

# SIR モデルの厳密解

齋藤 洋介

yousukesaitou7@gmail.com

2024 年 5 月 17 日

感染症の流行の様子をモデル化したものとして「SIR モデル」がある。この文書では、SIR モデルは厳密解を持ち、それは初等的な微積分の知識のみで理解できるということを解説する。この他、SIR モデルに関連するいくつかの話題も紹介する。

2024 年 5 月 10 日版に対し、軽微な誤植の訂正の他、次の変更を行った：

- 2 ページにある SIR モデルの設定の説明に「SIR モデルでは『感染症から回復した者が再度感染することはない』と仮定する」ことを追記した。
- 例 1.1, 例 1.2, 例 1.3 における実定数  $\beta, \gamma$  に対する条件を明確にした。

## 謝辞

本研究は、文部科学省による「特色ある共同研究拠点の整備の推進事業 JPMXP0723833165」の助成を受けている。

## 目次

1	SIR モデルを解く	2
1.1	SIR モデルの設定	2
1.2	SIR 方程式は解けるのか？	6
1.3	細かい部分のチェック	8
1.4	いくつかわかること	15
2	関連する話題	24
2.1	Harko-Lobo-Mak の仕事	24
2.2	SIR モデルの仲間	26
2.3	参考文献	28

## 1 SIR モデルを解く

「なるべくなら平和に、かつ健康に暮らしたい」と願う人々は、例えば

「何かしらの感染症が流行したときに、どのくらいの感染者が出るのか」

といった事柄を予測したいわけであるが、そういったことをある程度可能にするものとして「感染症の数理モデル」がある。その中でも特に「SIR モデル」が典型的なものとして知られている。ここでは SIR モデルの基本的な事柄を述べてから、SIR モデルの厳密解が得られる様子を初等的に紹介する。

### 1.1 SIR モデルの設定

SIR モデルの設定は次の通りである。人数が一定の集団においてある感染症が流行しているとす。そこにいる人々は、まだ感染していない者 (Susceptible)、感染者 (Infectious)、感染症から回復した者 (Recovered または Removed) の 3 タイプに分けられるとする (感染症から回復した者が再度感染することはないとする)。時刻  $t$  でのこれらの状態にある者の割合をそれぞれ  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $R(t)$  とするとき、これらが次の微分方程式に従うとするのが SIR モデルである：

$$\bullet \begin{cases} \frac{dS}{dt}(t) = -\beta S(t)I(t), \\ \frac{dI}{dt}(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t), \\ \frac{dR}{dt}(t) = \gamma I(t). \end{cases}$$

ここで  $\beta \geq 0$  は感染のしやすさ、 $\gamma \geq 0$  は感染症からの回復のしやすさに対応する実定数である。これらの方程式 (以下では SIR 方程式と呼ぶことにする) の意味はだいたい次の通りである：

- 1 本目の微分方程式は「感染者が現れれば、当然ながら、一度も感染していない者の数は減る。その減り方は、一度も感染したことがない者、感染者が多ければ大きい」と読める。右辺の  $-\beta S(t)I(t)$  の項は、化学の「反応速度論」の話を知っていればわかりやすい。感染は、感染していない者と感染者がある程度接近したときにある確率で起こるのであろうから、 $S(t)$  の減少は、大雑把に言って、まだ感染していない者と感染者の“出会い方の総数”  $S(t)I(t)$  に比例して起こると思ってよいであろう。

- 2 本目の微分方程式は「感染者数は、一度も感染したことがない者、感染者が多ければ増えやすい。これに対応するのが  $\beta S(t)I(t)$  である。これに加え、感染者はそのうちに感染症から回復するので、 $I(t)$  自身が  $I(t)$  の減少にも寄与する。これに対応するのが  $-\gamma I(t)$  である。よって、これらを合わせた  $\beta S(t)I(t) - \gamma I(t)$  が  $I(t)$  の時間変化を決める」と読める。

● 3 本目の微分方程式は「感染者が多ければ、それだけ、感染症から回復する者の増加率も大きい」というような内容である。

$S(t), I(t), R(t)$  は割合なので、これらは

$$\bullet S(t)+I(t)+R(t)=1$$

を満たすと考える。このことは上の微分方程式たちとも矛盾しない。実際、SIR 方程式から

$$\frac{d}{dt}\{S(t)+I(t)+R(t)\}=0$$

であるから、 $S(t)+I(t)+R(t)$  は定数である。よって、特に  $S(t)+I(t)+R(t)=1$  としてよい。

以下では、関数の時間微分を  $\dot{f}=\frac{df}{dt}$  という具合にドットによって表すこともある。

今回扱う SIR モデルは、もともとは Kermack-McKendrick が 1927 年に導入した感染症のある数理モデルの簡略版であるという (Kermack-McKendrick は、感染してからの経過時間である「感染齢」の影響を考慮したモデルを扱っている)。

以下、SIR モデルから簡単にわかることについて、いくつか触れておく。

**例 1.1 (SIR 方程式の自明な解).** SIR 方程式の解のうち「定数関数の解」としてどういうものがあり得るのか考える。ここでは  $\beta>0, \gamma>0$  であるとする。SIR 方程式の定数の解が存在するとして、それらを  $S_0, I_0, R_0 \in \mathbb{R}$  とおくと、SIR 方程式から

$$\bullet 0=\frac{d}{dt}(S_0)=-\beta S_0 I_0, \quad \bullet 0=\frac{d}{dt}(I_0)=\beta S_0 I_0-\gamma I_0, \quad \bullet 0=\frac{d}{dt}(R_0)=\gamma I_0$$

が成り立たねばならない。これより  $I_0=0$  は決まるが、 $S_0, R_0$  は  $S_0+R_0=1$  を満たしていれば何でもよいことがわかる。よって、「感染症が全く流行していない状況」に対応する

$$\bullet S(t)=1, \quad \bullet I(t)=0, \quad \bullet R(t)=0$$

という自明な解が存在する。これは当然  $S(0)=1, I(0)=0, R(0)=0$  という初期条件を満たすが、「SIR 方程式の解で初期条件  $S(0)=1, I(0)=0, R(0)=0$  を満たすものは自明な解しかない」ということを後で見る (例 1.11 「“ $S(0)=1$ ”としてよいのか?」)。

今後、特に注意しない限りは、SIR 方程式の解としては上のような「自明な解」は暗黙のうちに除外する。また、この文書では、SIR 方程式の解で定数関数でないものを「SIR 方程式の非自明な解」と表現することがある。

**例 1.2 ( $\beta=0, \gamma>0$  の場合).** 新型コロナウイルス感染症の騒ぎを経験した読者は「実際にこうだったらなあ……」と強く思う設定であろうと思う。この場合の SIR 方程式は

$$\bullet \dot{S}(t)=0, \quad \bullet \dot{I}(t)=-\gamma I(t), \quad \bullet \dot{R}(t)=\gamma I(t)$$

である。これは直ちに解けて

$$\bullet S(t)=S(0), \quad \bullet I(t)=I(0)e^{-\gamma t}, \quad \bullet R(t)=1-S(0)-I(0)e^{-\gamma t}$$

である。すぐにはわかるように、感染者数の割合  $I(t)$  は「指数関数的に」速く 0 に収束するが、こういう状況を「感染症が流行している」とは言わないであろう。

**例 1.3** ( $\beta > 0, \gamma = 0$  の場合). これは「一度感染したら誰も治らない」状況に対応するので、物騒な話ではあるが、感染症の流行の様子を近似的には表している。この場合は

$$\bullet \dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t), \quad \bullet \dot{I}(t) = \beta S(t)I(t), \quad \bullet \dot{R}(t) = 0$$

である。ここで  $R(0) = 0$  であったとする ( $t=0$  には感染症から回復した人はいなかった、ということ)。すると  $R(t) = 0$  はすぐにわかる。よって、 $S(t) + I(t) = 1$  を使って  $S(t)$  を消去できて

$$\bullet \dot{I}(t) = \beta I(t)\{1 - I(t)\}$$

を得る。これは「ロジスティック方程式」と呼ばれる微分方程式の具体例である。これは

$$\frac{\dot{I}(t)}{I(t)\{1 - I(t)\}} = \beta \Leftrightarrow \frac{\dot{I}(t)}{I(t)} + \frac{\dot{I}(t)}{1 - I(t)} = \beta \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \log \left\{ \frac{I(t)}{1 - I(t)} \right\} = \beta$$

と変形できるので、これを積分すると

$$\log \left\{ \frac{I(t)}{1 - I(t)} \right\} = \beta t + c_0 \Leftrightarrow \frac{I(t)}{1 - I(t)} = e^{c_0} e^{\beta t} \Leftrightarrow I(t) = \frac{e^{c_0} e^{\beta t}}{1 + e^{c_0} e^{\beta t}}$$

がわかる ( $c_0 \in \mathbb{R}$  は積分定数).  $e^{c_0}$  は  $I(0) = \frac{e^{c_0}}{1 + e^{c_0}}$  から  $e^{c_0} = \frac{I(0)}{1 - I(0)}$  とわかるので

$$\bullet I(t) = \frac{I(0)e^{\beta t}}{1 - I(0) + I(0)e^{\beta t}} = \frac{I(0)}{\{1 - I(0)\}e^{-\beta t} + I(0)}$$

が得られる。これより  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 1$  なので確かに物騒である、ということではなく、これは「感染者数がピークに達する瞬間を引き伸ばして見ている」と理解すればよいと思う。

**例 1.4** (基本再生産数). 以下、特に注意しない限りは  $\beta > 0, \gamma > 0$  であるとする。ここで

$$\bullet r_0 := \frac{\beta}{\gamma}$$

とおき、これを「基本再生産数」と呼ぶ。これは感染症の流行の初期における感染者数の増えやすさの指標の 1 つであるとみなせる。これは次のようにして理解できる。SIR 方程式から

$$\dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) = \gamma \left\{ \frac{\beta}{\gamma} S(t) - 1 \right\} I(t) = \gamma \{r_0 S(t) - 1\} I(t)$$

であるが、感染症の流行の初期の段階では  $S(t) \sim S(0) \sim 1$  であるとしてよいであろう（感染症の流行の初期時刻  $t=0$  においては、感染者も、感染症から回復した者もほとんどいないであろう）というつもりで  $1 = S(0) + I(0) + R(0) \sim S(0)$  と見ている。そうすると

$$\dot{I}(t) \sim \gamma(r_0 - 1)I(t)$$

である。よって、 $r_0 \neq 1$  である場合、感染症の流行の初期の段階では

$$\bullet I(t) \sim I(0)\exp[\gamma(r_0-1)t]$$

であることがわかる。特に  $r_0 > 1$  の場合には、感染者数は「指数関数的に」増大する。このような意味で、基本再生産数  $r_0$  が 1 よりどのくらい大きいのかによって、感染症の流行の初期の段階における感染者数の増加の度合いが決まってくる。一方で  $r_0 < 1$  の場合には、感染者数は指数関数的に速く 0 に収束する。「基本再生産数が 1 より小さな感染症の流行は、放っておいても収まる」というわけである。

