

SIR モデルの量子力学

齋藤 洋介

yousukesaitou7@gmail.com

2025 年 7 月 7 日

SIR モデルは Hamilton 力学系であるので、これを正準量子化することが可能である。そうして現れる量子系を「量子 SIR モデル」と呼ぶとき、この系を記述する Schrödinger 方程式として、ある「微分差分方程式」が現れる。本文書ではこれを「量子 SIR 方程式」と呼ぶが、これが厳密解を持つことが級数解法によってわかる。この他、特別な場合の量子 SIR 方程式の「 $|q|=1$ 」の場合の q -無限積」によって書かれる解が存在することもわかる。

謝辞

本研究は、文部科学省による「特色ある共同研究拠点の整備の推進事業 JPMXP0723833165」の助成を受けている。

目次

1	Hamilton 力学系としての SIR モデル	3
1.1	SIR モデルについてのまとめ	3
1.2	SIR モデルを Hamilton 力学系とみなす方法	5
2	量子 SIR モデルを解く	7
2.1	量子 SIR 方程式	7
2.2	細部のチェック	10
2.3	量子 SIR 方程式の特性指数が 0 以上の整数である解	15
3	「 $\gamma=0$ の場合」の量子 SIR モデル	18
3.1	既に知っている解で「 $\gamma=0$ 」とおくだけでよいのでは？	18
3.2	準備：「 $ q =1$ 」の場合の q -無限積	19
3.3	「 $\gamma=0$ 」の場合の量子 SIR 方程式の解	21
3.4	解に周期 $i\hbar\beta$ の周期関数をかけるだけの不定性	23
4	残されていることと関連する話題	25
4.1	量子 SIR 方程式の解は得られたが	25
4.2	Heisenberg 描像による量子 SIR モデル	26
4.3	確率微分方程式との関連	26

1 Hamilton 力学系としての SIR モデル

本文書のメインは「SIR モデルの正準量子化」であるが、その準備として「SIR モデルは Hamilton 力学系である」ということを軽く解説する。

1.1 SIR モデルについてのまとめ

感染症の数理モデルの 1 つとして「SIR モデル」と呼ばれるものがあった：

$$\bullet \frac{dS}{dt}(t) = -\beta S(t)I(t), \quad \bullet \frac{dI}{dt}(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t), \quad \bullet \frac{dR}{dt}(t) = \gamma I(t).$$

簡単に述べると、 $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ はそれぞれ時刻 t における「まだ感染していない者の人数の割合」、「感染者数の割合」、「感染症から回復した者の人数の割合」である。よって、任意の時刻 t において

$$\bullet S(t) + I(t) + R(t) = 1$$

であると理解する。 $\beta \geq 0$ は感染症へのかかりやすさの強度、 $\gamma \geq 0$ は感染症からの回復のしやすさの強度に対応する実定数である。これらの微分方程式を「SIR 方程式」と呼ぶ。

SIR モデルの設定や性質、厳密解やその他の関連する事柄については、筆者による次の文書やそこで引用されている文献を参照してほしい：

- 齋藤 洋介「SIR モデルの厳密解」(OCAMI Preprint Series, 2024)

ここで SIR 方程式の厳密解について軽く述べておく。以下では $\beta > 0$, $\gamma > 0$ とし $r_0 := \frac{\beta}{\gamma}$ とおく (基本再生産数)。関数 $S(t)$, $I(t)$ が SIR 方程式の解になっているとすれば

$$\bullet \frac{dS}{dt}(t) + \frac{dI}{dt}(t) = -\gamma I(t) = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{d}{dt} \log S(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left\{ S(t) + I(t) - \frac{1}{r_0} \log S(t) \right\} = 0$$

が成り立つ。すなわち

$$\bullet S(t) + I(t) - \frac{1}{r_0} \log S(t) = \text{const.}$$

ということであるが、ここに見えている定数を「SIR モデルのエネルギー」というつもりで

$$\bullet E := S(t) + I(t) - \frac{1}{r_0} \log S(t) = \text{const.}$$

とおく (この E の値は初期条件によって決まる)。ここで $f(t) := \log S(t)$ とおくと $\frac{df}{dt}(t) = -\beta I(t)$ であるが、 $I(t) = -e^{f(t)} + \frac{1}{r_0} f(t) + E$ なので

$$\bullet \frac{df}{dt}(t) = -\beta \left\{ -e^{f(t)} + \frac{1}{r_0} f(t) + E \right\} = \gamma \left\{ r_0 e^{f(t)} - f(t) - r_0 E \right\}$$

