とすると

$$\frac{P_\lambda\left(q^{\mu}t^{\rho};q^{-1},t^{-1}\right)}{P_\lambda\left(t^{\rho};q^{-1},t^{-1}\right)}=\frac{P_\mu\left(q^{\lambda}t^{\rho};q^{-1},t^{-1}\right)}{P_\mu\left(t^{\rho};q^{-1},t^{-1}\right)}$$

である．このとき, Macdonald 多項式の性質である

- $P_\lambda\left(x;q^{-1},t^{-1}\right)=P_\lambda(x;q,t)\quad(\lambda\in\mathcal{P}_n)$

を使うことで (これについては後述する)

$$\frac{P_\lambda(q^{\mu}t^{\rho};q,t)}{P_\lambda(t^{\rho};q,t)}=\frac{P_\mu\left(q^{\lambda}t^{\rho};q,t\right)}{P_\mu(t^{\rho};q,t)}$$

がわかる．Macdonald 多項式は同次対称多項式なので

$$P_\lambda(q^{\mu}t^{\rho};q,t)=P_\lambda\left(q^{\mu}t^{\delta};q,t\right)t^{-\frac{n-1}{2}|\lambda|}$$

などとできるが, この性質によって

- $\dfrac{P_\lambda\left(q^{\mu}t^{\delta};q,t\right)}{P_\lambda\left(t^{\delta};q,t\right)}=\dfrac{P_\mu\left(q^{\lambda}t^{\delta};q,t\right)}{P_\mu\left(t^{\delta};q,t\right)}$

が得られる．

上の話の途中で “$P_\lambda(x;q,t){=}P_\lambda\bigl(x;q^{-1},t^{-1}\bigr)$” が成り立つことを使ったが, これは Macdonald 作用素 D_x において $q\to q^{-1}$, $t\to t^{-1}$ としたものである

- $D_x\big|_{q\to q^{-1},\,t\to t^{-1}}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{t^{-1}x_i-x_j}{x_i-x_j}T_{q^{-1},x_i}$

が, 元の Macdonald 作用素 D_x と可換であることから従う. 実際, これを認めると, $\lambda\in\mathcal{P}_n$ を 1 つとるとき, Macdonald 作用素 D_x は 1 次元部分空間

$$\mathbb{C}P_\lambda\bigl(x;q^{-1},t^{-1}\bigr)\subset\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$$

を不変に保つ. すなわち

$$D_xP_\lambda\bigl(x;q^{-1},t^{-1}\bigr)\propto P_\lambda\bigl(x;q^{-1},t^{-1}\bigr)$$

である. また, $P_\lambda\bigl(x;q^{-1},t^{-1}\bigr)$ は係数たち c_μ $(\mu<\lambda)$ がとれて

$$P_\lambda\bigl(x;q^{-1},t^{-1}\bigr)=P_\lambda(x;q,t)+\sum_{\mu<\lambda}c_\mu P_\mu(x;q,t)$$

と表示できる. このとき

$$D_xP_\lambda\bigl(x;q^{-1},t^{-1}\bigr)=d_\lambda P_\lambda(x;q,t)+\sum_{\mu<\lambda}c_\mu d_\mu P_\mu(x;q,t)\qquad\left(d_\lambda=\sum_{i=1}^{n}q^{\lambda_i}t^{n-i}\right)$$

であるが, もし $c_\mu\neq0$ なる分割 μ が存在する場合, $D_xP_\lambda\bigl(x;q^{-1},t^{-1}\bigr)$ は $P_\lambda\bigl(x;q^{-1},t^{-1}\bigr)$ のスカラー倍にはなり得ない ($\lambda\neq\mu$ ならば $d_\lambda\neq d_\mu$ なので). 以上によって $P_\lambda\bigl(x;q^{-1},t^{-1}\bigr)=P_\lambda(x;q,t)$ がわかる.

よって, あとは Macdonald 作用素 D_x と $D_x\big|_{q\to q^{-1},\,t\to t^{-1}}$ が可換であるかどうか確かめればよいが, これを見るのには自由場表示を用いるのがよいと筆者は考える (D_x と $D_x\big|_{q\to q^{-1},\,t\to t^{-1}}$ の交換関係を直接調べるのは, 筆者には困難であるように思われた). 自由場表示とは, ある代数の表現や微分作用素, q-差分作用素などをボソンを用いて実現することである. Macdonald 作用素はボソンの作用素を適当に用意することで自由場表示できることが知られている. こういった話題については次の本を参照されたい :

- 白石 潤一『量子可積分系入門 Lectures on Quantum Integrable Systems』(サイエンス社, 2003)

アフィン Hecke 環については

- I.G. Macdonald『Affine Hecke Algebras and Orthogonal Polynomials』(Cambridge University Press, 2003)
- Ivan Cherednik『Double Affine Hecke Algebras』(Cambridge University Press, 2005)

などを参照してほしい. この他には,

- 堀田 良之, 渡辺 敬一, 庄司 俊明, 三町 勝久『群論の進化』(朝倉書店, 2004)

の中の三町 氏による「ダイソンからマクドナルドまで—マクドナルド多項式入門—」にも, アフィン Hecke 環についての解説がある.

第 6 章　付録

ここでは, 本文中で詳しく述べられなかったような話題について補足する.

6.1　部分分数分解

第 2 章の 2.5 節「1 行の分割に付随する Macdonald 多項式」にて, ある部分分数分解の恒等式を用いた. ここではこれについて解説する.

命題 6.1 (部分分数分解). n を自然数とする. $t_1,\dots,t_n\in\mathbb{C}^*$ は $t_1\cdots t_n\neq 1$ である複素数とし, $t_1,\dots,t_n$ をすべてかけたものを $t_{(n)}:=t_1\cdots t_n$ と書く. $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{C}$ を相異なる複素数とする. このとき, $z\in\mathbb{C}$ の有理函数についての次の恒等式が成り立つ：

- $$\prod_{i=1}^{n}\frac{1-t_ix_iz}{1-x_iz}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1-t_i}{1-t_{(n)}}\cdot\frac{1-t_{(n)}x_iz}{1-x_iz}\prod_{j\neq i}\frac{x_i-t_jx_j}{x_i-x_j}.$$

証明. 素朴な計算による証明と複素函数の知識を使う証明を紹介する.

- **素朴な計算による証明.** n に関する帰納法によって証明する. $n=1$ の場合にはやるべきことは特にない. $a\neq b$ なる複素数 a, b を含む

$$\frac{1}{(1-az)(1-bz)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{1-az}-\frac{b}{1-bz}\right)$$

という z の有理函数の恒等式が成り立つことを使うと, $n=2$ の場合は次のようになる：

- $$\begin{aligned}
&\frac{1-t_1x_1z}{1-x_1z}\cdot\frac{1-t_2x_2z}{1-x_2z}\\
&=\frac{1-t_1+t_1(1-x_1z)}{1-x_1z}\cdot\frac{1-t_2+t_2(1-x_2z)}{1-x_2z}=\left(t_1+\frac{1-t_1}{1-x_1z}\right)\left(t_2+\frac{1-t_2}{1-x_2z}\right)\\
&=t_1t_2+t_2\frac{1-t_1}{1-x_1z}+t_1\frac{1-t_2}{1-x_2z}+\frac{1-t_1}{1-x_1z}\cdot\frac{1-t_2}{1-x_2z}\\
&=t_1t_2+t_2\frac{1-t_1}{1-x_1z}+t_1\frac{1-t_2}{1-x_2z}+\frac{(1-t_1)(1-t_2)}{x_1-x_2}\left(\frac{x_1}{1-x_1z}-\frac{x_2}{1-x_2z}\right)\\
&=t_1t_2+\frac{1-t_1}{1-x_1z}\cdot\frac{x_1-t_2x_2}{x_1-x_2}+\frac{1-t_2}{1-x_2z}\cdot\frac{x_2-t_1x_1}{x_2-x_1}\\
&=t_1t_2+\frac{1-t_1}{1-t_1t_2}\cdot\frac{1-t_1t_2}{1-x_1z}\cdot\frac{x_1-t_2x_2}{x_1-x_2}+\frac{1-t_2}{1-t_1t_2}\cdot\frac{1-t_1t_2}{1-x_2z}\cdot\frac{x_2-t_1x_1}{x_2-x_1}\\
&=t_1t_2+\frac{1-t_1}{1-t_1t_2}\left(\frac{1-t_1t_2x_1z}{1-x_1z}-t_1t_2\right)\frac{x_1-t_2x_2}{x_1-x_2}+\frac{1-t_2}{1-t_1t_2}\left(\frac{1-t_1t_2x_2z}{1-x_2z}-t_1t_2\right)\frac{x_2-t_1x_1}{x_2-x_1}\\
&=\frac{1-t_1}{1-t_1t_2}\cdot\frac{1-t_1t_2x_1z}{1-x_1z}\cdot\frac{x_1-t_2x_2}{x_1-x_2}+\frac{1-t_2}{1-t_1t_2}\cdot\frac{1-t_1t_2x_2z}{1-x_2z}\cdot\frac{x_2-t_1x_1}{x_2-x_1}.
\end{aligned}$$