上では除かれていた  $r_0 = 1$  の場合を含む  $r_0 \leq 1$  である場合に対しては、近似を用いずに次のようにしてもよい。SIR 方程式  $\dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t)$  から、 $S(t)$  は狭義単調減少する。これと  $S(t) \leq 1$  に注意すると、

$$\dot{I}(t) = \gamma\{r_0 S(t) - 1\}I(t)$$

の右辺に見える  $r_0 S(t) - 1$  は 0 以下の値をとる。よって、 $r_0 \leq 1$  の場合には  $I(t)$  は単調減少して 0 に収束することが理解できる（ここでは“ $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ ”であることまでは説明できたことにはならないが、直感的にはわかるであろう。SIR 方程式の厳密解が得られる頃にはしっかりと理解できる）。

「 $r_0 = \beta/\gamma$  は基本再生産数である」と述べたものの、この  $r_0$  は本来は『SIR モデルの』基本再生産数と呼ぶべきものである。何が「基本再生産数」と呼ばれるのかは、用いるモデルによって一般には異なり得ることに注意する。

実際の感染症の基本再生産数は、何かしらの感染症の流行が起こるごとに、感染症の数理モデルと手元にあるデータを元にして推定される。例えば

- 稲葉 寿 (編著)『感染症の数理モデル 増補版』(培風館, 2020)

にある國谷 紀良, 稲葉 寿による「COVID-19 の数理モデル解析」によれば、感染症の数理モデルの「SEIR モデル」(これについては例 2.1「SEIR モデル」を見られたい)、および 2020 年 1 月 15 日 ~ 2020 年 2 月 29 日の間に報告された日本国内の新型コロナウイルス感染症の感染者数のデータによって、このときに流行していた新型コロナウイルス感染症の基本再生産数は 2.6 程度であると推定される。

例 1.5 (「最終規模方程式」にご用心)。次のような見方が可能である。SIR 方程式から

$$\dot{R}(t) = \gamma I(t) = -\frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{d}{dt} \log S(t) = -\frac{1}{r_0} \cdot \frac{d}{dt} \log S(t)$$

である。よって

$$\bullet R(t) + \frac{1}{r_0} \log S(t) = \text{const.}$$

であるので、初期値  $S(0)$ ,  $R(0)$  を適当に選べば

$$\bullet R(t) + \frac{1}{r_0} \log S(t) = R(0) + \frac{1}{r_0} \log S(0)$$

が成り立つ。これは特別な仮定を全く必要とせずに成り立つものである。

ここで  $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t)$  の存在, および  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t)=0$  であることを認めると (← これらが適当な初期条件の下で実際に成り立つことを確かめるのは後回しにして, ここでは認める),

$$\bullet R_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} R(t)$$

と表記するとき,  $S(t)+I(t)+R(t)=1$  から  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t)=1-R_{\infty}$  である.

少し補足しておく,  $I(t)$  は「時刻  $t$  における瞬間の感染者数の割合」と理解すべきものであるの  
で, 「感染症の流行において生じた総感染者数の割合」は次のようにして出ること注意到する:

$$\int_0^{\infty} I(t)dt = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\infty} \dot{R}(t)dt = \frac{1}{\gamma} \{R_{\infty} - R(0)\}.$$

以上より,  $R_{\infty}$  について

$$\bullet R_{\infty} + \frac{1}{r_0} \log(1-R_{\infty}) = R(0) + \frac{1}{r_0} \log S(0)$$

である. ここで  $S(0), R(0)$  について

$$\bullet R(0) + \frac{1}{r_0} \log S(0) = 0$$

を課してよい場合には,  $R_{\infty}$  について次が成り立つことがわかる:

$$\bullet R_{\infty} + \frac{1}{r_0} \log(1-R_{\infty}) = 0.$$

これは「最終規模方程式」と呼ばれており, 感染症の数理モデルの話題においてはありふれたものとして目にするであろう (「基本再生産数  $r_0$  から総感染者数  $\{R_{\infty} - R(0)\}/\gamma$  がわかる」という意味の命名だそうである). 例えば, 最終規模方程式が成り立つ場合には

$$\bullet r_0 = -\frac{1}{R_{\infty}} \log(1-R_{\infty})$$

であるが, これは基本再生産数の推定に使われているらしい.

ただ, 上に述べた通り, 最終規模方程式は「 $R(0) + \frac{1}{r_0} \log S(0) = 0$ 」である場合を除いては成り立たず, たいていは「 $S(0) \sim 1, R(0) \sim 0$ 」とみなす近似などを経て使われるということには注意しておいた方がよい. この他, ここでは完結した説明を述べられないが, 実は, 最終規模方程式が成り立つようにできるのは「 $r_0 > 1$ 」の場合に限られるのである. こういったよなより細かい話は, 例 1.14 「『最終規模方程式』再び」にて扱う.

「そもそも, SIR モデルは使えるのか?」といった風な気持ちの読者がいるかもしれない. 詳しくは

• J.D. Murray (著), 三村 昌泰 (総監修), 瀬野 裕美, 河内 一樹, 中口 悦史, 三浦 岳 (監修) 『マレー数理生物学入門』(丸善出版, 2014)

などの書籍を参照してもらいたいが, 1905 年から 1906 年にインドのボンベイ (現在のムンバイ) で発生したペストの流行による死者数の時間変化や, 1978 年にイングランドのある寄宿学校でインフルエンザ

ンザが流行した際の感染者数の時間変化が、SIR モデルによってよく再現されたという話がある。こういった話題を含め、SIR モデルに関する数値計算や「基本再生産数はどうやって推定するのか？」といった疫学に関する話題については、次の文献を参照してほしい：

- 鈴木 絢子, 西浦 博「感染症の数理モデルと対策」(日本内科学会雑誌, 2020, 109.11: 2276-2280)
- 稲葉 寿 (編著)『感染症の数理モデル 増補版』(培風館, 2020)
- 西浦 博 (編著), 小林 鉄郎, 安齋 麻美, 合原 一幸, ナタリー・リントン (著)『感染症流行を読み解く数理』(日本評論社, 2022)

## 1.2 SIR 方程式は解けるのか？

何かしらの微分方程式が手元にあるとき、

「これは解けるのだろうか？」

と考えるのは自然なことであると思う。SIR 方程式はそういう風な単純な好奇心のみによって調べられているわけではないのであるが、ともかく、ここでは全く気楽に計算してみる。

ここから先も  $\beta > 0, \gamma > 0$  であるとする。SIR 方程式のうち  $\dot{S}(t), \dot{I}(t)$  を含むものは

$$\bullet \frac{d}{dt} \log S(t) = -\beta I(t), \quad \bullet \frac{d}{dt} \log I(t) = \beta S(t) - \gamma$$

と書ける。これらをうまくいじることで SIR 方程式の解が求められたりはしないのであろうか？ 例えばあんちよくに

$$\bullet f(t) := \log S(t), \quad \bullet g(t) := \log I(t)$$

とおくと  $S(t) = e^{f(t)}, I(t) = e^{g(t)}$  なので

$$\bullet \dot{f}(t) = -\beta e^{g(t)}, \quad \bullet \dot{g}(t) = \beta e^{f(t)} - \gamma$$

である。これらより、 $\dot{f}(t)\dot{g}(t)$  を

$$\dot{f}(t)\dot{g}(t) = -\beta \dot{g}(t)e^{g(t)} = \beta \dot{f}(t)e^{f(t)} - \gamma \dot{f}(t)$$

という具合に 2 通りに書けるので、とりあえず

$$\bullet \frac{d}{dt} \left\{ \beta e^{f(t)} + \beta e^{g(t)} - \gamma f(t) \right\} = 0$$

は成り立つ。これを積分すると、 $r_0 = \beta/\gamma$  とおくととき (基本再生産数)

$$\bullet e^{f(t)} + e^{g(t)} - \frac{1}{r_0} f(t) = \text{const.}$$

である。元の  $S(t), I(t)$  で書くと

$$\bullet S(t) + I(t) - \frac{1}{r_0} \log S(t) = \text{const.}$$

であるということだが、これらはうまく働いてくれるであろうか？

上の変形とは別に、単に次のようにしてもよい。SIR 方程式から

$$\dot{S}(t)+\dot{I}(t)=-\gamma I(t)=\frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{d}{dt} \log S(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left\{ S(t)+I(t)-\frac{1}{r_0} \log S(t) \right\}=0$$

である。よって、上で得た式というのは、これを積分したものである。

以上より、SIR 方程式の解  $S(t)$ ,  $I(t)$  があるとき、

$$\bullet S(t)+I(t)-\frac{1}{r_0} \log S(t)$$

は時間によらない定数であるということがわかった (保存量などと呼ぶ)。そこで、その値を  $c_0$  と書くと

$$S(t)+I(t)-\frac{1}{r_0} \log S(t)=e^{f(t)}+e^{g(t)}-\frac{1}{r_0} f(t)=c_0$$

であるが、これより  $e^{g(t)}=-e^{f(t)}+\frac{1}{r_0} f(t)+c_0$  なので

$$\dot{f}(t)=-\beta e^{g(t)}=\beta e^{f(t)}-\gamma f(t)-\beta c_0=\beta e^{f(t)}-\gamma\{f(t)+r_0 c_0\}$$

がわかる。ここで  $F(t):=f(t)+r_0 c_0$  とおくと

$$\dot{F}(t)=\beta e^{-r_0 c_0} e^{F(t)}-\gamma F(t)=\gamma\left\{r_0 e^{-r_0 c_0} e^{F(t)}-F(t)\right\}$$

である。更に  $\alpha_0:=r_0 e^{-r_0 c_0}$  とおくと

$$\bullet \dot{F}(t)=\gamma\left\{\alpha_0 e^{F(t)}-F(t)\right\}$$

であるが、これはよくやるように

$$\frac{dF}{\alpha_0 e^F - F} = \gamma dt$$

と見ることができる (変数分離形の微分方程式)。よって、

$$\bullet p_{\text{仮}}(x):=\int_{x_0}^x \frac{dy}{\alpha_0 e^y - y} \quad (\leftarrow x_0 \text{ は適当にとる})$$

が適当な意味で定義され (↑この積分を実行するときに  $\alpha_0 e^y - y = 0$  となる  $y$  を避けないといけない)、この  $p_{\text{仮}}(x)$  をうまく制限して単射であるようにできれば ( $p_{\text{仮}}(x)$  は見るからに適当なところで連続なので、可能なはずである)、この関数  $p_{\text{仮}}(x)$  は逆関数を持つ。それを  $q_{\text{仮}}(x)$  と書くとき、

$$p_{\text{仮}}(F(t))=\gamma t+c_1 \Leftrightarrow F(t)=f(t)+r_0 c_0=q_{\text{仮}}(\gamma t+c_1) \quad (c_1 \in \mathbb{R})$$

が SIR 方程式 (を書き換えたもの) の解である。もともとの  $S(t)$ ,  $I(t)$  と  $f(t)$ ,  $F(t)$  の関係は

$$\begin{aligned} \bullet S(t) &= e^{f(t)} = \exp[F(t) - r_0 c_0], \\ \bullet I(t) &= \frac{-1}{\beta} \dot{f}(t) = \frac{-1}{\beta} \dot{F}(t) = \frac{-\gamma}{\beta} \left\{ \alpha_0 e^{F(t)} - F(t) \right\} = -\exp[F(t) - r_0 c_0] + \frac{1}{r_0} F(t) \end{aligned}$$

だったので、こうして

$$\begin{aligned} &\bullet S(t) = \exp[q_{\text{仮}}(\gamma t + c_1) - r_0 c_0], \\ &\bullet I(t) = -\exp[q_{\text{仮}}(\gamma t + c_1) - r_0 c_0] + \frac{1}{r_0} q_{\text{仮}}(\gamma t + c_1) \end{aligned}$$

であることがわかった。どうやらこれでうまくいきそうである !!