である. そこで $F(t):=f(t)+r_0E$ 及び $\alpha_0:=r_0e^{-r_0E}$ とおくと

$$\bullet \frac{dF}{dt}(t)=\gamma\left\{\alpha_0e^{F(t)}-F(t)\right\}$$

である. これはいわゆる「変数分離形の微分方程式」であるので, あとは

$$\text{“}\int\frac{dx}{\alpha_0e^x-x}\text{”}$$

といった格好の関数を用意でき, またその関数が逆関数を持つような都合のよいタイプのものであれば, SIR 方程式の解を具体的に書くことができる. これは実際に可能である:

• $0<\alpha<e^{-1}$ なる実数 α を 1 つとるとき, 方程式 $xe^{-x}=\alpha$ は 2 つの異なる実数解を持つ. それらのうち小さい方を b_- , 大きい方を b_+ と書く ($0<b_-<1<b_+$ である). このとき, 関数 $P(x;\alpha)$ を

$$\bullet P(x;\alpha):=\int_1^x\frac{dy}{\alpha e^y-y}\quad (x\in(b_-,b_+))$$

と定めると, これは逆関数を持つので, それを $Q(x;\alpha)$ と書く. $Q(x;\alpha)$ は $\mathbb{R}$ 全体で定義されており, その像は开区間 (b_-,b_+) である. $Q(x;\alpha)$ は微分可能で次が成り立つ:

$$\bullet Q'(x;\alpha)=\alpha\exp[Q(x;\alpha)]-Q(x;\alpha).$$

上で用意した関数 $P(x;\alpha)$, $Q(x;\alpha)$ を使えば, SIR 方程式の厳密解を構成することができる. まず, 正の実数 S_0, I_0 で $S_0+I_0\leq 1$ なるものを取り,

$$\bullet E:=S_0+I_0-\frac{1}{r_0}\log S_0, \quad \bullet \alpha_0:=r_0e^{-r_0E}$$

とおく. このとき α_0 について

$$\bullet 0<\alpha_0=r_0S_0e^{-r_0S_0}\underbrace{e^{-r_0I_0}}_{1\text{より小さい}}<r_0S_0e^{-r_0S_0}\leq e^{-1}$$

が成り立つので ($xe^{-x}\leq e^{-1}$ ($x\in\mathbb{R}$) を用いた), 先に用意した関数 $P(x;\alpha_0)$, $Q(x;\alpha_0)$ が使える. 先ほどと同様に, 方程式 $xe^{-x}=\alpha_0$ の 2 つの実数解を b_- , b_+ と書くとき ($b_-<b_+$),

$$\bullet xe^{-x}-\alpha_0\Big|_{x=r_0(S_0+I_0)}=r_0(S_0+I_0)\exp[-r_0(S_0+I_0)]-\alpha_0=r_0I_0\exp[-r_0(S_0+I_0)]>0$$

であることから

$$\bullet r_0(S_0+I_0)\in(b_-,b_+)$$

がわかるので, これを $P(x;\alpha_0)$ に代入したものを

$$\bullet c_1=P(r_0(S_0+I_0);\alpha_0)$$

とおく. 以上の準備によって次が成り立つ:

- 関数 $S(t), I(t)$ を次で定める :

$$\begin{aligned} & \bullet S(t) := \exp[Q(\gamma t + c_1; \alpha_0) - r_0 E], \\ & \bullet I(t) := -\exp[Q(\gamma t + c_1; \alpha_0) - r_0 E] + \frac{1}{r_0} Q(\gamma t + c_1; \alpha_0). \end{aligned}$$

これらは SIR 方程式

$$\bullet \frac{dS}{dt}(t) = -\beta S(t)I(t), \quad \bullet \frac{dI}{dt}(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t)$$

及び初期条件 $S(0)=S_0, I(0)=I_0$ を満たす.