次にある $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ があって, この n に対しては上の部分分数分解が成り立つと仮定する. この仮定の下では

- $$\prod_{i=1}^{n+1}\frac{1-t_ix_iz}{1-x_iz}=\frac{1-t_{n+1}x_{n+1}z}{1-x_{n+1}z}\prod_{i=1}^{n}\frac{1-t_ix_iz}{1-x_iz}$$
$$=\frac{1-t_{n+1}x_{n+1}z}{1-x_{n+1}z}\sum_{i=1}^{n}\frac{1-t_i}{1-t_{(n)}}\cdot\frac{1-t_{(n)}x_iz}{1-x_iz}\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}\frac{x_i-t_jx_j}{x_i-x_j}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1-t_i}{1-t_{(n)}}\cdot\frac{1-t_{n+1}}{1-t_{(n+1)}}\cdot\frac{1-t_{(n+1)}x_{n+1}z}{1-x_{n+1}z}\cdot\frac{x_{n+1}-t_{(n)}x_i}{x_{n+1}-x_i}\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}\frac{x_i-t_jx_j}{x_i-x_j}$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{1-t_i}{1-t_{(n)}}\cdot\frac{1-t_{(n)}}{1-t_{(n+1)}}\cdot\frac{1-t_{(n+1)}x_iz}{1-x_iz}\cdot\frac{x_i-t_{n+1}x_{n+1}}{x_i-x_{n+1}}\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}\frac{x_i-t_jx_j}{x_i-x_j}$$

であるが, ここに現れている 1 つ目の和について

- $$\sum_{i=1}^{n}\frac{1-t_i}{1-t_{(n)}}\cdot\frac{1-t_{n+1}}{1-t_{(n+1)}}\cdot\frac{1-t_{(n+1)}x_{n+1}z}{1-x_{n+1}z}\cdot\frac{x_{n+1}-t_{(n)}x_i}{x_{n+1}-x_i}\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}\frac{x_i-t_jx_j}{x_i-x_j}$$
$$=\frac{1-t_{n+1}}{1-t_{(n+1)}}\cdot\frac{1-t_{(n+1)}x_{n+1}z}{1-x_{n+1}z}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{1-t_i}{1-t_{(n)}}\cdot\frac{1-t_{(n)}x_i{x_{n+1}}^{-1}}{1-x_i{x_{n+1}}^{-1}}\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}\frac{x_i-t_jx_j}{x_i-x_j}}_{\text{帰納法の仮定が使える}}$$
$$=\frac{1-t_{n+1}}{1-t_{(n+1)}}\cdot\frac{1-t_{(n+1)}x_{n+1}z}{1-x_{n+1}z}\prod_{i=1}^{n}\frac{1-t_ix_i{x_{n+1}}^{-1}}{1-x_i{x_{n+1}}^{-1}}$$

とできることがわかる. よって

- $$\prod_{i=1}^{n+1}\frac{1-t_ix_iz}{1-x_iz}$$
$$=\frac{1-t_{n+1}}{1-t_{(n+1)}}\cdot\frac{1-t_{(n+1)}x_{n+1}z}{1-x_{n+1}z}\prod_{i=1}^{n}\frac{x_{n+1}-t_ix_i}{x_{n+1}-x_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1-t_i}{1-t_{(n+1)}}\cdot\frac{1-t_{(n+1)}x_iz}{1-x_iz}\prod_{\substack{1\leq j\leq n+1\\ j\neq i}}\frac{x_i-t_jx_j}{x_i-x_j}$$
$$=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1-t_i}{1-t_{(n+1)}}\cdot\frac{1-t_{(n+1)}x_iz}{1-x_iz}\prod_{\substack{1\leq j\leq n+1\\ j\neq i}}\frac{x_i-t_jx_j}{x_i-x_j}$$

が成り立つことがわかる.

- **複素函数の知識を用いる証明.** $z\in\mathbb{C}$ の有理函数としての

$$f(z):=\prod_{i=1}^{n}\frac{1-t_ix_iz}{1-x_iz}$$

は $z=x_i{}^{-1}$ $(1\leq i\leq n)$ に 1 位の極を持つ．また

$$\lim_{z\to x_i{}^{-1}}(1-x_iz)\prod_{j=1}^{n}\frac{1-t_jx_jz}{1-x_jz}=(1-t_i)\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}\frac{1-t_jx_jx_i{}^{-1}}{1-x_jx_i{}^{-1}}$$

であるので，$f(z)$ の主要部を

$$P(z):=\sum_{i=1}^{n}\frac{1-t_i}{1-x_iz}\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}\frac{x_i-t_jx_j}{x_i-x_j}$$

とおくとき，$f(z)-P(z)$ は $\mathbb{C}$ 全域で正則である．また

$$\lim_{z\to\infty}\{f(z)-P(z)\}=\lim_{z\to\infty}\left\{\prod_{i=1}^{n}\frac{1-t_ix_iz}{1-x_iz}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1-t_i}{1-x_iz}\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}\frac{x_i-t_jx_j}{x_i-x_j}\right\}=t_{(n)}$$

なので，$f(z)-P(z)$ は $\mathbb{C}$ 上で有界でもある．よって，Liouville の定理により $f(z)-P(z)$ は定数であることがわかるが，上に述べたことから

$$f(z)-P(z)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1-t_ix_iz}{1-x_iz}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1-t_i}{1-x_iz}\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}\frac{x_i-t_jx_j}{x_i-x_j}=t_{(n)}$$

である．ここで $z=0$ とおくと

$$1-\sum_{i=1}^{n}(1-t_i)\prod_{j\neq i}\frac{x_i-t_jx_j}{x_i-x_j}=t_{(n)}\Leftrightarrow 1=\sum_{i=1}^{n}\frac{1-t_i}{1-t_{(n)}}\prod_{j\neq i}\frac{x_i-t_jx_j}{x_i-x_j}$$

がわかるので，以上によって次が成り立つ：

- $$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}\frac{1-t_ix_iz}{1-x_iz}&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1-t_i}{1-x_iz}\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}\frac{x_i-t_jx_j}{x_i-x_j}+t_{(n)}\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1-t_i}{1-t_{(n)}}\cdot\frac{1-t_{(n)}}{1-x_iz}\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}\frac{x_i-t_jx_j}{x_i-x_j}+t_{(n)}\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1-t_i}{1-t_{(n)}}\cdot\frac{1-t_{(n)}x_iz+t_{(n)}x_iz-t_{(n)}}{1-x_iz}\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}\frac{x_i-t_jx_j}{x_i-x_j}+t_{(n)}\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1-t_i}{1-t_{(n)}}\cdot\frac{1-t_{(n)}x_iz}{1-x_iz}\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}\frac{x_i-t_jx_j}{x_i-x_j}+t_{(n)}\underbrace{\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1-t_i}{1-t_{(n)}}\prod_{j\neq i}\frac{x_i-t_jx_j}{x_i-x_j}\right)}_{0}\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1-t_i}{1-t_{(n)}}\cdot\frac{1-t_{(n)}x_iz}{1-x_iz}\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}\frac{x_i-t_jx_j}{x_i-x_j}.\quad\square\end{aligned}$$