定数  $c_1$  の選び方について先に見ておく。  $S_0, I_0 > 0$  で  $S_0 + I_0 \leq 1$  なるものをもって  $S(0) = S_0, I(0) = I_0$  となるようにしたい。ここまでの内容が正しいとすると、 $c_1$  は  $S(0) = S_0$  となるように

$$\bullet S_0 = \exp[q_{\text{仮}}(c_1) - r_0 c_0]$$

を満たすものとして選べばよいであろう。これを  $q_{\text{仮}}(c_1)$  について解くと

$$\bullet q_{\text{仮}}(c_1) = \log S_0 + r_0 c_0 = r_0(S_0 + I_0)$$

である。このようなことが可能であるという仮定の下では、 $I_0 = -S_0 + \frac{1}{r_0} q_{\text{仮}}(c_1)$  から  $I(0) = I_0$  も成り立つ。ここに述べたことが実際に可能であるということを示す。

### 1.3 細かい部分のチェック

SIR 方程式が解けるらしいことはわかったので、以下ではこれまで述べてきたことを正確な内容にしていく。

先ほどまで、筆者は次のことを仮定していた：

- 実数  $\alpha > 0$  に対し  $x_0 \in \mathbb{R}$  が適当にとれて、

$$\bullet P(x; \alpha) := \int_{x_0}^x \frac{dy}{\alpha e^y - y}$$

が適当な区間で単射であるようにできる。

これが正しいかどうかを確かめなければならない (本当はまだ “ $P(x; \alpha) := \dots$ ” などと書いてはならないわけであるが、名前がないと不便なので、記号  $P(x; \alpha)$  を使ってしまおう)。まず、 $P(x; \alpha)$  の中の  $x_0 \in \mathbb{R}$  をどのようにとるのかについてである。直ちにわかるのは、 $P(x; \alpha)$  の被積分関数  $\frac{1}{\alpha e^y - y}$  の分母  $\alpha e^y - y$  のゼロ点は避けなければならないということである。すなわち

$$\bullet \alpha e^x - x = 0 \Leftrightarrow x e^{-x} = \alpha \dots (*)$$

となるような  $x \in \mathbb{R}$  が存在する場合、それらを避けるべきである。関数  $y = x e^{-x}$  のグラフの概形を見ることで、方程式 (\*) の実数解の現れ方は次のように分類できる：

- (i)  $\alpha \leq 0$  の場合、方程式 (\*) はただ 1 つの 0 以下の実数解を持つ (今回の場合は不要)。
- (ii)  $0 < \alpha < e^{-1}$  の場合、方程式 (\*) は 2 つの異なる正の実数解を持つ。

(iii)  $\alpha=e^{-1}$  の場合, 方程式 (\*) すなわち  $xe^{-x}=e^{-1}$  はただ 1 つの実数解  $x=1$  を持つ.

(iv)  $\alpha>e^{-1}$  の場合, 方程式 (\*) は実数解を持たない.

以下では, 上に述べた (ii) の場合に集中するので十分である (その理由は後述する). (ii) に述べられている方程式  $xe^{-x}=\alpha$  の解のうち小さいものを  $b_-$ , 大きいものを  $b_+$  とする (絵を描くと  $0<b_-<1<b_+$  であることがわかる).

SIR モデルにおいて生じる状況を考えたり, 絵を描いたりすればわかるのであるが, 我々が将来 “ $P(x; \alpha)$ ” と呼びたい関数は, 开区間

$$(b_-, b_+) = \{x \in \mathbb{R} \mid b_- < x < b_+\}$$

において定義すればよいことがわかる (これについても後述する). すなわち,  $b_- < x_0 < b_+$  なる実数  $x_0$  を 1 つとって

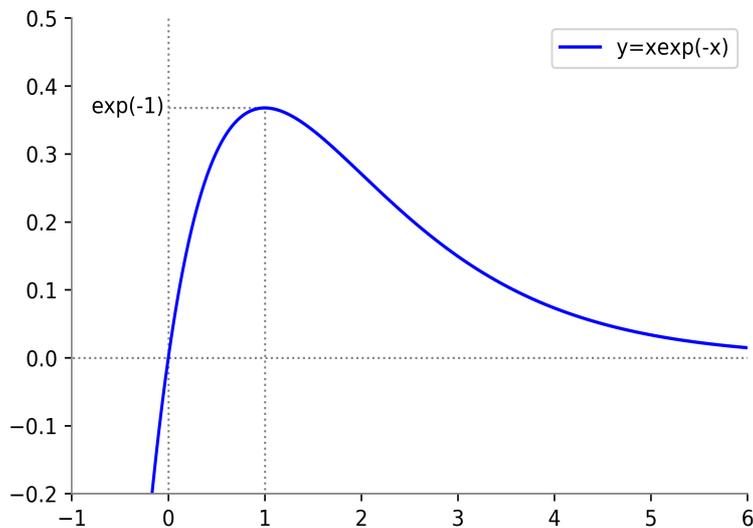
$$\int_{x_0}^x \frac{dy}{\alpha e^y - y} \quad (b_- < x < b_+)$$

によって  $P(x; \alpha)$  を定めればよい. ただ, そのうちにわかることであるが,  $x_0$  としてどういう値を選ぶのかは結論に影響を及ぼさないので, 以下では  $x_0=1$  とする.

**定義 1.6.**  $0 < \alpha < e^{-1}$  なる実数  $\alpha$  をとり, 方程式  $xe^{-x}=\alpha$  の 2 つの異なる実数解を  $b_{\pm}$  とする ( $0 < b_- < 1 < b_+$  である). 関数  $P(x; \alpha)$  ( $x \in (b_-, b_+)$ ) を次によって定める:

$$\bullet P(x; \alpha) := \int_1^x \frac{dy}{\alpha e^y - y} \quad (x \in (b_-, b_+)).$$

なぜ上のように  $P(x; \alpha)$  を「 $0 < \alpha < e^{-1}$ 」の場合にのみ定義するので十分であるのか, その概略を述べる. もともとの SIR モデルに戻ると,  $S(t)$  は  $\dot{S} = -\beta SI$  に従うので, 時間の経



関数  $y = xe^{-x}$  のグラフの概形.  $0 < \alpha < e^{-1}$  なる  $\alpha$  をとるとき,  $y = xe^{-x}$  のグラフと  $y = \alpha$  のグラフの交点が 2 つできるのがわかる.

過と共に狭義単調減少する. また,  $F(t) = \log S(t) + r_0 c_0$  は

$$\dot{F} = \gamma(\alpha_0 e^F - F)$$

を満たすのであった. これは既に見たように

$$\int_{F(0)}^{F(t)} \frac{dy}{\alpha_0 e^y - y} = \gamma t$$

と解ける.  $F(t)$  も狭義単調減少する関数であることから, これは

$$\int_{F(t)}^{F(0)} \frac{e^{-y} dy}{ye^{-y} - \alpha_0} = \gamma t$$

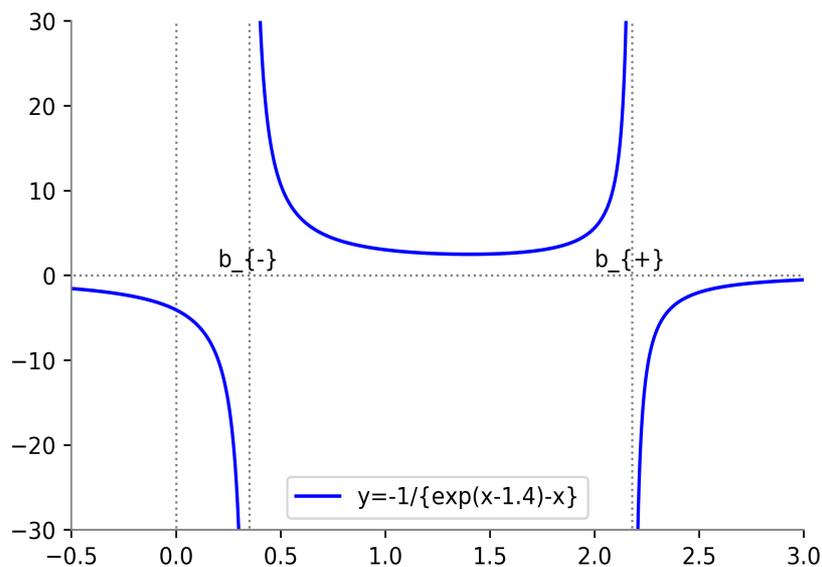
と書くとわかりやすい ( $F(t) \leq F(0)$  ( $t \geq 0$ ) に注意). これより, 当然ながら  $t > 0$  の場合には

$$\bullet \int_{F(t)}^{F(0)} \frac{e^{-y} dy}{ye^{-y} - \alpha_0} = \gamma t > 0$$

が成り立たねばならない (こういう関数  $F(t)$  でないと SIR モデルの解になり得ない). あとは関数  $y = xe^{-x}$  のグラフの概形を描いたりすればわかるが,  $\alpha_0 \geq e^{-1}$  の場合には上の積分の被積分関数  $\frac{e^{-y}}{ye^{-y} - \alpha_0}$  は 0 以下の値しかとらない (そういう関数を積分しても, その結果は正にはならない). こういった理由によって, 関数  $P(x; \alpha)$  の定義に条件「 $0 < \alpha < e^{-1}$ 」を含めるのである. また,  $0 < \alpha_0 < e^{-1}$  である  $\alpha_0$  をとるとき, 方程式  $xe^{-x} = \alpha_0$  の 2 つの実数解を  $b_-$ ,  $b_+$  とすれば ( $b_- < b_+$  とする),  $b_- < x < b_+$  である  $x$  に対し  $xe^{-x} > \alpha_0$  である. よって,  $t > 0$  に対し

$$\int_{F(t)}^{F(0)} \frac{e^{-y} dy}{ye^{-y} - \alpha_0} > 0$$

であるためには, この積分は开区間  $(b_-, b_+)$  においてなされていなければならないことがわかる. これが, 関数  $P(x; \alpha)$  が「开区間  $(b_-, b_+)$ 」において定義される理由である.



関数  $P(x; \alpha) = \int_x^1 \frac{e^{-y} dy}{ye^{-y} - \alpha}$  の被積分関数  $\frac{e^{-y}}{ye^{-y} - \alpha}$  において  $\alpha = \exp(-1.4)$  としたもののグラフの概形. この場合は  $b_- \doteq 0.34$ ,  $b_+ \doteq 2.17$  である. 开区間  $(b_-, b_+)$  において積分するしかないのがわかるであろう.