最後に次のことに注意する. SIR 方程式の解の初期値 $S_0, I_0 > 0$ を $S_0 + I_0 \leq 1$ を満たすようにとるとき, $E = S_0 + I_0 - \frac{1}{r_0} \log S_0$ 及び $\alpha_0 = r_0 e^{-r_0 E}$ について $0 < \alpha_0 < e^{-1}$ が成り立つのであった. これより $-\log \alpha_0 = r_0 E - \log r_0 > 1$ であるが, これを E について解くと

$$\bullet E > \frac{1 + \log r_0}{r_0}$$

を得る. SIR モデルのエネルギーは必ずこの条件を満たすようにして現れるというわけである. この事実が, 後に量子 SIR モデルのエネルギーを考える際に必要になる.

1.2 SIR モデルを Hamilton 力学系とみなす方法

SIR モデルを Hamilton 力学系として見るためには, 何か適当な「正準共役な力学変数」を見つける必要がある. それは次のようにしてできる. SIR モデルにおいては

$$\bullet S + I - \frac{1}{r_0} \log S = \text{const.}$$

であったので, 全く素朴に

$$\bullet H(S, I) := S + I - \frac{1}{r_0} \log S$$

を Hamiltonian に持つような SIR モデルの記述を考える. こうするとき, Poisson 括弧は

$$\bullet \{S, I\}_{\text{PB}} = -\beta SI$$

が成り立つように定めるしかない (SIR 方程式の格好から明らかである). これを満たす Poisson 括弧として次のものがある: S, I の滑らかな関数 $f = f(S, I), g = g(S, I)$ に対して

$$\bullet \{f, g\}_{\text{PB}} := -\beta SI \left(\frac{\partial f}{\partial S} \cdot \frac{\partial g}{\partial I} - \frac{\partial f}{\partial I} \cdot \frac{\partial g}{\partial S} \right)$$

と定める. こうすると $\{S, I\}_{\text{PB}} = -\beta SI$ であるし, 更に

$$\bullet \{S, H\}_{\text{PB}} = \{S, I\}_{\text{PB}} = -\beta SI, \quad \bullet \{I, H\}_{\text{PB}} = \left\{ I, S - \frac{1}{r_0} \log S \right\}_{\text{PB}} = \beta SI - \gamma I$$

なので, この Poisson 括弧が SIR 方程式を再現することがわかる. すなわち

$$\bullet \frac{dS}{dt} = -\beta SI = \{S, H\}_{\text{PB}}, \quad \bullet \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I = \{I, H\}_{\text{PB}}$$

である. ただ, この Poisson 括弧について (S, I) は「正準共役な力学変数」になっていない. そこで次のようにする: 力学変数 x, p を

$$\bullet x := \log I, \quad \bullet p := \frac{1}{\beta} \log S$$

とおくとき, これらは SIR モデルの正準共役変数になっている. 実際に

$$\bullet \{x, p\}_{\text{PB}} = \beta SI \frac{\partial}{\partial I} (\log I) \cdot \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{1}{\beta} \log S \right) = SI \cdot \frac{1}{SI} = 1$$

である. この (x, p) を用いるとき, Hamiltonian は

$$\bullet H(x, p) = e^{\beta p} - \gamma p + e^x$$

と書ける. 以上をまとめると次のようになる:

• SIR モデルは, $x = \log I, p = \frac{1}{\beta} \log S$ を正準共役変数に持ち,

$$\bullet H(x, p) = e^{\beta p} - \gamma p + e^x$$

を Hamiltonian に持つ Hamilton 力学系である.

上の Hamiltonian に対する Hamilton 方程式を書き下すと次のようになる:

$$\bullet \frac{dx}{dt}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t)) = \beta e^{\beta p(t)} - \gamma, \quad \bullet \frac{dp}{dt}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t)) = -e^{x(t)}.$$

ここで $H(x(t), p(t)) = E = \text{const.}$ とおくと $e^{x(t)} = E - e^{\beta p(t)} + \gamma p(t)$ なので

$$\bullet \frac{dp}{dt}(t) = \beta e^{\beta p(t)} - \gamma p(t) - E$$

である. 当然であるが, これは先に見たのと同様にすれば解ける.