上の部分分数分解を第 2 章で用いた格好にするには次のようにすればよい．まず $t_1=t_2=\cdots=t_n=t$ とおくと

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1-tx_iz}{1-x_iz}=\frac{1-t}{1-t^n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1-t^nx_iz}{1-x_iz}\prod_{j\neq i}\frac{x_i-tx_j}{x_i-x_j}$$

となる．次に $z\to t^{-1}z$ とシフトすると

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1-x_iz}{1-t^{-1}x_iz}=\frac{1-t}{1-t^n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1-t^{n-1}x_iz}{1-t^{-1}x_iz}\prod_{j\neq i}\frac{x_i-tx_j}{x_i-x_j}$$

である．最後に $t\to t^{-1}$ とすると

- $$\prod_{i=1}^{n}\frac{1-x_iz}{1-tx_iz}=\frac{1-t^{-1}}{1-t^{-n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1-t^{-n+1}x_iz}{1-tx_iz}\prod_{j\neq i}\frac{x_i-t^{-1}x_j}{x_i-x_j}=\frac{1-t}{1-t^n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1-t^{-n+1}x_iz}{1-tx_iz}\prod_{j\neq i}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}$$

が得られる．これが第 2 章で用いた部分分数分解である．

6.2　n=3 の場合のアフィン Hecke 環に関する計算

第 5 章の 5.2「アフィン Hecke 環の q-Dunkl 作用素」にて，アフィン Hecke 環 $H\left(\widetilde{W}\right)$ の Demazure-Lusztig 作用素による実現 $\pi^{\mathrm{DL}}:H\left(\widetilde{W}\right)\to\mathcal{D}_{q,x}[W]$ について述べた．ここでは，$\pi^{\mathrm{DL}}:H\left(\widetilde{W}\right)\to\mathcal{D}_{q,x}[W]$ がアフィン Hecke 環 $H\left(\widetilde{W}\right)$ の表現を与えることなどを n=3 の場合に確かめる．

アフィン Hecke 環とその Demazure-Lusztig 作用素による実現について振り返る (q-差分作用素やアフィン Weyl 群 $\widetilde{W}$ などについては第 5 章の 5.1「アフィン Weyl 群」を参照)．生成元 $T_0,T_1,\ldots,T_{n-1},T_\omega$ と次の基本関係式によって生成される $\mathbb{C}$-代数をアフィン Hecke 環 $H\left(\widetilde{W}\right)$ という：

- $\left(T_i-t^{\frac{1}{2}}\right)\left(T_i+t^{-\frac{1}{2}}\right)=0\quad(0\le i\le n-1)$,　• $T_iT_j=T_jT_i\quad(|i-j|\ge 2)$,
- $T_iT_jT_i=T_jT_iT_j\quad(|i-j|=1)$,　• $T_\omega T_i=T_{i-1}T_\omega\quad(i\in\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n)$.

n=2 の場合は T_0,T_1,T_ω が生成元で基本関係式は $\left(T_i-t^{\frac{1}{2}}\right)\left(T_i+t^{-\frac{1}{2}}\right)=0\ (i=0,1)$ および $T_\omega T_1=T_0T_\omega$，$T_\omega T_0=T_1T_\omega$ のみである．アフィン Hecke 環 $H\left(\widetilde{W}\right)$ には次のような実現がある．$s_1,\ldots,s_{n-1}\in W=\mathfrak{S}_n$ を隣接互換とし $s_0:=\tau_1{}^{-1}\tau_n(1\ n)$，$\omega:=\tau_ns_{n-1}\cdots s_1$ とおく．z の有理函数 $a(z)$ を $a(z):=\dfrac{1-tz}{1-z}$ とおくとき，

- $\pi^{\mathrm{DL}}(T_i):=t^{-\frac{1}{2}}a(x_i/x_{i+1})(s_i-1)+t^{\frac{1}{2}}\quad(1\le i\le n-1)$,
- $\pi^{\mathrm{DL}}(T_0):=t^{-\frac{1}{2}}a(qx_n/x_1)(s_0-1)+t^{\frac{1}{2}}$,
- $\pi^{\mathrm{DL}}(T_\omega):=\omega=\tau_ns_{n-1}\cdots s_1$

はアフィン Hecke 環 $H\left(\widetilde{W}\right)$ の基本関係式を満たす．これら $\pi^{\mathrm{DL}}(T_0),\pi^{\mathrm{DL}}(T_1),\ldots,\pi^{\mathrm{DL}}(T_{n-1})$ は Demazure-Lusztig 作用素と呼ばれる．よって，これによって準同型 $\pi^{\mathrm{DL}}:H\left(\widetilde{W}\right)\to\mathcal{D}_{q,x}[W]$ が自然に定まる．

例 **6.2.** ここでは Demazure-Lusztig 作用素がアフィン Hecke 環の基本関係式を満たすことを $n{=}3$ の場合に確かめる．計算を始める前に，使う記号を少し変えておく．アフィン Hecke 環 $H\left(\widetilde{W}\right)$ の生成元 $T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}$ を $t^{\frac{1}{2}}$ 倍した

$$S_i{:=}t^{\frac{1}{2}}T_i \quad (0{\le}i{\le}n{-}1)$$

を用いると，$H\left(\widetilde{W}\right)$ の基本関係式 $\left(T_i{-}t^{\frac{1}{2}}\right)\left(T_i{+}t^{-\frac{1}{2}}\right){=}0$ $(0{\le}i{\le}n{-}1)$ は

$$(S_i{-}t)(S_i{+}1){=}0 \quad (0{\le}i{\le}n{-}1)$$

と表される (他の基本関係式はただ $T_i \to S_i$ と置き換えたものになる)．よって，以下では

- $\pi^{\mathrm{DL}}(S_i){:=}t^{\frac{1}{2}}\pi^{\mathrm{DL}}(T_i){=}a(x_i/x_{i+1})(s_i{-}1){+}t \quad (1{\le}i{\le}n{-}1)$,
- $\pi^{\mathrm{DL}}(S_0){:=}t^{\frac{1}{2}}\pi^{\mathrm{DL}}(T_0){=}a(qx_n/x_1)(s_0{-}1){+}t$

および $\pi^{\mathrm{DL}}(T_\omega){=}\omega{=}\tau_n s_{n-1}\cdots s_1$ がアフィン Hecke 環の基本関係式を満たすことを $n{=}3$ の場合に示す (こうしておくと t の分数冪が現れず，計算ミスが減らせると思う)．

$n{=}3$ の場合の Demazure-Lusztig 作用素は

- $\pi^{\mathrm{DL}}(S_1){=}a(x_1/x_2)(s_1{-}1){+}t$, • $\pi^{\mathrm{DL}}(S_2){=}a(x_2/x_3)(s_2{-}1){+}t$,
- $\pi^{\mathrm{DL}}(S_0){=}a(qx_3/x_1)(s_0{-}1){+}t$

で $s_0{=}{\tau_1}^{-1}\tau_3(1\ 3)$, $\pi^{\mathrm{DL}}(T_\omega){=}\omega{=}\tau_3 s_2 s_1$ である．この場合には $s_1s_2s_1{=}s_2s_1s_2{=}(1\ 3)$ が成り立つ．以下ではこれらの関係を調べることになる．

- $(S_i{-}t)(S_i{+}1){=}0$ $(0{\le}i{\le}2)$ **について．** $i{=}1,2$ の場合は
  - $\left\{\pi^{\mathrm{DL}}(S_i){-}t\right\}\left\{\pi^{\mathrm{DL}}(S_i){+}1\right\}$

$$\begin{aligned}
&{=}a(x_i/x_{i+1})(s_i{-}1)\{a(x_i/x_{i+1})(s_i{-}1){+}t{+}1\}\\
&{=}a(x_i/x_{i+1})[\{a(x_{i+1}/x_i)s_i{-}a(x_i/x_{i+1})\}(s_i{-}1){+}(t{+}1)(s_i{-}1)]\\
&{=}a(x_i/x_{i+1})\Big\{a(x_{i+1}/x_i)s_i(s_i{-}1){-}a(x_i/x_{i+1})(s_i{-}1){+}(t{+}1)(s_i{-}1)\Big\}\\
&{=}a(x_i/x_{i+1})\Big[{-}\underbrace{\{a(x_{i+1}/x_i){+}a(x_i/x_{i+1})\}}_{t+1}(s_i{-}1){+}(t{+}1)(s_i{-}1)\Big]{=}0
\end{aligned}$$