「なぜ関数  $P(x; \alpha)$  があのように定義されるのか？」についてはいいとして、既に何度も見ている

$$\int_{F(t)}^{F(0)} \frac{e^{-y} dy}{ye^{-y} - \alpha_0} = \gamma t$$

によれば

$$\bullet \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{F(t)}^{F(0)} \frac{e^{-y} dy}{ye^{-y} - \alpha_0} = \infty$$

でなくてはならない。これは成り立つのであろうか？別の述べ方をすると、関数  $P(x; \alpha)$  はこの結果を出すようにできているのであろうか？これについては例 1.10 において補足する。

関数  $P(x; \alpha)$  の定義より直ちに、 $P(x; \alpha)$  は开区間  $(b_-, b_+)$  において狭義単調減少する関数であることがわかる (よって、 $P(x; \alpha)$  は逆関数を持つ)。実際、 $P(x; \alpha)$  は微分可能で

$$\bullet P'(x; \alpha) = \frac{1}{\alpha e^x - x} = \frac{-e^{-x}}{xe^{-x} - \alpha} < 0$$

であることからわかる ( $b_- < x < b_+$  であるとき  $xe^{-x} > \alpha$  である)。また、後々のために  $x \rightarrow b_{\pm}$  とするときの  $P(x; \alpha)$  の振舞いを知っておく必要がある。

**命題 1.7.**  $\lim_{x \rightarrow b_- + 0} P(x; \alpha) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow b_+ - 0} P(x; \alpha) = -\infty$  が成り立つ。

証明. 関数  $\alpha e^x - x$  の点  $b_-$  の周りでの 1 次近似は

$$\bullet \alpha e^{b_-} - b_- + (\alpha e^{b_-} - 1)(x - b_-) = (b_- - 1)(x - b_-)$$

である ( $\alpha e^{b_-} - b_- = 0$  を使った)。  $f(x) := \alpha e^x - x - (b_- - 1)(x - b_-)$  とおくと、これは滑らかで

$$\bullet f'(x) = \alpha e^x - 1 - (b_- - 1) = \alpha e^x - b_-, \quad \bullet f''(x) = \alpha e^x > 0$$

が成り立つ。よって、 $f'(x)$  は  $\mathbb{R}$  全体で狭義単調増加する。これより、 $f'(x)$  の符号の変化が生じるとすれば、それはただ 1 度だけ起こるが、 $f'(b_-) = 0$  なので、次の増減表が書ける：

$x$	...	$b_-$	...
$f'$	-	0	+
$f$	↘	0	↗

よって  $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \alpha e^x - x \geq (b_- - 1)(x - b_-)$  が成り立つ。これは  $x - \alpha e^x \leq (1 - b_-)(x - b_-)$  と書いておいた方がよいが (後々のため)、特に  $b_- < x < b_+$  の場合は次が成り立つ：

$$\bullet \frac{1}{x - \alpha e^x} \geq \frac{1}{(1 - b_-)(x - b_-)}.$$

ここで、 $b_- + \varepsilon < 1$  となるように  $\varepsilon > 0$  を十分小さくとると

$$\begin{aligned} \bullet P(b_- + \varepsilon; \alpha) &= \int_1^{b_- + \varepsilon} \frac{dy}{\alpha e^y - y} = \int_{b_- + \varepsilon}^1 \frac{dy}{y - \alpha e^y} \geq \int_{b_- + \varepsilon}^1 \frac{dy}{(1 - b_-)(y - b_-)} \\ &= \frac{1}{1 - b_-} \log|y - b_-| \Big|_{b_- + \varepsilon}^1 = \frac{1}{1 - b_-} \{\log(1 - b_-) - \log \varepsilon\} \end{aligned}$$

が成り立つ. これより  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} P(b_- + \varepsilon; \alpha) = \infty$  を得る.

今度は  $\lim_{x \rightarrow b_+ - 0} P(x; \alpha)$  を調べる. 先ほどと同様にすることで

$$\bullet \frac{-1}{\alpha e^x - x} \geq \frac{-1}{(b_+ - 1)(x - b_+)} \quad (b_- < x < b_+)$$

がわかる. ここで  $1 < b_+ - \varepsilon$  となるように  $\varepsilon > 0$  を十分小さくとると

$$\begin{aligned} \bullet -P(b_+ - \varepsilon; \alpha) &= \int_1^{b_+ - \varepsilon} \frac{-dy}{\alpha e^y - y} \geq \int_1^{b_+ - \varepsilon} \frac{-dy}{(b_+ - 1)(y - b_+)} = \frac{-1}{b_+ - 1} \log|y - b_+| \Big|_1^{b_+ - \varepsilon} \\ &= \frac{1}{b_+ - 1} \{-\log \varepsilon + \log(b_+ - 1)\} \end{aligned}$$

がわかるので  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} P(b_+ - \varepsilon; \alpha) = -\infty$  を得る.  $\square$

以上のことから,  $P(x; \alpha)$  の像は  $\mathbb{R}$  全体であることがわかる.

**命題 1.8.** これまで見てきた関数  $P(x; \alpha)$  は逆関数を持つので, それを  $Q(x; \alpha)$  と書く.

- (1) 関数  $Q(x; \alpha)$  の定義域は  $\mathbb{R}$  全体で,  $Q(x; \alpha)$  の像は开区間  $(b_-, b_+)$  である.
- (2) 関数  $Q(x; \alpha)$  は狭義単調減少する関数である.
- (3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x; \alpha) = b_-$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} Q(x; \alpha) = b_+$  が成り立つ.

**証明.** (1) は逆関数の一般論から従う. (2) は, 微分可能な関数が逆関数を持つ場合の一般論から,  $Q(x; \alpha)$  も微分可能で

$$\bullet Q'(x; \alpha) = \frac{1}{P'(Q(x; \alpha); \alpha)} = \alpha \exp[Q(x; \alpha)] - Q(x; \alpha) < 0$$

であることからわかる ( $b_- < Q(x; \alpha) < b_+$  に注意). (3) は命題 1.7 の言い換えである.  $\square$

これで SIR 方程式の解を構成するための準備が完了した. ここから先は次のようにすればよい.  $\beta, \gamma$  を SIR モデルの例の実定数とし  $r_0 = \beta/\gamma$  とおく. 正の実数  $S_0, I_0$  を  $S_0 + I_0 \leq 1$  を満たすように選び,  $c_0 = S_0 + I_0 - \frac{1}{r_0} \log S_0$ ,  $\alpha_0 = r_0 e^{-r_0 c_0}$  とおく. そうすると,  $\alpha_0$  について

$$\begin{aligned} \bullet \alpha_0 &= r_0 e^{-r_0 c_0} = r_0 \exp(-r_0 S_0 - r_0 I_0 + \log S_0) \\ &= r_0 S_0 e^{-r_0 S_0} \underbrace{e^{-r_0 I_0}}_{1 \text{ より小}} < r_0 S_0 e^{-r_0 S_0} \end{aligned}$$

がわかる. よって,  $z e^{-z} \leq e^{-1}$  ( $z \in \mathbb{R}$ ) に注意すると

$$\bullet \alpha_0 < r_0 S_0 e^{-r_0 S_0} \leq e^{-1}$$

である。幸いなことに、 $\alpha_0$  はほとんど自動的に  $e^{-1}$  を追い越さないようにできているわけである。以上より、正の実数  $S_0, I_0$  で  $S_0 + I_0 \leq 1$  なるものを任意にとるとき  $0 < \alpha_0 < e^{-1}$  である。このとき、方程式  $xe^{-x} = \alpha_0$  は 2 つの異なる実数解を持つ。それらをこれまでのように  $b_{\pm}$  とする ( $0 < b_- < 1 < b_+$  である)。

ちょっとした注意であるが、ここでの  $b_{\pm}$  は方程式  $xe^{-x} = \alpha_0$  の解を指す。例えば定義 1.6 や命題 1.7 などの中の“ $b_{\pm}$ ”とは一般には異なることに注意する ( $b_{\pm}$  は  $0 < \alpha < e^{-1}$  なる  $\alpha$  ごとに決まる)。

このことに気をつけつつ、関数  $P(x; \alpha_0), Q(x; \alpha_0)$  を用いる。ここで、 $x \in \mathbb{R}$  について「 $xe^{-x} - \alpha_0 > 0$  である」と「 $x \in (b_-, b_+)$  である」ことが同値であることに注意すると、

$$\begin{aligned} & \bullet r_0(S_0 + I_0) \exp[-r_0(S_0 + I_0)] - \alpha_0 \\ &= \underbrace{r_0 S_0 \exp[-r_0(S_0 + I_0)]}_{\alpha_0} + r_0 I_0 \exp[-r_0(S_0 + I_0)] - \alpha_0 \\ &= r_0 I_0 \exp[-r_0(S_0 + I_0)] > 0 \end{aligned}$$

なので  $r_0(S_0 + I_0) \in (b_-, b_+)$  がわかる。よって、値  $r_0(S_0 + I_0)$  は関数  $P(x; \alpha_0)$  の定義域に属するので  $P(r_0(S_0 + I_0); \alpha_0)$  が存在する。これによって

$$\bullet c_1 := P(r_0(S_0 + I_0); \alpha_0)$$

とおく。このようにしておいて

$$\begin{aligned} & \bullet S(t) := \exp[Q(\gamma t + c_1; \alpha_0) - r_0 c_0], \\ & \bullet I(t) := -\exp[Q(\gamma t + c_1; \alpha_0) - r_0 c_0] + \frac{1}{r_0} Q(\gamma t + c_1; \alpha_0) \end{aligned}$$

とおくとき、これらは  $S(0) = S_0, I(0) = I_0$  を満たす SIR 方程式の (非自明な) 解になっている。

**定理 1.9 (SIR 方程式の厳密解).**  $\beta > 0, \gamma > 0$  とし  $r_0 := \beta/\gamma$  とおく。  $S_0 > 0, I_0 > 0$  で  $S_0 + I_0 \leq 1$  なるものをとる。定数  $c_0, \alpha_0$  を

$$\bullet c_0 := S_0 + I_0 - \frac{1}{r_0} \log S_0, \quad \bullet \alpha_0 := r_0 e^{-r_0 c_0}$$

とおく。このとき  $0 < \alpha_0 < e^{-1}$  である。定数  $c_1$  を

$$\bullet c_1 := P(r_0(S_0 + I_0); \alpha_0)$$

とおき、関数  $S(t), I(t)$  を

$$\begin{aligned} & \bullet S(t) := \exp[Q(\gamma t + c_1; \alpha_0) - r_0 c_0], \\ & \bullet I(t) := -\exp[Q(\gamma t + c_1; \alpha_0) - r_0 c_0] + \frac{1}{r_0} Q(\gamma t + c_1; \alpha_0) \end{aligned}$$

と定める. このようにするとき, 関数  $S(t)$ ,  $I(t)$  は SIR 方程式

$$\bullet \dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t), \quad \bullet \dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t)$$

および初期条件  $S(0) = S_0$ ,  $I(0) = I_0$  を満たす.