SIR モデルを Hamilton 力学系とみなすやり方としては, 正準共役変数を

$$\bullet X := \log S, \quad \bullet P := -\frac{1}{\beta} \log I$$

ととることにしてもよい. 実際,

$$\bullet \{X, P\}_{\text{PB}} = -\beta SI \frac{\partial}{\partial S} (\log S) \cdot \frac{\partial}{\partial I} \left(-\frac{1}{\beta} \log I \right) = 1$$

が成り立つ. こうするとき, Hamiltonian は

$$\bullet H(X, P) = e^{-\beta P} + e^X - \frac{1}{r_0} X$$

である. ただ, SIR モデルの量子化の結果現れる Schrödinger 方程式を解くのに都合のよい正準共役変数のとり方は, 先に述べた (x, p) の方であるので (これについては後述する), 以下ではこちらを使う.

2 量子 SIR モデルを解く

先に見た通り, SIR モデルは Hamilton 力学系なのであった. ということは, SIR モデルは素朴に量子化できるはずである. その結果として現れる Schrödinger 方程式はどのような格好をしているであろうか? 更に, それは具体的に解けるのであろうか?

以下では, 基本再生産数 $r_0 = \beta/\gamma$ について $r_0 > 1$ である場合に限定して考える.

2.1 量子 SIR 方程式

SIR モデルの Hamiltonian として

$$\bullet H(x, p) = e^{\beta p} - \gamma p + e^x$$

がとれたので, この系を正準量子化したものが, 置き換え $p \rightarrow -i\hbar \frac{d}{dx}$ によって生じる

$$\bullet \hat{H} = H\left(x, -i\hbar \frac{d}{dx}\right) = \exp\left(-i\hbar\beta \frac{d}{dx}\right) + i\hbar\gamma \frac{d}{dx} + e^x$$

なる (量子力学版) Hamiltonian によって記述されると思うのは自然なことである ($\hbar > 0$ は「Planck 定数」). こうして現れた量子系を「量子 SIR モデル」と呼ぶ.

一般に, $\exp\left(a \frac{d}{dx}\right)$ ($a \in \mathbb{C}$) という格好の作用素が適当な関数 $f(x)$ に対して

$$\bullet \exp\left(a \frac{d}{dx}\right) f(x) = f(x+a)$$

と働くことから, 量子 SIR モデルを記述する Schrödinger 方程式は

$$\begin{aligned} \bullet \hat{H}\psi(x) &= \left\{ \exp\left(-i\hbar\beta \frac{d}{dx}\right) + i\hbar\gamma \frac{d}{dx} + e^x \right\} \psi(x) = E\psi(x) \\ \Leftrightarrow \psi(x-i\hbar\beta) + i\hbar\gamma \frac{d\psi}{dx}(x) + e^x \psi(x) &= E\psi(x) \end{aligned}$$

であることがわかる (系を記述する Schrödinger 方程式として差分を含む方程式が現れたことに注意). この方程式を「量子 SIR 方程式」と呼ぶ. 「エネルギー固有値 E 」は, とりあえずは

$$\bullet E > \frac{1 + \log r_0}{r_0}$$

なる実数であるとおこう.

$x = \log I$ としているが, (古典) SIR モデルでは $0 < I < 1$ であったので $-\infty < x < 0$ である. よって, 「量子 SIR 方程式の解 $\psi(x)$ としては, $-\infty < x < 0$ で定義された実変数の関数を求めればよい」と考えそうになるが, 量子 SIR 方程式には $\psi(x-i\hbar\beta)$ なる項があるので, $\psi(x)$ は複素変数の関数である

と考えるべきである。また、量子 SIR 方程式には $i\hbar\gamma\frac{d\psi}{dx}(x)$ なる項もあるので、以下では、量子 SIR 方程式の解 $\psi(x)$ としては「 $\mathbb{C}$ の左半分 $\{x \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(x) < 0\}$ 」の適当な部分集合で正則なものを探す。

第 1 章の 1.1 「SIR モデルについてのまとめ」の最後で述べたように、(古典) SIR モデルのエネルギー E は $E > \frac{1+\log r_0}{r_0}$ を満たすのであった。一方、量子力学においては「古典系を正準量子化して得られた量子系のエネルギーは、少なくとも古典の場合のエネルギーに課せられる条件を満たすようにして現れる」ので (これは量子力学の作業仮説の一種であると思う)、量子 SIR モデルのエネルギー E も少なくとも $E > \frac{1+\log r_0}{r_0}$ は満たす必要があると考える。