という具合に確かめられる．途中で $a(z){+}a\left(z^{-1}\right){=}t{+}1$ を用いた．$\pi^{\mathrm{DL}}(S_0)$ については，$s_0a(qx_3/x_1){=}a\left(q^{-1}x_1/x_3\right)s_0$ に注意すると

- $\left\{\pi^{\mathrm{DL}}(S_0){-}t\right\}\left\{\pi^{\mathrm{DL}}(S_0){+}1\right\}$

$$\begin{aligned}
&{=}a(qx_3/x_1)(s_0{-}1)\{a(qx_3/x_1)(s_0{-}1){+}t{+}1\}\\
&{=}a(qx_3/x_1)\left[\left\{a\left(q^{-1}x_1/x_3\right)s_0{-}a(qx_3/x_1)\right\}(s_0{-}1){+}(t{+}1)(s_0{-}1)\right]\\
&{=}a(qx_3/x_1)\Big\{a\left(q^{-1}x_1/x_3\right)s_0(s_0{-}1){-}a(qx_3/x_1)(s_0{-}1){+}(t{+}1)(s_0{-}1)\Big\}\\
&{=}a(qx_3/x_1)\Big[{-}\underbrace{\left\{a\left(q^{-1}x_1/x_3\right){+}a(qx_3/x_1)\right\}}_{t+1}(s_0{-}1){+}(t{+}1)(s_0{-}1)\Big]{=}0.
\end{aligned}$$

- $T_\omega S_i = S_{i-1} T_\omega \quad (i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ **について.** まず $\omega\pi^{\mathrm{DL}}(S_1)$ を見ると

$$\bullet\ \begin{aligned}\omega\pi^{\mathrm{DL}}(S_1) &= \tau_3 s_2 s_1 \{a(x_1/x_2)(s_1-1)+t\} = \tau_3 a(x_3/x_1) s_2 s_1 (s_1-1) + t\tau_3 s_2 s_1 \\ &= a(qx_3/x_1)\tau_3 s_2 s_1 (s_1-1) + t\omega = a(qx_3/x_1)\omega(s_1-1)+t\omega\end{aligned}$$

であるが, 第 5 章の例 5.4 で確かめたように $\omega s_1 = s_0 \omega$ なので

$$\bullet\ \omega\pi^{\mathrm{DL}}(S_1) = a(qx_3/x_1)(s_0-1)\omega + t\omega = \pi^{\mathrm{DL}}(S_0)\omega$$

がわかる. 次に $\omega\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)$ であるが, これも同様に

$$\bullet\ \begin{aligned}\omega\pi^{\mathrm{DL}}(S_2) &= \tau_3 s_2 s_1 a(x_2/x_3)(s_2-1) + t\omega = \tau_3 a(x_1/x_2) s_2 s_1 (s_2-1) + t\omega \\ &= a(x_1/x_2)\underbrace{\omega(s_2-1)}_{\omega s_2 = s_1 \omega} + t\omega = a(x_1/x_2)(s_1-1)\omega + t\omega = \pi^{\mathrm{DL}}(S_1)\omega\end{aligned}$$

とできる. $\omega\pi^{\mathrm{DL}}(S_0)$ もやはり同様にしてできる：

$$\bullet\ \begin{aligned}\omega\pi^{\mathrm{DL}}(S_0) &= \tau_3 s_2 s_1 a(qx_3/x_1)(s_0-1) + t\omega = \tau_3 a(qx_2/x_3) s_2 s_1 (s_0-1) + t\omega \\ &= a(x_2/x_3)\underbrace{\omega(s_0-1)}_{\omega s_0 = s_2 \omega} + t\omega = a(x_2/x_3)(s_2-1)\omega + t\omega = \pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\omega.\end{aligned}$$

- $S_i S_j S_i = S_j S_i S_j \quad (|i-j|=1)$ **について.** 以下では

$$\pi^{\mathrm{DL}}(S_1)\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\pi^{\mathrm{DL}}(S_1) = \pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\pi^{\mathrm{DL}}(S_1)\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)$$

を確かめる (これがわかれば, その他の場合のものは ω を左からかけることで得られる). ここで次のように考える. 交換子の記号 $[A,B] := AB - BA$ を使うと, $S_1S_2S_1 - S_2S_1S_2$ は

$$\begin{aligned}0 &= S_1S_2S_1 - S_2S_1S_2 = [S_1,S_2]S_1 + S_2{S_1}^2 - [S_2,S_1]S_2 - S_1{S_2}^2 \\ &= [S_1,S_2](S_1+S_2) + S_2{S_1}^2 - S_1{S_2}^2\end{aligned}$$

と変形できるが, ${S_i}^2 = (t-1)S_i + t \ (i=1,2)$ を使うと

$$\begin{aligned}0 &= S_1S_2S_1 - S_2S_1S_2 = [S_1,S_2](S_1+S_2) + S_2\{(t-1)S_1+t\} - S_1\{(t-1)S_2+t\} \\ &= [S_1,S_2](S_1+S_2) - (t-1)[S_1,S_2] - t(S_1-S_2)\end{aligned}$$

とできることがわかる. よって, 以下では次を示すことを考える：

$$\bullet\ \begin{aligned}&\left[\pi^{\mathrm{DL}}(S_1), \pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\right]\left\{\pi^{\mathrm{DL}}(S_1) + \pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\right\} - (t-1)\left[\pi^{\mathrm{DL}}(S_1), \pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\right] \\ &= t\left\{\pi^{\mathrm{DL}}(S_1) - \pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\right\}.\end{aligned}$$

スペース確保のため, 以下では $a_{12} := a(x_1/x_2)$, $a_{23} := a(x_2/x_3)$ などとして

$$\pi^{\mathrm{DL}}(S_1) = a_{12}(s_1-1)+t, \quad \pi^{\mathrm{DL}}(S_2) = a_{23}(s_2-1)+t$$

と表す. 対称群の元の働き方は $s_1 a_{12} = a_{21} s_1$ や $s_2 a_{13} = a_{12} s_2$ などとなる.

まず $\left[\pi^{\mathrm{DL}}(S_1),\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\right]$ を求める．$\pi^{\mathrm{DL}}(S_1)\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)$ および $\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\pi^{\mathrm{DL}}(S_1)$ は

- $$\begin{aligned}\pi^{\mathrm{DL}}(S_1)\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)&=\{a_{12}(s_1-1)+t\}\{a_{23}(s_2-1)+t\}\\&=a_{12}(s_1-1)a_{23}(s_2-1)+ta_{12}(s_1-1)+t\{a_{23}(s_2-1)+t\}\\&=a_{12}(a_{13}s_1-a_{23})(s_2-1)+ta_{12}(s_1-1)+ta_{23}(s_2-1)+t^2,\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\pi^{\mathrm{DL}}(S_1)&=\{a_{23}(s_2-1)+t\}\{a_{12}(s_1-1)+t\}\\&=a_{23}(s_2-1)a_{12}(s_1-1)+ta_{23}(s_2-1)+t\{a_{12}(s_1-1)+t\}\\&=a_{23}(a_{13}s_2-a_{12})(s_1-1)+ta_{23}(s_2-1)+ta_{12}(s_1-1)+t^2\end{aligned}$$

となるので，$\left[\pi^{\mathrm{DL}}(S_1),\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\right]$ は次のようになる：

$$\begin{aligned}\left[\pi^{\mathrm{DL}}(S_1),\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\right]&=a_{12}(a_{13}s_1-a_{23})(s_2-1)-a_{23}(a_{13}s_2-a_{12})(s_1-1)\\&=a_{12}a_{13}s_1(s_2-1)-a_{12}a_{23}(s_2-1)-a_{13}a_{23}s_2(s_1-1)+a_{12}a_{23}(s_1-1)\\&=a_{12}(a_{23}-a_{13})s_1+a_{23}(a_{13}-a_{12})s_2+a_{12}a_{13}s_1s_2-a_{13}a_{23}s_2s_1.\end{aligned}$$

これを $\pi^{\mathrm{DL}}(S_1)+\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)$ に左からかけるのであるが，そのためには

$$\pi^{\mathrm{DL}}(S_1)+\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)=a_{12}(s_1-1)+a_{23}(s_2-1)+2t$$