証明. まず, 関数  $S(t)$ ,  $I(t)$  の定義から

$$\bullet I(t) = -S(t) + \frac{1}{r_0} \log S(t) + c_0$$

であることに注意する.  $S(0) = S_0$  が成り立つことは,  $Q(c_1; \alpha_0) = r_0(S_0 + I_0)$  から

$$\begin{aligned} \bullet S(0) &= \exp[Q(c_1; \alpha_0) - r_0 c_0] \\ &= \exp[r_0(S_0 + I_0) - r_0(S_0 + I_0) + \log S_0] \\ &= S_0 \end{aligned}$$

という具合にわかる. これによって次もわかる:

$$\begin{aligned} \bullet I(0) &= -S(0) + \frac{1}{r_0} \log S(0) + c_0 \\ &= -S_0 + \frac{1}{r_0} \log S_0 + S_0 + I_0 - \frac{1}{r_0} \log S_0 \\ &= I_0. \end{aligned}$$

以下, 関数  $S(t)$ ,  $I(t)$  が SIR 方程式を満たすことを確かめる (これは既に知っているわけであるが, ここでは何も知らない体で, 素朴に計算してみる). まず

$$\begin{aligned} \bullet P'(x; \alpha_0) &= \frac{1}{\alpha_0 e^x - x}, \\ \bullet Q'(x; \alpha_0) &= \frac{1}{P'(Q(x; \alpha_0); \alpha_0)} = \alpha_0 \exp[Q(x; \alpha_0)] - Q(x; \alpha_0) \end{aligned}$$

であることに注意すると次がわかる:

$$\begin{aligned} \bullet \dot{S}(t) &= \exp[Q(\gamma t + c_1; \alpha_0) - r_0 c_0] \cdot \gamma Q'(\gamma t + c_1; \alpha_0) \\ &= \gamma S(t) \{ \alpha_0 \exp[Q(\gamma t + c_1; \alpha_0)] - Q(\gamma t + c_1; \alpha_0) \} \\ &= -\beta S(t) \left\{ \frac{-\gamma \alpha_0}{\beta} \exp[Q(\gamma t + c_1; \alpha_0)] + \frac{\gamma}{\beta} Q(\gamma t + c_1; \alpha_0) \right\} \\ &= -\beta S(t) \left\{ -\exp[Q(\gamma t + c_1; \alpha_0) - r_0 c_0] + \frac{1}{r_0} Q(\gamma t + c_1; \alpha_0) \right\} \\ &= -\beta S(t) I(t). \end{aligned}$$

$\dot{I}(t)$  については,  $I(t) = -S(t) + \frac{1}{r_0} \log S(t) + c_0$  から次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \bullet \dot{I}(t) &= -\dot{S}(t) + \frac{1}{r_0} \cdot \frac{d}{dt} \log S(t) = \beta S(t) I(t) + \frac{\gamma}{\beta} \cdot \{-\beta I(t)\} \\ &= \beta S(t) I(t) - \gamma I(t). \quad \square \end{aligned}$$

### 1.4 いくつかわかること

以上によって SIR 方程式の厳密解が得られた. これから簡単にわかることや, 例 1.5 では簡単に触れるだけで済ませていた「最終規模方程式」が成り立つための条件などを紹介する.

例 1.10. SIR 方程式の解の表示から, これまで何度か見てきた  $F(t) = \log S(t) + r_0 c_0$  とは

$$F(t) = Q(\gamma t + c_1; \alpha_0)$$

のことである. これより  $\gamma t + c_1 = P(F(t); \alpha_0)$  であるが<sup>3</sup>,  $c_1 = P(F(0); \alpha_0)$  とも書けるので, もともとの関数  $P(x; \alpha)$  の積分による表示まで戻ると

$$\begin{aligned} \bullet \gamma t &= P(F(t); \alpha_0) - P(F(0); \alpha_0) = \int_{F(0)}^{F(t)} \frac{dy}{\alpha_0 e^y - y} \\ &= \int_{F(t)}^{F(0)} \frac{e^{-y} dy}{ye^{-y} - \alpha_0} \end{aligned}$$

がわかる. よって,  $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(\gamma t + c_1; \alpha_0) = b_-$  から  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(F(t); \alpha_0) = \infty$  であるので

$$\bullet \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{F(t)}^{F(0)} \frac{e^{-y} dy}{ye^{-y} - \alpha_0} = \infty$$

も成り立つ. 途中で述べた

$$\left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{F(t)}^{F(0)} \frac{e^{-y} dy}{ye^{-y} - \alpha_0} = \infty \text{ は成り立つであろうか?} \right]$$

という問に対する答えである.

例 1.11 (“ $S(0)=1$ ”としてよいのか?). 「感染症の流行の初期時刻  $t=0$  においては, 感染者も感染症から回復した者もいなかったであろう」という気持ちで,

「SIR 方程式の解で初期条件 “ $S(0)=1, I(0)=0, R(0)=0$ ” を満たすものを考える」

などと言いたくなるかもしれない. これを満たすものとして「自明な解」 $S(t)=1, I(t)=0, R(t)=0$  が存在することは既に見たが, それでは, SIR 方程式の非自明な解に対しても初期条件 “ $S(0)=1, I(0)=0, R(0)=0$ ” を課すことは可能なのであろうか?

以下では, 実際に “ $S(0)=1$ ” とおくと何が起こるのかを見てみよう. こうすると自動的に  $I(0)=0, R(0)=0$  である. この場合は

$$\bullet c_0 = S(0) + I(0) - \frac{1}{r_0} \log S(0) = 1, \quad \bullet \alpha_0 = r_0 e^{-r_0 c_0} = r_0 e^{-r_0}$$

である.  $\alpha_0$  については  $0 < \alpha_0 < e^{-1}$  が成り立つべきであるが (SIR 方程式の解を構成するのに使う関数  $P(x; \alpha_0), Q(x; \alpha_0)$  が定義できるための条件), これは  $r_0 \neq 1$  ならば満たされるので, 追加で  $r_0 \neq 1$  も仮定する. こうすると, 方程式  $xe^{-x} = \alpha_0$  は 2 つの異なる実数解  $b_-, b_+$  を持つ

( $0 < b_- < 1 < b_+$  とする). ここまで来れば, これまで用いてきたような関数  $P(x; \alpha_0)$ ,  $Q(x; \alpha_0)$  が存在するので, 関数  $S(t)$ ,  $I(t)$  を

$$\bullet S(t) := \exp[Q(\gamma t + c_1; \alpha_0) - r_0], \quad \bullet I(t) := -S(t) + \frac{1}{r_0} \log S(t) + 1$$

と定めれば, これらが SIR 方程式の初期条件 “ $S(0)=1$ ,  $I(0)=0$ ” を満たす解になっている “はず” である. ところが, ここで次のような問題が生じる:

$$\bullet S(0)=1 \text{ を満たすように実数 } c_1 \text{ をとることはできない.}$$

実定数  $c_1$  について振り返ると, これは初期条件  $S(0)=S_0$  が満たされるようにするために用意された実数であった. 今回の場合は特に

$$“Q(c_1; \alpha_0) = r_0”$$

であればよい. 関数  $Q(x; \alpha_0)$  の像は开区間  $(b_-, b_+)$  であったので, これが成り立つような  $c_1$  が存在するには

$$“r_0 \in (b_-, b_+)”$$

でなくてはならない. しかし, 残念ながらこれは成り立たないのである. 実際,  $x \in \mathbb{R}$  について 「 $x e^{-x} - \alpha_0 > 0$  である」 ことと 「 $x \in (b_-, b_+)$  である」 ことが同値であることから,

$$\bullet r_0 e^{-r_0} - \alpha_0 = r_0 e^{-r_0} - r_0 e^{-r_0} = 0 \dots !!$$

であることによって  $r_0 \notin (b_-, b_+)$  が判明する.

以上より, 自明な解  $S(t)=1$ ,  $I(t)=0$ ,  $R(t)=0$  を除けば, SIR モデルにおいては “ $S(0)=1$ ” を課すことはできないことがわかった.

**例 1.12** ( $I(t)$  が最大になる時刻とその最大値). SIR 方程式の解  $S(t)$ ,  $I(t)$  がどのように時間変化するのか調べる. 例 1.4 によって,  $r_0 \leq 1$  の場合には  $I(t)$  は単調減少することを既に知っている. そこで, この例では  $r_0 > 1$  とし,  $S(t)$  の初期値  $S_0$  に対し条件

$$\bullet S_0 > \frac{1}{r_0}$$

を仮定する (この条件の意味はすぐにわかる). SIR 方程式  $\dot{S} = -\beta SI$ ,  $\dot{I} = \beta SI - \gamma I = \gamma(r_0 S - 1)I$  から,  $S(t)$  は狭義単調に減少するが,  $I(t)$  は

$$\bullet S(t_1) = \frac{1}{r_0}$$

となる  $t_1 > 0$  において極値をとる ( $S(t)$  は狭義単調減少し, 更に  $S_0 > 1/r_0$  を仮定しているので, このような  $t_1 > 0$  は存在する. 条件 「 $S_0 > 1/r_0$ 」 はこの  $t_1 > 0$  が存在するための条件である). 再度 SIR 方程式  $\dot{S} = -\beta SI$ ,  $\dot{I} = \gamma(r_0 S - 1)I$  に戻ると,  $S(t)$  は狭義単調減少することから,  $I(t)$  は  $t < t_1$  に

おいては  $r_0 S(t) > 1$  なので単調に増加し,  $t=t_1$  において最大値  $I(t_1)$  をとり, そこから先 ( $t > t_1$ ) は  $r_0 S(t) < 1$  なので単調に減少する. よって,  $r_0 > 1$  の場合の SIR モデルは「感染症のただ 1 回の流行」を記述するモデルであることがわかる.

「感染症のただ 1 回の流行」とは, 全く素朴に「感染者数が単調に増え, ある時刻で最大値をとり, その後は単調に減っていく」様子を指す. 我々が実際に経験する感染症の流行はそんなに単純なものではないので, このことから「SIR モデルはあくまでもモデルである」ということを了解してもらえらると思う. また,  $r_0 > 1$  であっても,  $S(t)$  の初期値  $S_0$  を  $S_0 \leq 1/r_0$  と選んだ場合には,  $I(t)$  は単調減少するだけなので, ここに述べた意味での感染症の流行に対応するような  $I(t)$  の時間変化は生じない.

上に述べた  $I(t)$  が最大になるときの時刻  $t_1$ , および  $I(t)$  の最大値  $I(t_1)$  を求めてみよう. SIR 方程式の解としての  $S(t)$  は

$$\bullet S(t) = \exp[Q(\gamma t + c_1; \alpha_0) - r_0 c_0]$$

であった.  $S(t_1) = 1/r_0$  を  $t_1$  について解こうとするときに

$$\bullet Q(\gamma t_1 + c_1; \alpha_0) = r_0 c_0 - \log r_0 = -\log(r_0 e^{-r_0 c_0}) = -\log \alpha_0$$

を経由するが, 更に計算すると

$$\bullet t_1 = \frac{1}{\gamma} \{P(-\log \alpha_0; \alpha_0) - c_1\} = \frac{1}{\gamma} \{P(-\log \alpha_0; \alpha_0) - P(r_0(S_0 + I_0); \alpha_0)\}$$

がわかる. ここでは  $0 < \alpha_0 < e^{-1}$  なので  $\alpha_0^{-1} > e$  である. よって

$$\bullet Q(\gamma t_1 + c_1; \alpha_0) = \log(\alpha_0^{-1}) > 1$$

と書いておいた方が見やすい. この  $t_1$  における  $I(t)$  の値は

$$\begin{aligned} \bullet I(t_1) &= -S(t_1) + \frac{1}{r_0} Q(\gamma t_1 + c_1; \alpha_0) = -\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_0} \log(\alpha_0^{-1}) \\ &= \frac{1}{r_0} \{\log(\alpha_0^{-1}) - 1\} \end{aligned}$$

であることがわかる. これが SIR モデルにおける感染者数の割合の最大値である (感染症の流行時に見られる感染者数のグラフの「山の高さ」に当たるもの).