(古典) SIR モデルを Hamilton 力学系とみなすやり方として、正準共役変数を

$$\bullet X = \log S, \quad \bullet P = -\frac{1}{\beta} \log I$$

ととってもよかった。こうするとき、(古典) Hamiltonian は

$$\bullet H(X, P) = e^{-\beta P} + e^X - \frac{1}{r_0} X$$

であるので、この場合の量子 SIR モデルの Schrödinger 方程式は次のようになる：

$$\bullet H\left(X, -i\hbar\frac{d}{dX}\right)\varphi(X) = E\varphi(X) \Leftrightarrow \varphi(X+i\hbar\beta) + \left(e^X - \frac{1}{r_0}X\right)\varphi(X) = E\varphi(X).$$

こちらを解くことを考えてもよいはずであるが、これは級数解法によって簡単に解ける格好をしていないので、今回は扱わない。

さて、量子 SIR 方程式は「微分差分方程式」とでもいうべき格好をしているが、具体的に解けるのであろうか？ 意外なことに、これは初等的に解けるのである。 $z=e^x$, $\rho=e^{i\hbar\beta}$ とおき、 $\psi(x)=\psi(\log z)$ を単に $\psi(z)$ と書くとき、量子 SIR 方程式は

$$\bullet \psi(\rho^{-1}z) + i\hbar\gamma z \frac{d\psi}{dz}(z) + z\psi(z) = E\psi(z)$$

であるが、これを級数解法によって解くことを考えよう。

「 $\mathbb{C}$ の左半分 $\{x \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(x) < 0\}$ 」の元 x に対し、 $z=e^x$ とおくと $0 < |z| < 1$ である。よって、素朴に考えれば、量子 SIR 方程式の解 $\psi(z)$ としては「原点を中心とした半径 1 の開円盤から原点を除いたもの」である

$$\bullet \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$$

の適当な部分集合において正則なものを求めればよい。よって、 z の負べきの項を無限個含み得る

$$\bullet \psi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$$

のような格好の解を探すことにしてもよい。ただ、物理の立場からは

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) = 0 \quad (\leftarrow \text{元々の加法的な変数 } x \text{ の関数としての表示})$$

である解に特に興味があるので ($\psi(x)$ の 2 乗可積分性のために必要である), 我々も以下では $\lim_{z \rightarrow 0} \psi(z)$ が存在し得る格好の解を探すことにする.

さて, 量子 SIR 方程式の解として, $\lambda \in \mathbb{C}$ を含む

$$\bullet \psi(z) = z^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\lambda+k}$$

なる収束するべき級数解が存在したと仮定する. これを量子 SIR 方程式に代入すると

$$\bullet \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-\lambda-k} a_k z^{\lambda+k} + \sum_{k=0}^{\infty} i\hbar\gamma(\lambda+k) a_k z^{\lambda+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\lambda+k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} E a_k z^{\lambda+k}$$

である. まず z^λ の係数の情報から

$$\bullet \rho^{-\lambda} a_0 + i\hbar\gamma\lambda a_0 = E a_0$$

であるが, 以下では $a_0 \neq 0$ なる解を探すことにすると, λ は

$$\bullet \rho^{-\lambda} + i\hbar\gamma\lambda = E$$

を満たさなくてはならない. これがいわゆる「特性指数」を決めるわけであるが, この方程式の解が本当に存在するのかについては後回しにして, 話を進める. 次に $z^{\lambda+k}$ ($k \in \mathbb{Z}_{>0}$) の係数の情報から

$$\bullet \rho^{-\lambda-k} a_k + i\hbar\gamma(\lambda+k) a_k + a_{k-1} = E a_k \Leftrightarrow \{E - \rho^{-\lambda-k} - i\hbar\gamma(\lambda+k)\} a_k = a_{k-1}$$

である. これより

$$\bullet a_k = \prod_{j=1}^k \frac{1}{E - \rho^{-\lambda-j} - i\hbar\gamma(\lambda+j)} \times a_0 \quad (k \in \mathbb{Z}_{>0})$$

がわかる (分母に注意 !!). 以下では基本的に $a_0 = 1$ とおく.