に左から s_1, s_2, s_1s_2, s_2s_1 をかけた結果がわかればよい．それらは次の通りである：

- $$\begin{aligned}s_1\left\{\pi^{\mathrm{DL}}(S_1)+\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\right\}&=s_1a_{12}(s_1-1)+s_1a_{23}(s_2-1)+2ts_1\\&=a_{21}(1-s_1)+a_{13}(s_1s_2-s_1)+2ts_1,\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}s_2\left\{\pi^{\mathrm{DL}}(S_1)+\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\right\}&=s_2a_{12}(s_1-1)+s_2a_{23}(s_2-1)+2ts_2\\&=a_{13}(s_2s_1-s_2)+a_{32}(1-s_2)+2ts_2,\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}s_1s_2\left\{\pi^{\mathrm{DL}}(S_1)+\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\right\}&=s_1a_{13}(s_2s_1-s_2)+s_1a_{32}(1-s_2)+2ts_1s_2\\&=a_{23}(s_1s_2s_1-s_1s_2)+a_{31}(s_1-s_1s_2)+2ts_1s_2,\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}s_2s_1\left\{\pi^{\mathrm{DL}}(S_1)+\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\right\}&=s_2a_{21}(1-s_1)+s_2a_{13}(s_1s_2-s_1)+2ts_2s_1\\&=a_{31}(s_2-s_2s_1)+a_{12}(s_2s_1s_2-s_2s_1)+2ts_2s_1.\end{aligned}$$

これらに適当に重みをつけて足し上げれば

- $$\begin{aligned}&\left[\pi^{\mathrm{DL}}(S_1),\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\right]\left\{\pi^{\mathrm{DL}}(S_1),\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\right\}\\=&\{a_{12}(a_{23}-a_{13})(-a_{21}-a_{13}+2t)+a_{12}a_{13}a_{31}\}s_1\\&+\{a_{23}(a_{13}-a_{12})(-a_{13}-a_{32}+2t)-a_{13}a_{23}a_{31}\}s_2\\&+\{a_{12}(a_{23}-a_{13})a_{13}+a_{12}a_{13}(-a_{23}-a_{31}+2t)\}s_1s_2\\&+\{a_{23}(a_{13}-a_{12})a_{13}-a_{13}a_{23}(-a_{31}-a_{12}+2t)\}s_2s_1\\&+a_{12}(a_{23}-a_{13})a_{21}+a_{23}(a_{13}-a_{12})a_{32}\end{aligned}$$

がわかる．また，$[\pi^{\mathrm{DL}}(S_1),\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)]\{\pi^{\mathrm{DL}}(S_1),\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\}-(t-1)[\pi^{\mathrm{DL}}(S_1),\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)]$ は上の式で色をつけた“$2t$”が $t+1$ に置き換わったものであることがわかり

- $$\begin{aligned}&[\pi^{\mathrm{DL}}(S_1),\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)]\{\pi^{\mathrm{DL}}(S_1),\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\}-(t-1)[\pi^{\mathrm{DL}}(S_1),\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)]\\ =&\{a_{12}(a_{23}-a_{13})(-a_{21}-a_{13}+t+1)+a_{12}a_{13}a_{31}\}s_1\\ &+\{a_{23}(a_{13}-a_{12})(-a_{13}-a_{32}+t+1)-a_{13}a_{23}a_{31}\}s_2\\ &+\{a_{12}(a_{23}-a_{13})a_{13}+a_{12}a_{13}(-a_{23}-a_{31}+t+1)\}s_1s_2\\ &+\{a_{23}(a_{13}-a_{12})a_{13}-a_{13}a_{23}(-a_{31}-a_{12}+t+1)\}s_2s_1\\ &+a_{12}(a_{23}-a_{13})a_{21}+a_{23}(a_{13}-a_{12})a_{32}\end{aligned}$$

が得られる．これを整理したものが $t\{\pi^{\mathrm{DL}}(S_1)-\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\}$ に等しくなることを示せばよい．そのためには，上の中の s_1s_2, s_2s_1 の係数は 0 になるべきであるが，これは次のようにしてわかる：s_1s_2 の係数は

- $$\begin{aligned}(s_1s_2\text{ の係数})&=a_{12}(a_{23}-a_{13})a_{13}+a_{12}a_{13}(-a_{23}\underbrace{-a_{31}+t+1}_{a_{13}})\\ &=a_{12}(a_{23}-a_{13})a_{13}+a_{12}a_{13}(-a_{23}+a_{13})\\ &=a_{12}a_{23}a_{13}-a_{12}{a_{13}}^2-a_{12}a_{13}a_{23}+a_{12}{a_{13}}^2=0.\end{aligned}$$

s_2s_1 の係数も同様にして 0 である．次に s_1 の係数を調べる．これは

- $$\begin{aligned}(s_1\text{ の係数})&=a_{12}(a_{23}-a_{13})(-a_{21}\underbrace{-a_{13}+t+1}_{a_{31}})+a_{12}a_{13}a_{31}\\ &=a_{12}(a_{23}-a_{13})(-a_{21}+a_{31})+a_{12}a_{13}a_{31}\\ &=a_{12}(-a_{23}a_{21}+a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}-a_{13}a_{31})+a_{12}a_{13}a_{31}\\ &=a_{12}(-a_{23}a_{21}+a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21})\\ &=a_{12}\{a_{13}(-a_{12}+t+1)-a_{21}a_{23}+a_{31}(-a_{32}+t+1)\}\\ &=a_{12}\left\{-a_{12}a_{13}-a_{21}a_{23}-a_{31}a_{32}+(t+1)\underbrace{(a_{13}+a_{31})}_{t+1}\right\}\\ &=a_{12}\{-a_{12}a_{13}-a_{21}a_{23}-a_{31}a_{32}+(t+1)^2\}\end{aligned}$$

と整理できるが，ここで次が成り立つのであった：

- $$a_{12}a_{13}+a_{21}a_{23}+a_{31}a_{32}=\sum_{i=1}^{3}\prod_{j\neq i}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}=\frac{1-t^3}{1-t}.$$

これによれば，s_1 の係数は

- $$(s_1\text{ の係数})=a_{12}\left\{-\frac{1-t^3}{1-t}+(t+1)^2\right\}=ta_{12}$$

となることがわかる．同様にすれば $(s_2\text{ の係数})=-ta_{23}$ であることも確かめられる．あとは“1 の係数”である

$$(1\text{ の係数})=a_{12}(a_{23}-a_{13})a_{21}+a_{23}(a_{13}-a_{12})a_{32}$$

についてであるが, これは次のようにして $-t(a_{12}-a_{23})$ であることがわかる：

- (1 の係数)

$$
\begin{aligned}
&=a_{12}(a_{23}-a_{13})a_{21}+a_{23}(a_{13}-a_{12})a_{32}\\
&=a_{12}(a_{23}-a_{13})(-a_{12}+t+1)+a_{23}(a_{13}-a_{12})(-a_{23}+t+1)\\
&=-{a_{12}}^2(a_{23}-a_{13})+(t+1)a_{12}(a_{23}-a_{13})-{a_{23}}^2(a_{13}-a_{12})+(t+1)a_{23}(a_{13}-a_{12})\\
&=-{a_{12}}^2a_{23}+{a_{12}}^2a_{13}-(t+1)a_{12}a_{13}-{a_{23}}^2a_{13}+{a_{23}}^2a_{12}+(t+1)a_{23}a_{13}\\
&=-a_{12}a_{23}(a_{12}-a_{23})+a_{13}(a_{12}+a_{23})(a_{12}-a_{23})-(t+1)a_{13}(a_{12}-a_{23})\\
&=\{-a_{12}a_{23}+a_{13}(a_{12}+a_{23})-(t+1)a_{13}\}(a_{12}-a_{23})\\
&=\{-a_{23}(-a_{21}+t+1)+a_{12}a_{13}+(-a_{31}+t+1)(-a_{32}+t+1)-(t+1)a_{13}\}(a_{12}-a_{23})\\
&=\big\{a_{12}a_{13}+a_{21}a_{23}+a_{31}a_{32}-(t+1)(a_{23}+a_{32})-(t+1)(a_{13}+a_{31})+(t+1)^2\big\}(a_{12}-a_{23})\\
&=\left\{\frac{1-t^3}{1-t}-(t+1)^2\right\}(a_{12}-a_{23})=-t(a_{12}-a_{23}).
\end{aligned}
$$

以上によって次が成り立つことがわかった：

- $\big[\pi^{\mathrm{DL}}(S_1),\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\big]\big\{\pi^{\mathrm{DL}}(S_1),\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\big\}-(t-1)\big[\pi^{\mathrm{DL}}(S_1),\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\big]$
$=ta_{12}s_1-ta_{23}s_2-t(a_{12}-a_{23})=t\big\{\pi^{\mathrm{DL}}(S_1)-\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\big\}.$

こうして $\pi^{\mathrm{DL}}(S_1)\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\pi^{\mathrm{DL}}(S_1)=\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)\pi^{\mathrm{DL}}(S_1)\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)$ が成り立つ.