上で見たように

$$t_1 = \frac{1}{\gamma} \{P(-\log \alpha_0; \alpha_0) - P(r_0(S_0 + I_0); \alpha_0)\} = \frac{1}{\gamma} \int_{-\log \alpha_0}^{r_0(S_0 + I_0)} \frac{e^{-y} dy}{ye^{-y} - \alpha_0}$$

であるが, この  $t_1$  は本当に正であろうか? これを知るために  $r_0(S_0 + I_0)$  と  $-\log \alpha_0$  の差を見ると

$$\bullet r_0(S_0 + I_0) - (-\log \alpha_0) = r_0(S_0 + I_0) + \log r_0 - r_0 c_0 = \log r_0 + \log S_0 = \log(r_0 S_0)$$

である.  $S_0$  は  $r_0 S_0 > 1$  と選んでいるので  $\log(r_0 S_0) > 0$  である. よって, 関数  $P(x; \alpha_0)$  が狭義単調減少する関数であることに注意すると, 確かに  $t_1 > 0$  である.

例 1.13 ( $S(t), I(t), R(t)$  の  $t \rightarrow \infty$  での極限). 前半部で  $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t)$  などの存在を仮定して話を進めた箇所があったが, これについても今や簡単にわかる.  $\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x; \alpha_0) = b_-$  を使うと

- $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \exp(b_- - r_0 c_0) = e^{b_-} e^{-r_0 c_0} = e^{b_-} \cdot \frac{\alpha_0}{r_0} = \frac{b_-}{r_0},$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = -\frac{b_-}{r_0} + \frac{1}{r_0} b_- = 0$

である ( $\alpha_0 e^{b_-} = b_-$  を使った). また  $S(t) + I(t) + R(t) = 1$  から次もわかる :

- $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \{S(t) + I(t)\} = 1 - \frac{b_-}{r_0}.$

ここで  $S(t)$  に目を向けると, 「 $S(t)$  は  $S_0$  からスタートして, 狭義単調に減少しつつ  $b_-/r_0$  に収束する」ことがわかる. ということは

- $S_0 > \frac{b_-}{r_0}$

であるべきだが, これは簡単に確かめられる.  $x \in \mathbb{R}$  について「 $x e^{-x} - \alpha_0 > 0$  である」ことと「 $x \in (b_-, b_+)$  である」ことが同値であることを使うと,

- $r_0 S_0 e^{-r_0 S_0} - \alpha_0 = r_0 S_0 e^{-r_0 S_0} - r_0 S_0 e^{-r_0 S_0} e^{-r_0 I_0}$   
 $= r_0 S_0 e^{-r_0 S_0} (1 - e^{-r_0 I_0}) > 0$

から  $r_0 S_0 \in (b_-, b_+)$  がわかる. よって特に  $S_0 > b_-/r_0$  である. 以上に述べてきたことは直感的にも正しい結果を与えるということである.

例 1.14 (「最終規模方程式」再び). 前半部で「最終規模方程式」というものを紹介したが, これについて再度考えてみる. 先の例 1.13 で見た通り

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 1 - \frac{b_-}{r_0}$$

であった. これを  $R_\infty$  と表記すると次のようにできる:  $\alpha_0 e^{b_-} = b_-$  を使うと

- $R_\infty + \frac{1}{r_0} \log(1 - R_\infty) = 1 - \frac{b_-}{r_0} + \frac{1}{r_0} \log\left(\frac{b_-}{r_0}\right) = 1 + \frac{1}{r_0} \log\left(\frac{b_- e^{-b_-}}{r_0}\right)$   
 $= 1 + \frac{1}{r_0} \log\left(\frac{\alpha_0}{r_0}\right).$

ここで  $c_0 = S(0) + I(0) - \frac{1}{r_0} \log S(0)$ ,  $\alpha_0 = r_0 e^{-r_0 c_0}$  であったので

- $R_\infty + \frac{1}{r_0} \log(1 - R_\infty) = 1 + \frac{1}{r_0} \log e^{-r_0 c_0}$   
 $= 1 - c_0$   
 $= 1 - \left\{ S(0) + I(0) - \frac{1}{r_0} \log S(0) \right\}$   
 $= R(0) + \frac{1}{r_0} \log S(0)$

である ( $S(0)+I(0)+R(0)=1$  を用いた). よって, 初期値  $S(0), R(0)$  を

$$\bullet R(0) + \frac{1}{r_0} \log S(0) = 0$$

を満たすように選べるときには

$$\bullet R_\infty + \frac{1}{r_0} \log(1 - R_\infty) = 0$$

が成り立つ. これを最終規模方程式と呼ぶのであった.

この通り, 最終規模方程式は初期値を「 $R(0) + \frac{1}{r_0} \log S(0) = 0$ 」と選ぶときに限り成り立つものであったが, この条件に注目してみる. 上に書いたことの途中にある

$$\bullet 1 - c_0 = R(0) + \frac{1}{r_0} \log S(0)$$

から, 最終規模方程式が成り立つようにするには

$$\bullet c_0 = 1$$

ととることと同値である. このとき

$$\bullet \alpha_0 = r_0 e^{-r_0}$$

であることに注意されたい. この状況下でも SIR 方程式の非自明な解が存在するためには, この  $\alpha_0$  にも  $0 < \alpha_0 < e^{-1}$  を満たしてもらわなければならない. これは例えば「 $r_0 \neq 1$ 」であれば満たされるが (実は「 $r_0 > 1$ 」でなくてはならないことが後に判明する), ここで少し気になることがある.

これまで見てきたことからわかるように, SIR 方程式の非自明な解を構成する際には, 基本再生産数  $r_0 = \beta/\gamma$  には特に条件を課す必要はなかった. ところが今回, 最終規模方程式が成り立つための条件として,  $r_0$  に何かしらの制限が課せられるであろうことが明らかになった (似たような現象は例 1.11 「“ $S(0)=1$ ”としてよいのか?」でも見られたが, 結局は SIR 方程式の非自明な解に対しては “ $S(0)=1$ ” を課すことはできないことが判明した). こういう状況が生じるのは正しいことなのであろうか? こういった問題意識を持ちつつ, 「最終規模方程式はいつ成り立つのか」について, 再度考えてみる.

以下,  $S(t), I(t)$  の初期値を単に  $S_0, I_0$  と表記する. 最終規模方程式が成り立つためには  $c_0=1$  となるように初期値をとらねばならない. この条件は

$$\begin{aligned} \bullet 0 &= r_0(c_0 - 1) \\ &= r_0 S_0 + r_0 I_0 - \log S_0 - r_0 \\ &= r_0 S_0 + r_0 I_0 - \log(r_0 S_0) + \log r_0 - r_0 \end{aligned}$$

とも書ける. そこで  $x = r_0 S_0, y = r_0 I_0$  とおくと, 条件  $c_0=1$  は

$$\begin{aligned} \bullet y &= -x + \log x + r_0 - \log r_0 \\ &= -x + \log x + 1 - 1 + r_0 - \log r_0 \\ &= -x + \log x + 1 + \log\left(\frac{e^{-1}}{r_0 e^{-r_0}}\right) \end{aligned}$$

とも書けることがわかる。ここだけの記号として

$$M := \log\left(\frac{e^{-1}}{r_0 e^{-r_0}}\right)$$

を使うことにする。以上より、初期値  $S_0, I_0$  は正の実数で  $S_0 + I_0 \leq 1$  を満たすようにとっていたことを思い出すと、「最終規模方程式はいつ成り立つのか」を知りたいければ、

$$\bullet D_{r_0} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} x > 0, y > 0, x + y \leq r_0, \\ y = -x + \log x + 1 + M \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

が空でない部分集合として現れるのはどういうときかを調べればよい。

まず、関数  $f(x) := -x + \log x + 1 + M$  ( $x > 0$ ) のグラフの概形を調べる。これは微分可能で

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{x}$$

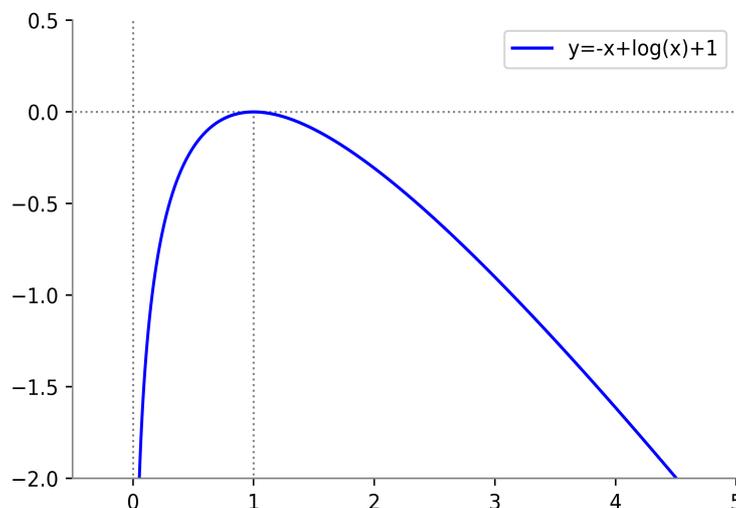
であるので、 $f(x)$  は  $0 < x < 1$  では単調増加し、 $x = 1$  で極大値  $M$  をとり、そこから先の  $x > 1$  では単調減少することがわかる。また

$$\bullet f(r_0) = -r_0 + \log r_0 + 1 + M = \underbrace{-\log\left(\frac{e^{-1}}{r_0 e^{-r_0}}\right)}_M + M = 0$$

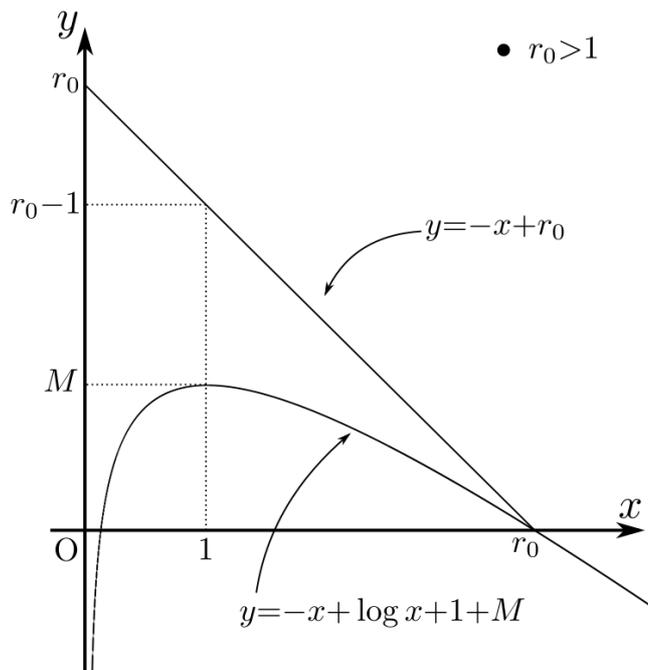
なので、関数  $f(x)$  は  $x = r_0$  をゼロ点に持つ。こういったことから、基本再生産数  $r_0$  が 1 より大きいのか小さいのかによって、関数  $f(x)$  のグラフの現れ方に違いが生じる。これについては下図および次のページの図を参照してほしい。これらを見れば、「 $r_0 > 1$ 」の場合のみ、関数  $f(x)$  のグラフが“三角地帯”

$$\bullet \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y \leq r_0\} \subset \mathbb{R}^2$$