実は, 上のようなことができるためには, $\rho^{-\lambda} + i\hbar\gamma\lambda = E$ なる $\lambda \in \mathbb{C}$ をとるとき,

$$\bullet E - \rho^{-\lambda-k} - i\hbar\gamma(\lambda+k) = 0$$

となるような $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ は存在しないのか調べておく必要がある. これについては後述する.

こうして, 量子 SIR 方程式のべき級数解として

$$\bullet \psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=1}^k \frac{1}{E - \rho^{-\lambda-j} - i\hbar\gamma(\lambda+j)} \cdot z^{\lambda+k}$$

が得られたが (上で述べたように, 細かなことについては後で補足する), この収束半径は

$$\bullet \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k-1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |E - \rho^{-\lambda-k} - i\hbar\gamma(\lambda+k)| = \infty$$

であることがわかる ($\gamma > 0$ が効いている).

2.2 細部のチェック

以上によって、量子 SIR 方程式の厳密解が存在するらしいことはわかった。ここで次の話が残っている：上で方程式 $\rho^{-\lambda} + i\hbar\gamma\lambda = E$ の解 $\lambda \in \mathbb{C}$ を使っていたが、このような複素数は本当に存在するのか？更には、どのような E に対してはそういった $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在するのか？

上で得られた量子 SIR 方程式の解を元の変数 x の関数として書くと

$$\bullet \psi(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=1}^k \frac{1}{E - \rho^{-\lambda-j} - i\hbar\gamma(\lambda+j)} \cdot e^{kx} = e^{\lambda x} \{1 + O(e^x)\}$$

である。よって、 $\psi(x)$ を「半直線」 $-\infty < x < 0$ に制限したものは、 $x \sim -\infty$ とするときに

$$\bullet \psi(x) \sim e^{\lambda x}$$

なので、 $\text{Re}(\lambda) > 0$ ならば $\int_{-\infty}^0 |\psi(x)|^2 dx < \infty$ である。こういった事柄を気にしながら調べていく。

さて、ある $E > \frac{1 + \log r_0}{r_0}$ に対して、 $\lambda \in \mathbb{C}$ が $\rho^{-\lambda} + i\hbar\gamma\lambda = E$ を満たすとする。ここで

$$\begin{aligned} \bullet \rho^{-\lambda} &= \exp(-i\hbar\beta\lambda) = \exp[-i\hbar\beta\text{Re}(\lambda) + \hbar\beta\text{Im}(\lambda)] \\ &= \exp[\hbar\beta\text{Im}(\lambda)] \cdot [\cos\{\hbar\beta\text{Re}(\lambda)\} - i\sin\{\hbar\beta\text{Re}(\lambda)\}] \end{aligned}$$

なので、 λ の満たす条件は次のように書ける： $X = \hbar\beta\text{Re}(\lambda)$, $Y = \hbar\beta\text{Im}(\lambda)$ とおくと

$$\begin{aligned} \bullet 0 &= \rho^{-\lambda} + i\hbar\gamma\lambda - E = e^Y (\cos X - i\sin X) + i\frac{\gamma}{\beta}(X + iY) - E \\ &= e^Y \cos X - \frac{\gamma}{\beta}Y - E + i\left(-e^Y \sin X + \frac{\gamma}{\beta}X\right). \end{aligned}$$

よって、 λ が満たす条件は次と同値である： $r_0 = \beta/\gamma$ とおくと ($\leftarrow$ 基本再生産数)

$$\bullet \begin{cases} e^Y \cos X - \frac{1}{r_0}Y = E, \\ -e^Y \sin X + \frac{1}{r_0}X = 0. \end{cases} \quad \dots (*)$$

最初に $X=0$ である場合が可能か調べる。(*) の 2 本目の方程式において $X=0$ としたものは Y に関係なく成り立つ。(*) の 1 本目の方程式において $X=0$ とすると