例 6.3. 「q-Dunkl 作用素とアフィン Hecke 環の Demazure-Lusztig 作用素による実現を用いて Macdonald 作用素が出せる」という話があったが (定理 5.13), これを $n=3$ の場合に確かめてみる. この場合の q-Dunkl 作用素とは

$$Y_1=T_1T_2T_\omega,\quad Y_2=T_2T_\omega{T_1}^{-1},\quad Y_3=T_\omega{T_1}^{-1}{T_2}^{-1}$$

のことである. 計算をしやすくするため, 先の例 6.2 で使った $S_i=t^{\frac{1}{2}}T_i$ を用いると

$$Y_1=t^{-1}S_1S_2T_\omega,\quad Y_2=S_2T_\omega{S_1}^{-1},\quad Y_3=tT_\omega{S_1}^{-1}{S_2}^{-1}$$

である. 話の後半では, これらを π^{DL} で写したものを対称 Laurent 多項式に当てるので, T_ω は一番右に寄せておいた方がよい. ここで S_i と T_ω の関係から $T_\omega{S_i}^{-1}={S_{i-1}}^{-1}T_\omega$ $(i\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ も成り立つことに注意すると

$$Y_2=S_2{S_0}^{-1}T_\omega,\quad Y_3=t{S_0}^{-1}{S_1}^{-1}T_\omega$$

である. Y_1Y_2, Y_1Y_3, Y_2Y_3 についても同様に T_ω を一番右に寄せると

- $Y_1Y_2=t^{-1}S_1S_2T_\omega S_2{S_0}^{-1}T_\omega=t^{-1}\underbrace{S_1S_2S_1}_{S_2S_1S_2}{S_2}^{-1}{T_\omega}^2=t^{-1}S_2S_1{T_\omega}^2,$

- $Y_1Y_3=S_1S_2T_\omega{S_0}^{-1}{S_1}^{-1}T_\omega=S_1S_2{S_2}^{-1}{S_0}^{-1}{T_\omega}^2=S_1{S_0}^{-1}{T_\omega}^2,$

- $Y_2Y_3=tS_2{S_0}^{-1}T_\omega{S_0}^{-1}{S_1}^{-1}T_\omega=tS_2\underbrace{{S_0}^{-1}{S_2}^{-1}{S_0}^{-1}}_{{S_2}^{-1}{S_0}^{-1}{S_2}^{-1}}{T_\omega}^2=t{S_0}^{-1}{S_2}^{-1}{T_\omega}^2$

となる．q-Dunkl 作用素の積 $Y_1Y_2Y_3$ は実は簡単で

$$\bullet\ Y_1Y_2Y_3=S_1S_2T_\omega S_2{S_0}^{-1}T_\omega {S_0}^{-1}{S_1}^{-1}T_\omega=S_1S_2S_1{S_2}^{-1}T_\omega {S_2}^{-1}{S_0}^{-1}{T_\omega}^2$$
$$=\underbrace{S_1S_2S_1}_{S_2S_1S_2}{S_2}^{-1}{S_1}^{-1}{S_2}^{-1}{T_\omega}^3={T_\omega}^3$$

である (これが π^{DL} で写されて $\tau_1\tau_2\tau_3$ になる)．ここで ${S_i}^{-1}$ がいくつか現れているが, これらを消去することを考える．S_i は

$$(S_i-t)(S_i+1)=0 \Leftrightarrow S_i(S_i-t+1)=(S_i-t+1)S_i=t$$

を満たすので ${S_i}^{-1}=t^{-1}S_i-1+t^{-1}$ がわかる．これより

$$\bullet\ Y_2=S_2{S_0}^{-1}T_\omega=S_2\bigl(t^{-1}S_0-1+t^{-1}\bigr)T_\omega$$

がわかる (書き換えをここで終えてよい理由は後でわかる)．同様に

$$\bullet\ Y_3=t{S_0}^{-1}{S_1}^{-1}T_\omega=t\bigl(t^{-1}S_0-1+t^{-1}\bigr)\bigl(t^{-1}S_1-1+t^{-1}\bigr)T_\omega$$

である．Y_1Y_3, Y_2Y_3 は次のように表示できる：

$$\bullet\ Y_1Y_3=S_1{S_0}^{-1}{T_\omega}^2=S_1\bigl(t^{-1}S_0-1+t^{-1}\bigr){T_\omega}^2,$$
$$\bullet\ Y_2Y_3=t{S_0}^{-1}{S_2}^{-1}{T_\omega}^2=t\bigl(t^{-1}S_0-1+t^{-1}\bigr)\bigl(t^{-1}S_2-1+t^{-1}\bigr){T_\omega}^2.$$

これで最初の準備が完了した．以下では基本対称式に q-Dunkl 作用素を代入したものを π^{DL} で写した $\pi^{\mathrm{DL}}(e_r(Y_1,Y_2,Y_3))$ $(r=1,2,3)$ の格好を調べる．ただ,

$$\bullet\ \pi^{\mathrm{DL}}(e_3(Y_1,Y_2,Y_3))=\omega^3=\tau_1\tau_2\tau_3=t^{-3}D_x^{(3)}$$

は既に知っているので, あとは $r=1,2$ の場合を調べればよい．その前に記号について少し注意しておく．$\pi^{\mathrm{DL}}(S_1)$, $\pi^{\mathrm{DL}}(S_2)$ については, 先の例 6.2 での

$$\pi^{\mathrm{DL}}(S_1)=a_{12}(s_1-1)+t,\quad \pi^{\mathrm{DL}}(S_2)=a_{23}(s_2-1)+t$$

を引き続き用いるが, 今回は q-シフト作用素を持つ

$$\pi^{\mathrm{DL}}(S_0)=a(qx_3/x_1)(s_0-1)+t$$

も現れる．よって, 今回は係数 a_{ij} たちが q-シフトされたことをうまく表記せねばならない．そこで, 例えば $a_{12}=a(x_1/x_2)$ が $a(x_1/x_2)\to a\bigl(q^kx_1/x_2\bigr)$ と q-シフトされたことを

$$\bullet\ a_{q^k12}:=a\bigl(q^kx_1/x_2\bigr)\quad (k\in\mathbb{Z})$$

と略記する．その他の係数に対する“a_{q^kij}”も同様に定める．この記法によれば

$$\pi^{\mathrm{DL}}(S_0)=a_{q31}(s_0-1)+t$$

である．こうするとき, $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1)$, $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_2)$, $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_3)$ は次のようになる．$\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1)$ はまず

- $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1)=\pi^{\mathrm{DL}}\bigl(t^{-1}S_1S_2T_\omega\bigr)=t^{-1}\{a_{12}(s_1-1)+t\}\{a_{23}(s_2-1)+t\}\omega$
  $=t^{-1}\bigl\{a_{12}(a_{13}s_1-a_{23})(s_2-1)+ta_{12}(s_1-1)+ta_{23}(s_2-1)+t^2\bigr\}\omega$

であるが, $s_1\omega=\omega s_2$, $s_2\omega=\omega s_0$ から

- $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1)=t^{-1}\bigl\{a_{12}(a_{13}s_1-a_{23})\omega(s_0-1)+ta_{12}\omega(s_2-1)+ta_{23}\omega(s_0-1)+t^2\omega\bigr\}$