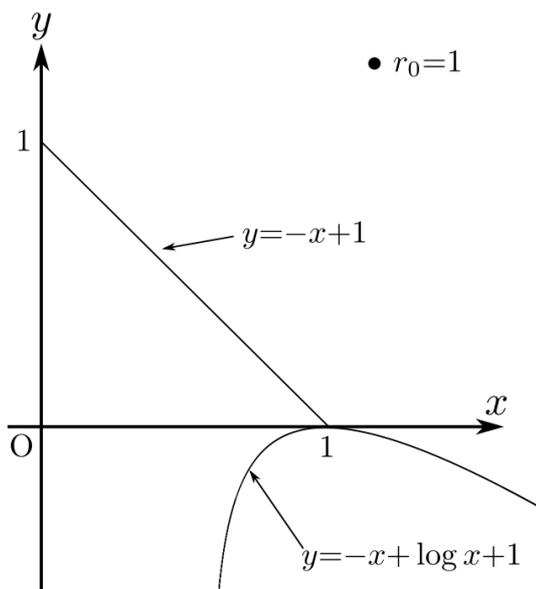
に入り込む、すなわち  $D_{r_0}$  が空でないことがわかる。



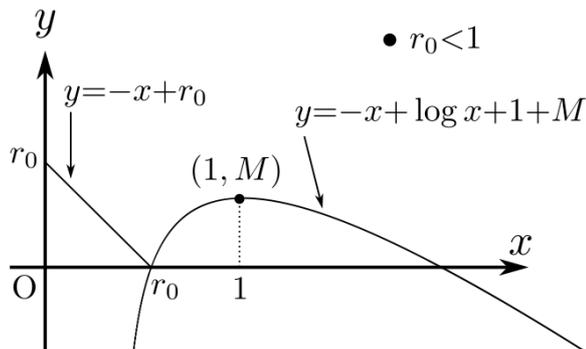
関数  $y = -x + \log x + 1$  のグラフの概形。次のページの 3 つの図の中に見られる曲線は、このグラフを適当に平行移動したものである。



$r_0 > 1$  の場合の関数  $f(x) = -x + \log x + 1 + M$  のグラフの概形. この場合は  $r_0 - 1 - M = \log r_0 > 0$  から,  $f(x)$  のグラフ上の点  $(1, M)$  は “三角地帯”  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y \leq r_0\} \subset \mathbb{R}^2$  の内部に入ることになることに注意する.



$r_0 = 1$  の場合の関数  $f(x) = -x + \log x + 1 + M$  のグラフの概形. この場合は  $M = 0$  である. 関数  $f(x)$  のグラフが “三角地帯” の内部を通らないことがわかる.



$r_0 < 1$  の場合の関数  $f(x) = -x + \log x + 1 + M$  のグラフの概形. この場合も関数  $f(x)$  のグラフは “三角地帯” の内部を通らない.

今回わかったことをまとめると次のようになる：

(1)  $r_0 > 0$  に対し  $M = \log\left(\frac{e^{-1}}{r_0 e^{-r_0}}\right)$  とし,  $D_{r_0} \subset \mathbb{R}^2$  を

$$\bullet D_{r_0} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} x > 0, y > 0, x + y \leq r_0, \\ y = -x + \log x + 1 + M \end{array} \right\}$$

とおく.  $D_{r_0}$  が空でないのは  $r_0 > 1$  であるときに限る.

(2)  $r_0 > 1$  とする. 実数  $S_0, I_0$  が

$$\bullet (r_0 S_0, r_0 I_0) \in D_{r_0}$$

を満たすように選ばれているとき, これら  $S_0, I_0$  を初期値に持つ SIR 方程式の解  $S(t), I(t)$  から定まる  $R(t) = 1 - S(t) - I(t)$  の極限  $R_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} R(t)$  について最終規模方程式

$$\bullet R_\infty + \frac{1}{r_0} \log(1 - R_\infty) = 0$$

が成り立つ.

今回の最終規模方程式の例からわかる通り, 「SIR 方程式の解の初期値にある特別な条件を課することができるのは, 基本再生産数  $r_0$  がある条件を満たす場合に限られる」というような現象は, 一般に生じ得るということである.

## 2 関連する話題

この文書では、主に SIR モデルの厳密解について見てきた。この先にどういった話題があり、どのような展開が期待できるのか、筆者なりに気楽に述べてみる。

### 2.1 Harko-Lobo-Mak の仕事

実は、「SIR モデルは厳密解を持つ」ということそれ自体を最初に指摘したのは、次の Harko-Lobo-Mak の 2014 年の論文である：

- T. Harko, F. S. N. Lobo, M. K. Mak “Exact analytical solutions of the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) epidemic model and of the SIR model with equal death and birth rates” (Applied Mathematics and Computation 236 (2014): 184-194)

ただし、Harko-Lobo-Mak が得た「SIR モデルの厳密解」とは、

$$\bullet u(t) := \exp[-r_0\{R(t) - R(0)\}]$$

とおくとき ( $r_0 = \beta/\gamma$ ),  $S, I, R$  をこの  $u$  の関数として表示したものである (Harko-Lobo-Mak は、自分たちの得た解は「in a parametric form」であると述べている)。その結果を、今回の我々の立場から再現してみる。簡単に振り返ると、正の実数  $S_0, I_0$  で  $S_0 + I_0 \leq 1$  なるものを取り、 $c_0 = S_0 + I_0 - \frac{1}{r_0} \log S_0$ ,  $\alpha_0 = r_0 e^{-r_0 c_0}$ , 更に  $c_1 = P(r_0(S_0 + I_0); \alpha_0)$  とおくとき、

$$\begin{aligned} \bullet S(t) &= \exp[Q(\gamma t + c_1; \alpha_0) - r_0 c_0], \\ \bullet I(t) &= -\exp[Q(\gamma t + c_1; \alpha_0) - r_0 c_0] + \frac{1}{r_0} Q(\gamma t + c_1; \alpha_0) \end{aligned}$$

が SIR 方程式  $\dot{S} = -\beta SI$ ,  $\dot{I} = \beta SI - \gamma I$  および初期条件  $S(0) = S_0$ ,  $I(0) = I_0$  を満たす解なのであった。さて、これを見ると、 $S + I + R = 1$  から

$$\bullet R(t) = 1 - S(t) - I(t) = 1 - \frac{1}{r_0} Q(\gamma t + c_1; \alpha_0)$$

がわかる。よって、Harko-Lobo-Mak の  $u(t)$  と  $Q(\gamma t + c_1; \alpha_0)$  の間には

$$\bullet Q(\gamma t + c_1; \alpha_0) = r_0 - r_0 R(t) = r_0 + \log u(t) - r_0 R(0)$$

なる関係があることがわかる (今の場合は  $R(0) = 1 - S_0 - I_0$  である)。これによれば、 $S, I, R$  は

$$\begin{aligned} \bullet S &= \exp[r_0 + \log u - r_0 R(0) - r_0 c_0] = \exp[r_0\{1 - S_0 - I_0 - R(0)\}] S_0 u = S_0 u, \\ \bullet I &= -S_0 u + 1 + \frac{1}{r_0} \log u - R(0) = I_0 + S_0(1 - u) + \frac{1}{r_0} \log u, \\ \bullet R &= R(0) - \frac{1}{r_0} \log u \end{aligned}$$

なる表示を持つ。これが Harko-Lobo-Mak の得た SIR モデルのパラメータ表示による厳密解である (記号はこの文書のものに合わせてある)。

上の SIR モデルのパラメータ表示された解を時間の関数として見るには、Harko-Lobo-Mak の  $u=u(t)$  と時間  $t$  の読み換えができればよいわけであるが、それは

$$\bullet Q(\gamma t+c_1; \alpha_0)=r_0+\log u-r_0 R(0)$$

によって可能である。実際、

$$\begin{aligned} \bullet \gamma t &= P(r_0+\log u-r_0 R(0); \alpha_0)-c_1 \\ &= P(\log u+r_0(S_0+I_0); \alpha_0)-P(r_0(S_0+I_0); \alpha_0) \\ &= \int_{r_0(S_0+I_0)}^{\log u+r_0(S_0+I_0)} \frac{dy}{\alpha_0 e^y - y} \end{aligned}$$

とできる。ここで  $z=\exp[y-r_0(S_0+I_0)]$  として積分変数を  $z$  に変えると

$$\bullet \gamma t = \int_1^u \frac{1}{r_0 S_0 z - \log z - r_0(S_0+I_0)} \cdot \frac{dz}{z}$$

となる。これと同等な式は Harko-Lobo-Mak の論文でも見られる。

もしかすると、「SIR モデルの素朴な意味での厳密解があるのだから、Harko-Lobo-Mak のように SIR モデルの解をわざわざパラメータ表示する必要はないのではないか？」と感じた読者がいるかもしれない。SIR モデルについてはその通りかもしれないが、Harko-Lobo-Mak は SIR モデルの拡張の一種である「エンデミック SIR モデル」のパラメータ表示された解をも得ているのである（これについては今回は触れない。気になる読者は、先に紹介した Harko-Lobo-Mak の論文を参照してほしい）。

「エンデミック SIR モデル」に軽く触れておく。SIR モデルに現れた定数  $\beta \geq 0, \gamma \geq 0$  や関数  $S(t), I(t), R(t)$  はこれまでと同様の意味を持つとする。更に、着目している集団を構成する個体の出生率  $b \geq 0$ , 死亡率  $\mu \geq 0$ （これら  $b, \mu$  は定数である）を含む次の微分方程式によって  $S(t), I(t), R(t)$  が時間発展すると考えるのがエンデミック SIR モデルである：

$$\bullet \begin{cases} \dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t) - \mu S(t) + b, \\ \dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) - \mu I(t), \\ \dot{R}(t) = \gamma I(t) - \mu R(t). \end{cases}$$

SIR モデルの方程式と比べて新たに現れた項に色をつけておいた。  $b=0, \mu=0$  とおくと、上の方程式たちは SIR モデルに退化する。

これまでと同様に、エンデミック SIR モデルにおいても  $S+I+R=1$  であると思ってよいのであるが、これには少し補足することがある。以下では  $b>0, \mu>0$  とする。上の方程式をすべて加えると

$$\bullet \frac{d}{dt}(S+I+R) = -\mu(S+I+R) + b \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(S+I+R - \frac{b}{\mu}\right) = -\mu\left(S+I+R - \frac{b}{\mu}\right)$$