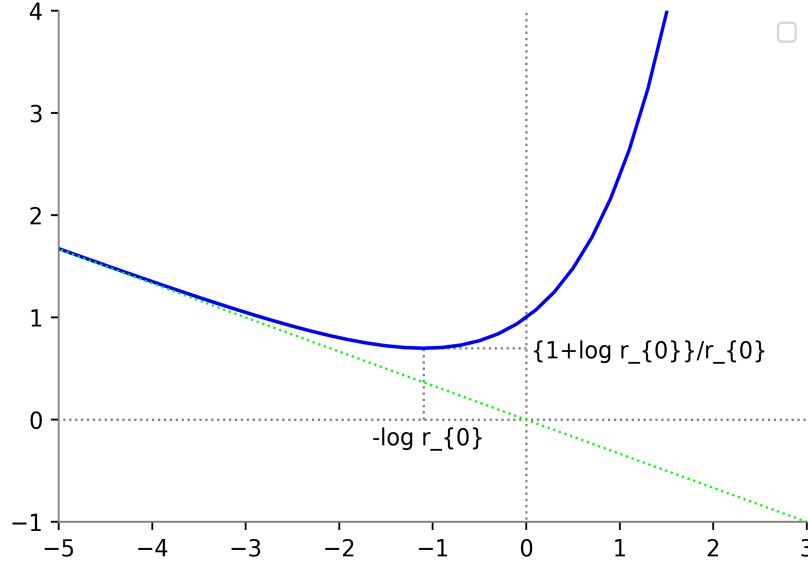
$$\bullet e^Y - \frac{1}{r_0}Y = E$$

である。これが実数解を持つように E がとられていればよい。

この場合について軽く述べておく。 $f(x) = e^x - \frac{1}{r_0}x$ とおくと $f'(x) = e^x - \frac{1}{r_0}$ なので、 $f(x)$ は $x = -\log r_0 < 0$ において最小値 $\frac{1 + \log r_0}{r_0} > 0$ をとる (ここで $r_0 > 1$ が効いている)。よって、 E が

$$\bullet E \geq \frac{1 + \log r_0}{r_0}$$

を満たすならば, 方程式 $e^Y - \frac{1}{r_0}Y = E$ は実数解を持つ. E は $E > \frac{1 + \log r_0}{r_0}$ を満たすと仮定している
 ので, 方程式 $e^Y - \frac{1}{r_0}Y = E$ は常に 2 つの異なる実数解を持つ.



関数 $y = e^x - \frac{1}{r_0}x$ のグラフの概形 (青色). $x = -\log r_0$ において最小値 $\frac{1 + \log r_0}{r_0}$ をとる. $x \sim -\infty$ で直線 $y = -\frac{1}{r_0}x$ (緑色の点線) に漸近する. 上の図は $r_0 = 3$ としたものである.

以下では $X > 0$ なる解を探すことを考える ((X, Y) が上の方程式 (*) を満たすとき, $(-X, Y)$ も解になっていることに注意). この場合, (*) の 2 本目の方程式から

$$\bullet \frac{\sin X}{X} = \frac{1}{r_0} e^{-Y} > 0$$

である. よって, (*) の解 (X, Y) で $X > 0$ なるものが存在するならば $\sin X > 0$ である必要がある. この「 $X > 0$ かつ $\sin X > 0$ 」は $X \in \bigcup_{k=0}^{\infty} (2\pi k, \pi + 2\pi k)$ に同値であるが, このとき

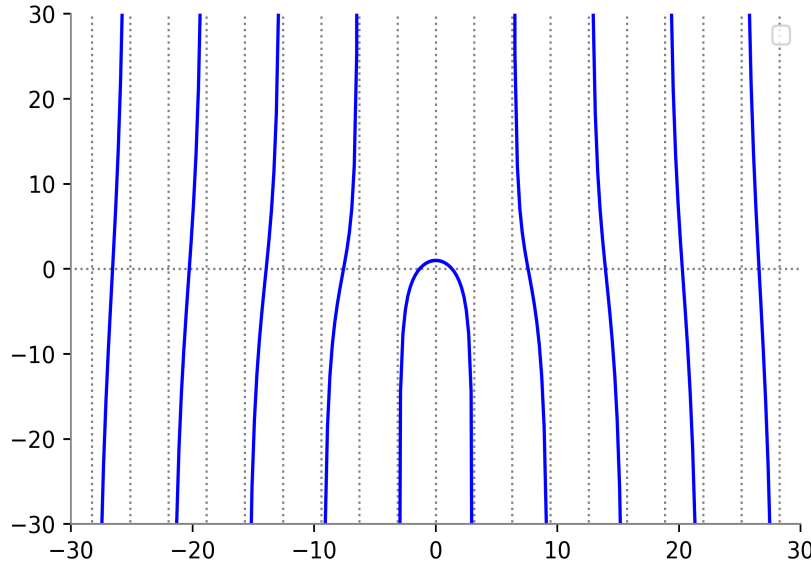
$$\bullet e^Y = \frac{1}{r_0} \cdot \frac{X}{\sin X} \Leftrightarrow Y = -\log r_0 + \log \left(\frac{X}{\sin X} \right)$$