がわかる．$\pi^{\mathrm{DL}}(Y_2)$ は $\pi^{\mathrm{DL}}\bigl(t^{-1}S_0-1+t^{-1}\bigr)=t^{-1}a_{q31}(s_0-1)+t^{-1}$ から次のようになる：

- $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_2)=\pi^{\mathrm{DL}}\bigl(S_2\bigl(t^{-1}S_0-1+t^{-1}\bigr)T_\omega\bigr)$
  $=\{a_{23}(s_2-1)+t\}\bigl\{t^{-1}a_{q31}(s_0-1)+t^{-1}\bigr\}\omega$
  $=t^{-1}\{a_{23}(a_{q21}s_2-a_{q31})(s_0-1)+a_{23}(s_2-1)+ta_{q31}(s_0-1)+t\}\omega$
  $=t^{-1}\{a_{23}(a_{q21}s_2-a_{q31})\omega(s_1-1)+a_{23}\omega(s_0-1)+ta_{q31}\omega(s_1-1)+t\omega\}.$

先ほど“$Y_2=S_2\bigl(t^{-1}S_0-1+t^{-1}\bigr)T_\omega$ のままでよい”と述べた理由がこれである．この $Y_2=\cdots$ の右辺をばらしてしまうと余計な計算が生じる．

$\pi^{\mathrm{DL}}(Y_3)$ についても同様にできる：

- $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_3)=\pi^{\mathrm{DL}}\bigl(t\bigl(t^{-1}S_0-1+t^{-1}\bigr)\bigl(t^{-1}S_1-1+t^{-1}\bigr)T_\omega\bigr)$
  $=t\bigl\{t^{-1}a_{q31}(s_0-1)+t^{-1}\bigr\}\bigl\{t^{-1}a_{12}(s_1-1)+t^{-1}\bigr\}\omega$
  $=t^{-1}\{a_{q31}(a_{q32}s_0-a_{12})(s_1-1)+a_{q31}(s_0-1)+a_{12}(s_1-1)+1\}\omega$
  $=t^{-1}\{a_{q31}(a_{q32}s_0-a_{12})\omega(s_2-1)+a_{q31}\omega(s_1-1)+a_{12}\omega(s_2-1)+\omega\}.$

若干長い計算であったが, これら $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1)$, $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_2)$, $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_3)$ を対称 Laurent 多項式に作用させてみる．$f(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{C}\bigl[{x_1}^{\pm1},{x_2}^{\pm1},{x_3}^{\pm1}\bigr]^{\mathfrak{S}_3}$ を 1 つとると, $\omega s_0=\tau_2 s_1$ などから

- $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1)f(x_1,x_2,x_3)$
  $=t^{-1}\bigl\{a_{12}(a_{13}s_1-a_{23})\omega(s_0-1)+ta_{12}\omega(s_2-1)+ta_{23}\omega(s_0-1)+t^2\omega\bigr\}f(x_1,x_2,x_3)$
  $=t^{-1}\bigl\{a_{12}(a_{13}s_1-a_{23})\omega(s_0-1)+ta_{23}\omega(s_0-1)+t^2\omega\bigr\}f(x_1,x_2,x_3)$
  $=t^{-1}\bigl\{a_{12}(a_{13}s_1-a_{23})(\tau_2s_1-\tau_3s_2s_1)+ta_{23}(\tau_2s_1-\tau_3s_2s_1)+t^2\tau_3s_2s_1\bigr\}f(x_1,x_2,x_3)$
  $=t^{-1}\bigl\{a_{12}(a_{13}s_1-a_{23})(\tau_2-\tau_3)+ta_{23}(\tau_2-\tau_3)+t^2\tau_3\bigr\}f(x_1,x_2,x_3)$
  $=t^{-1}\bigl[a_{12}\{a_{13}(\tau_1-\tau_3)s_1-a_{23}(\tau_2-\tau_3)\}+ta_{23}(\tau_2-\tau_3)+t^2\tau_3\bigr]f(x_1,x_2,x_3)$
  $=t^{-1}\bigl\{a_{12}a_{13}\tau_1+(-a_{12}a_{23}+ta_{23})\tau_2+\bigl(-a_{12}a_{13}+a_{12}a_{23}-ta_{23}+t^2\bigr)\tau_3\bigr\}f(x_1,x_2,x_3)$

となる．$\pi^{\mathrm{DL}}(Y_2)f(x_1,x_2,x_3)$ は

- $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_2)f(x_1,x_2,x_3)$
  $=t^{-1}\{a_{23}(a_{q21}s_2-a_{q31})\omega(s_1-1)+a_{23}\omega(s_0-1)+ta_{q31}\omega(s_1-1)+t\omega\}f(x_1,x_2,x_3)$
  $=t^{-1}\{a_{23}\omega(s_0-1)+t\omega\}f(x_1,x_2,x_3)$
  $=t^{-1}\{a_{23}(\tau_2s_1-\tau_3s_2s_1)+t\tau_3s_2s_1\}f(x_1,x_2,x_3)$
  $=t^{-1}\{a_{23}\tau_2+(-a_{23}+t)\tau_3\}f(x_1,x_2,x_3)$

である. $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_3)f(x_1,x_2,x_3)$ は簡単で

- $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_3)f(x_1,x_2,x_3)$
$=t^{-1}\{a_{q31}(a_{q32}s_0-a_{12})\omega(s_2-1)+a_{q31}\omega(s_1-1)+a_{12}\omega(s_2-1)+\omega\}f(x_1,x_2,x_3)$
$=t^{-1}\tau_3 f(x_1,x_2,x_3)$

である. よって, $\{\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1)+\pi^{\mathrm{DL}}(Y_2)+\pi^{\mathrm{DL}}(Y_3)\}f(x_1,x_2,x_3)$ は

- $\{\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1)+\pi^{\mathrm{DL}}(Y_2)+\pi^{\mathrm{DL}}(Y_3)\}f(x_1,x_2,x_3)$
$=t^{-1}\left[a_{12}a_{13}\tau_1+a_{21}a_{23}\tau_2+\{-a_{12}a_{13}+a_{12}a_{23}-(t+1)a_{23}+1+t+t^2\}\tau_3\right]f(x_1,x_2,x_3)$

となるが, ここで τ_3 の係数を見ると

- $$\begin{aligned}(\tau_3\text{ の係数})&=-a_{12}a_{13}+a_{12}a_{23}-(t+1)a_{23}+1+t+t^2\\&=-a_{12}a_{13}+(-a_{21}+t+1)a_{23}-(t+1)a_{23}+\frac{1-t^3}{1-t}\\&=-a_{12}a_{13}-a_{21}a_{23}+\frac{1-t^3}{1-t}=a_{31}a_{32}\end{aligned}$$

である. よって, 確かに Macdonald 作用素 $D_x^{(1)}$ が現れている：

- $\{\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1)+\pi^{\mathrm{DL}}(Y_2)+\pi^{\mathrm{DL}}(Y_3)\}f(x_1,x_2,x_3)$
$=t^{-1}(a_{12}a_{13}\tau_1+a_{21}a_{23}\tau_2+a_{31}a_{32}\tau_3)f(x_1,x_2,x_3)=t^{-1}D_x^{(1)}f(x_1,x_2,x_3)$.