である。よって、 $S+I+R$  は

$$\bullet S+I+R - \frac{b}{\mu} = A e^{-\mu t} \quad (A \in \mathbb{R})$$

という格好をしているので、特に  $A=0$  を選んで  $S+I+R=\frac{b}{\mu}$  とできる。更に、 $\frac{b}{\mu}\beta$  を改めて  $\beta$  とおき ( $\gamma$  はそのままよい)、 $\frac{\mu}{b}S$ ,  $\frac{\mu}{b}I$ ,  $\frac{\mu}{b}R$  をそれぞれ改めて  $S$ ,  $I$ ,  $R$  とおくと

$$\bullet \begin{cases} \dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t) - \mu S(t) + \mu, \\ \dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) - \mu I(t), \\ \dot{R}(t) = \gamma I(t) - \mu R(t) \end{cases}$$

が成り立つ。エンデミック SIR モデルを扱う際には、このようなスケール変換によって  $b=\mu$  の場合に限ってよいということである。

以下、 $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\mu$  はみな正であるとする。上のスケール変換後のエンデミック SIR モデルの方程式から  $\frac{d}{dt} \log I = \beta S - (\gamma + \mu)$  であるが、これを  $\dot{S} = \dots$  に代入して  $S$  を消去できる：

$$\begin{aligned} \bullet 0 &= \dot{S} + \beta SI + \mu S - \mu \\ &= \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \log I + \left( \frac{d}{dt} \log I + \gamma + \mu \right) I + \frac{\mu}{\beta} \left( \frac{d}{dt} \log I + \gamma + \mu \right) - \mu \\ &\Leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2} \log I + \mu \frac{d}{dt} \log I + \beta \left\{ \dot{I} + (\gamma + \mu) I \right\} + \mu(-\beta + \gamma + \mu) = 0. \end{aligned}$$

筆者自身はまだ調べている最中であるが、この微分方程式については、今回この文書で紹介したような初等的な方法によって厳密解が得られるようには今のところ思われない (2024 年 4 月の発言)。どういう手が考えられるであろうか？

こういう具合であるので、Harko-Lobo-Mak のエンデミック SIR モデルに関する仕事の解説や筆者の理解に進展があったら、そのときにはまた別の機会に報告したい。

## 2.2 SIR モデルの仲間

先にエンデミック SIR モデルに触れたが、これ以外にも、感染症の数理モデルとしてはいろいろなものが考えられ得る。ここでは、SIR モデルの仲間である「SEIR モデル」と「SIRS モデル」を紹介する。

**例 2.1 (SEIR モデル)**. ある者が何かの感染症に感染しており、かつ、他の者を感染させてしまう状態にあるとき、その者は「感染性を持つ」と表現する (例えば、ウイルスによる感染症の場合、感染者の体の中でウイルスが作られ、それが体外に放出されている状態)。感染症の種類によっては、感染してからしばらくの間は感染性を持たず、ある程度時間が経過してから感染性を持つようになることが経験的に知られている。このような感染症の流行をモデル化したものの 1 つが SEIR モデルである。

SEIR モデルの設定は次の通りである。人数が一定の集団の中である感染症が流行しているとする。その集団を構成する者は、感染症の流行にさらされてはいるがまだ感染していない者 (Susceptible)、自身は感染しているがまだ感染性を持たない者 (Exposed)、感染性を持つ感染者 (Infectious)、感染症から回復した者 (Recovered) の 4 つのタイプに分けられるとする。

時刻  $t$  におけるこれらの状態にある者の割合をそれぞれ  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$ ,  $R(t)$  とするとき、これらが次の微分方程式によって時間発展すると仮定するのが SEIR モデルである：

$$\bullet \begin{cases} \dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t), \\ \dot{E}(t) = \beta S(t)I(t) - \varepsilon E(t), \\ \dot{I}(t) = \varepsilon E(t) - \gamma I(t), \\ \dot{R}(t) = \gamma I(t). \end{cases}$$

ここで  $\beta \geq 0$  は感染しやすさの強度,  $\varepsilon \geq 0$  は感染性を持たない感染者が感染性を持つようになる強度,  $\gamma \geq 0$  は感染症からの回復のしやすさの強度に対応する実定数である. 微分方程式  $\dot{E} = \dots$  と  $\dot{I} = \dots$  は次のような意味を持っていると理解できる：

- $\dot{E} = \dots$  は「まだ感染していない者, 感染性を持つ感染者の存在は  $\beta SI$  という形で  $E$  の増加に寄与する.  $E$  自身が  $-\varepsilon E$  という形で  $E$  の減少に寄与しているが, これは感染性を持たない者がそのうちに感染性を持つようになることに対応する」と読める.

- $\dot{I} = \dots$  は「 $\varepsilon E$  という形の  $I$  を増やすような寄与は, 感染性を持たない者がそのうちに感染性を持つようになることに対応している.  $I$  自身が  $-\gamma I$  という形で  $I$  の減少に寄与しているが, これは感染性を持つ感染者がそのうちに回復することに対応する」と読める.

「感染した者が感染性を持つようになるまでにかかる時間」を「感染性待ち時間」と呼ぶ. SEIR モデルにおいては  $1/\varepsilon$  のことである. もしかすると

「感染性待ち時間とは『潜伏期間』のことか？」

と感じた読者がいるかもしれないが, 必ずしもそうではないことに注意する. 潜伏期間とは「感染してから発症する (症状が出る) までにかかる時間」のことを指す. 例えば, 新型コロナウイルスについては

「(感染性待ち時間) < (潜伏期間)」

であることが経験的に知られている (これが, 新型コロナウイルス感染症対策を難しいものになっている. 物騒な話で恐縮であるが, 「自分, 特に具合が悪いわけでもないんで, 大丈夫です !!」などと元気いっぱいであるように見える人が, 実は既に感染性を持ってしまっている可能性がある). とにかく, 感染性待ち時間と潜伏期間は概念としては別物である. こういった事柄に対する初等的な説明が次の文書で見られる：

- 鈴木 絢子, 西浦 博「感染症の数理モデルと対策」(日本内科学会雑誌, 2020, 109.11: 2276-2280)

SIR モデルの解を得る際にそうしたように, SEIR モデルをなるべく少ない本数の方程式に帰着させたい. そのこと自体は次のようにして可能である. 以下では例によって  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$  であるとする. まず

$$\bullet \dot{S} + \dot{E} + \dot{I} = -\gamma I = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{d}{dt} \log S$$

から次の保存量が見つかる： $r_0 := \beta/\gamma$  とおくと

$$\bullet S + E + I - \frac{1}{r_0} \log S = \text{const.}$$

この保存量の値を  $c_0 \in \mathbb{R}$  とおく。こうするとき

$$\bullet E = -S + \frac{1}{r_0} \log S - I + c_0 = -S + \frac{1}{r_0} \log S + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d}{dt} \log S + c_0$$

なので、これを  $0 = \dot{I} - \varepsilon E + \gamma I$  に代入すると次を得る：

$$\begin{aligned} \bullet 0 &= -\frac{1}{\beta} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \log S - \varepsilon \left( -S + \frac{1}{r_0} \log S + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d}{dt} \log S + c_0 \right) - \frac{1}{r_0} \cdot \frac{d}{dt} \log S \\ &\Leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2} \log S + (\gamma + \varepsilon) \frac{d}{dt} \log S + \gamma \varepsilon (\log S - r_0 S + r_0 c_0) = 0. \end{aligned}$$

更にここで  $\alpha_0 := r_0 e^{-r_0 c_0}$ ,  $F := \log S + r_0 c_0$  とおくと  $S = \exp(F - r_0 c_0)$  なので

$$\bullet \ddot{F} + (\gamma + \varepsilon) \dot{F} + \gamma \varepsilon F = \gamma \varepsilon \alpha_0 e^F$$

を得る。これが SEIR モデルをなるべく“簡単な”微分方程式にしたものであるが、果たしてこれは“解ける”のであろうか？

**例 2.2 (SIRS モデル).** 次に「SIRS モデル」を軽く紹介する。SIRS モデルにおいて考える状況自体は SIR モデルとほとんど同様であるが、これに加えて「感染症から回復した者が強度  $\alpha \geq 0$  で免疫を失い得る」効果を考慮するのが SIRS モデルである：

$$\bullet \begin{cases} \dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t) + \alpha R(t), \\ \dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t), \\ \dot{R}(t) = \gamma I(t) - \alpha R(t). \end{cases}$$

これらの方程式を少しいじるとわかるが、SIR モデルや SEIR モデルとは違って、 $S + I + R$  以外の保存量がなかなか見つからない。ただ、 $\frac{d}{dt} \log I = \beta S - \gamma$  および  $S + I + R = 1$  を用いて、方程式  $\dot{S} = \dots$  から  $S$  を消去し、 $I$  のみの微分方程式を出すことはできる。実際、

$$\begin{aligned} \bullet 0 &= \dot{S} + \beta SI - \alpha R \\ &= \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \log I + \left( \frac{d}{dt} \log I + \gamma \right) I - \alpha(1 - I) + \alpha \cdot \frac{1}{\beta} \left( \frac{d}{dt} \log I + \gamma \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2} \log I + \alpha \frac{d}{dt} \log I + \beta \left\{ \dot{I} + (\gamma + \alpha) I \right\} + \alpha(-\beta + \gamma) = 0 \end{aligned}$$

という具合である。この微分方程式自体は、先に見たエンデミック SIR モデルにおける  $I$  のみの微分方程式とほとんど同じ格好をしている。これは“解ける”のであろうか？

## 2.3 参考文献

筆者が SIR モデルを知るきっかけになったのが

- 鈴木 絢子, 西浦 博「感染症の数理モデルと対策」(日本内科学会雑誌, 2020, 109.11: 2276-2280)

である。これはあまり専門的な事柄を必要とせず気軽に読めると思うので、筆者個人としてもおすすめである。感染症の数理モデルのより進んだ内容を知りたい読者には次の本をすすめたい：

- 稲葉 寿 (編著)『感染症の数理モデル 増補版』(培風館, 2020)
- 西浦 博 (編著), 小林 鉄郎, 安齋 麻美, 合原 一幸, ナタリー・リントン (著)『感染症流行を読み解く数理』(日本評論社, 2022)

今回主に扱った SIR モデルには、次のような“拡散方程式版”が存在するらしい：

$$\bullet \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t}(x, t) = d_S \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x, t) - \beta S(x, t)I(x, t), \\ \frac{\partial I}{\partial t}(x, t) = d_I \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(x, t) + \beta S(x, t)I(x, t) - \gamma I(x, t), \\ \frac{\partial R}{\partial t}(x, t) = d_R \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}(x, t) + \gamma I(x, t). \end{cases}$$

これによれば、感染症の流行が“じわじわと”空間的に広がっていくような解が得られるという。これらのような

$$\text{“} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(u(x, t)) \text{”} \quad (\leftarrow f \text{ は適当な関数})$$

というタイプの偏微分方程式は「反応拡散方程式」と呼ばれている。反応拡散方程式は、熱帯魚やヒョウの体の表面に現れる模様がなぜあんな風になるのかとか、神経系の興奮がどのようにして起こるのかなどの研究に用いられている。こういった話題に興味のある読者は次の本を参照されたい：

- 望月 敦史『理論生物学概論』(共立出版, 2021)
- J.D. Murray (著), 三村 昌泰 (総監修), 瀬野 裕美, 河内 一樹, 中口 悦史, 三浦 岳 (監修)『マレー数理生物学入門』(丸善出版, 2014)
- J.D. Murray (著), 三村 昌泰 (総監修)『マレー数理生物学 応用編』(丸善出版, 2016)