今度は $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1Y_2)$, $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1Y_3)$, $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_2Y_3)$ を調べる. $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1Y_2)$ は

- $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1Y_2)=\pi^{\mathrm{DL}}\left(t^{-1}S_2S_1{T_\omega}^2\right)$
$=t^{-1}\{a_{23}(s_2-1)+t\}\{a_{12}(s_1-1)+t\}\omega^2$
$=t^{-1}\{a_{23}(a_{13}s_2-a_{12})(s_1-1)+ta_{23}(s_2-1)+ta_{12}(s_1-1)+t^2\}\omega^2$
$=t^{-1}\{a_{23}(a_{13}s_2-a_{12})\omega^2(s_0-1)+ta_{23}\omega^2(s_1-1)+ta_{12}\omega^2(s_0-1)+t^2\omega^2\}$

となる. $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1Y_3)$ は

- $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1Y_3)=\pi^{\mathrm{DL}}\left(S_1\left(t^{-1}S_0-1+t^{-1}\right){T_\omega}^2\right)$
$=\{a_{12}(s_1-1)+t\}\{t^{-1}a_{q31}(s_0-1)+t^{-1}\}\omega^2$
$=t^{-1}\{a_{12}(a_{q32}s_1-a_{q31})(s_0-1)+a_{12}(s_1-1)+ta_{q31}(s_0-1)+t\}\omega^2$
$=t^{-1}\{a_{12}(a_{q32}s_1-a_{q31})\omega^2(s_2-1)+a_{12}\omega^2(s_0-1)+ta_{q31}\omega^2(s_2-1)+t\omega^2\}$

である. $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_2Y_3)$ は

- $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_2Y_3)=\pi^{\mathrm{DL}}\left(t\left(t^{-1}S_0-1+t^{-1}\right)\left(t^{-1}S_2-1+t^{-1}\right){T_\omega}^2\right)$
$=t\{t^{-1}a_{q31}(s_0-1)+t^{-1}\}\{t^{-1}a_{23}(s_2-1)+t^{-1}\}\omega^2$
$=t^{-1}\{a_{q31}(s_0-1)+1\}\{a_{23}(s_2-1)+1\}\omega^2$
$=t^{-1}\{a_{q31}(a_{q21}s_0-a_{23})(s_2-1)+a_{q31}(s_0-1)+a_{23}(s_2-1)+1\}\omega^2$
$=t^{-1}\{a_{q31}(a_{q21}s_0-a_{23})\omega^2(s_1-1)+a_{q31}\omega^2(s_2-1)+a_{23}\omega^2(s_1-1)+\omega^2\}$

となる. よって, 対称 Laurent 多項式 $f(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{C}\left[x_1{}^{\pm1},x_2{}^{\pm1},x_3{}^{\pm1}\right]^{\mathfrak{S}_3}$ を 1 つとると

- $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1Y_2)f(x_1,x_2,x_3)$

$$
\begin{aligned}
&=t^{-1}\left\{a_{23}(a_{13}s_2-a_{12})\omega^2(s_0-1)+ta_{23}\omega^2(s_1-1)+ta_{12}\omega^2(s_0-1)+t^2\omega^2\right\}f(x_1,x_2,x_3)\\
&=t^{-1}\left\{a_{23}(a_{13}s_2-a_{12})\omega^2(s_0-1)+ta_{12}\omega^2(s_0-1)+t^2\omega^2\right\}f(x_1,x_2,x_3)\\
&=t^{-1}\left\{a_{23}(a_{13}s_2-a_{12})(\tau_1\tau_3s_2-\tau_2\tau_3s_1s_2)+ta_{12}(\tau_1\tau_3s_2-\tau_2\tau_3s_1s_2)+t^2\tau_2\tau_3\right\}f(x_1,x_2,x_3)\\
&=t^{-1}\left\{a_{23}(a_{13}s_2-a_{12})(\tau_1\tau_3-\tau_2\tau_3)+ta_{12}(\tau_1\tau_3-\tau_2\tau_3)+t^2\tau_2\tau_3\right\}f(x_1,x_2,x_3)\\
&=t^{-1}\left\{a_{23}a_{13}(\tau_1\tau_2-\tau_2\tau_3)s_2-a_{23}a_{12}(\tau_1\tau_3-\tau_2\tau_3)+ta_{12}(\tau_1\tau_3-\tau_2\tau_3)+t^2\tau_2\tau_3\right\}f(x_1,x_2,x_3)\\
&=t^{-1}\left\{a_{13}a_{23}\tau_1\tau_2+(-a_{12}a_{23}+ta_{12})\tau_1\tau_3+\left(-a_{13}a_{23}+a_{12}a_{23}-ta_{12}+t^2\right)\tau_2\tau_3\right\}f(x_1,x_2,x_3)
\end{aligned}
$$

である (途中で $\omega^2=\tau_2\tau_3s_1s_2$, $\omega^2s_0=\tau_1\tau_3s_2$ を用いた). $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1Y_3)$, $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_2Y_3)$ については

- $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1Y_3)f(x_1,x_2,x_3)$

$$
\begin{aligned}
&=t^{-1}\left\{a_{12}(a_{q32}s_1-a_{q31})\omega^2(s_2-1)+a_{12}\omega^2(s_0-1)+ta_{q31}\omega^2(s_2-1)+t\omega^2\right\}f(x_1,x_2,x_3)\\
&=t^{-1}\left\{a_{12}\omega^2(s_0-1)+t\tau_2\tau_3\right\}f(x_1,x_2,x_3)\\
&=t^{-1}\{a_{12}(\tau_1\tau_3s_2-\tau_2\tau_3s_1s_2)+t\tau_2\tau_3\}f(x_1,x_2,x_3)\\
&=t^{-1}\{a_{12}\tau_1\tau_3+(-a_{12}+t)\tau_2\tau_3\}f(x_1,x_2,x_3),
\end{aligned}
$$

- $\pi^{\mathrm{DL}}(Y_2Y_3)f(x_1,x_2,x_3)$

$$
\begin{aligned}
&=t^{-1}\left\{a_{q31}(a_{q21}s_0-a_{23})\omega^2(s_1-1)+a_{q31}\omega^2(s_2-1)+a_{23}\omega^2(s_1-1)+\omega^2\right\}f(x_1,x_2,x_3)\\
&=t^{-1}\tau_2\tau_3f(x_1,x_2,x_3)
\end{aligned}
$$

となる. 以上のことから

- $\left\{\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1Y_2)+\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1Y_3)+\pi^{\mathrm{DL}}(Y_2Y_3)\right\}f(x_1,x_2,x_3)$

$$
\begin{aligned}
&=t^{-1}\left[a_{13}a_{23}\tau_1\tau_2+\{-a_{12}a_{23}+(t+1)a_{12}\}\tau_1\tau_3\right.\\
&\qquad\left.+\left\{-a_{13}a_{23}+a_{12}a_{23}-(t+1)a_{12}+1+t+t^2\right\}\tau_2\tau_3\right]f(x_1,x_2,x_3)
\end{aligned}
$$

である. $\tau_1\tau_2$ の係数 $a_{13}a_{23}$ は Macdonald 作用素 $D_x^{(2)}$ に含まれている. $\tau_1\tau_3$ の係数は

- $(\tau_1\tau_3$ の係数$)=-a_{12}a_{23}+(t+1)a_{12}=a_{12}(-a_{23}+t+1)=a_{12}a_{32}$

となり, これも $D_x^{(2)}$ に現れるものである. $\tau_2\tau_3$ の係数は

- $(\tau_2\tau_3$ の係数$)$

$$
\begin{aligned}
&=-a_{13}a_{23}+a_{12}a_{23}-(t+1)a_{12}+1+t+t^2\\
&=-(-a_{31}+t+1)(-a_{32}+t+1)+(-a_{21}+t+1)a_{23}-(t+1)a_{12}+\frac{1-t^3}{1-t}\\
&=-a_{31}a_{32}+(t+1)a_{31}+(t+1)a_{32}-(t+1)^2-a_{21}a_{23}+(t+1)a_{23}-(t+1)a_{12}+\frac{1-t^3}{1-t}\\
&=-a_{21}a_{23}-a_{31}a_{32}+\frac{1-t^3}{1-t}-(t+1)^2+(t+1)(a_{23}+a_{32})+(t+1)a_{31}-(t+1)a_{12}\\
&=a_{12}a_{13}+(t+1)a_{31}-(t+1)a_{12}=(-a_{21}+t+1)(-a_{31}+t+1)+(t+1)a_{31}-(t+1)a_{12}\\
&=a_{21}a_{31}-(t+1)(a_{12}+a_{21})+(t+1)^2=a_{21}a_{31}
\end{aligned}
$$

となり, やはり $D_x^{(2)}$ に必要な係数である. 以上より

- $\left\{\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1Y_2)+\pi^{\mathrm{DL}}(Y_1Y_3)+\pi^{\mathrm{DL}}(Y_2Y_3)\right\}f(x_1,x_2,x_3)$
  $=t^{-1}(a_{13}a_{23}\tau_1\tau_2+a_{12}a_{32}\tau_1\tau_3+a_{21}a_{31}\tau_2\tau_3)f(x_1,x_2,x_3)=t^{-2}D_x^{(2)}f(x_1,x_2,x_3)$

であることがわかった.