とできる. これを (*) の 1 本目の方程式に代入すると

$$\begin{aligned} \bullet \frac{1}{r_0} \cdot \frac{X}{\sin X} \cdot \cos X - \frac{1}{r_0} \left\{ -\log r_0 + \log \left(\frac{X}{\sin X} \right) \right\} - E &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{X}{\tan X} - \log \left(\frac{X}{\sin X} \right) &= r_0 E - \log r_0 \end{aligned}$$

が出る. この方程式が実数解を持つような E の満たすべき条件を調べればよい.

「Python」によって関数 $y = \frac{x}{\tan x} - \log \left(\frac{x}{\sin x} \right)$ のグラフを出して確かめたところ, E が何であっても, 方程式 $\frac{X}{\tan X} - \log \left(\frac{X}{\sin X} \right) = r_0 E - \log r_0$ は無限個の解を持つことがわかる (次のページの図を参照). 「特別な E のみが許される」といったような難しい話ではないらしく, その点は助かる.



関数 $y = \frac{x}{\tan x} - \log\left(\frac{x}{\sin x}\right)$ のグラフの概形. 縦の点線は π ごとに引いている. これは方程式 $\rho^{-\lambda} + i\hbar\gamma\lambda = E$ の $\text{Re}(\lambda) \neq 0$ なる解を探す場合にしか使えないことに注意.

上図の関数 $y = \frac{x}{\tan x} - \log\left(\frac{x}{\sin x}\right)$ のグラフの概形から, $E > \frac{1 + \log r_0}{r_0}$ が何であれ, 方程式 $\frac{X}{\tan X} - \log\left(\frac{X}{\sin X}\right) = r_0 E - \log r_0$ は正の実数解をいくらかも持つことがわかる. このことは, 量子 SIR 方程式の解 $\psi(x)$ の 2 乗可積分性にとって都合のよいことである.

実は, もう 1 つ調べるべきことが残っている. $E > \frac{1 + \log r_0}{r_0}$ である各 E に対し, 方程式 $\rho^{-\lambda} + i\hbar\gamma\lambda = E$ の解が存在することはわかった. それはよかったのであるが, ここで次のことが問題となる: 果たして, 任意の $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$\bullet E - \rho^{-\lambda-k} - i\hbar\gamma(\lambda+k) \neq 0$$

であるように方程式 $\rho^{-\lambda} + i\hbar\gamma\lambda = E$ の解 $\lambda \in \mathbb{C}$ を選べるのか?

量子 SIR 方程式を級数解法で解くとき, ベキ級数解の係数 $\{a_k\}_{k \geq 0}$ の満たす漸化式として

$$\bullet \left\{ E - \rho^{-\lambda-k} - i\hbar\gamma(\lambda+k) \right\} a_k = a_{k-1} \quad (k \in \mathbb{Z}_{>0})$$

が現れた. もし, ある $k_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ があって $E - \rho^{-\lambda-k_0} - i\hbar\gamma(\lambda+k_0) = 0$ が成り立つ場合, ちょっと困ったことになる. 例えば $E - \rho^{-\lambda-3} - i\hbar\gamma(\lambda+3) = 0$ が成り立つとする ($k_0=3$). そうすると,

$$\begin{aligned} \bullet & \underbrace{\left\{ E - \rho^{-\lambda-3} - i\hbar\gamma(\lambda+3) \right\}}_0 a_3 = a_2 = 0, \\ \bullet & \left\{ E - \rho^{-\lambda-2} - i\hbar\gamma(\lambda+2) \right\} \underbrace{a_2}_0 = a_1 = 0, \\ \bullet & \left\{ E - \rho^{-\lambda-1} - i\hbar\gamma(\lambda+1) \right\} \underbrace{a_1}_0 = a_0 = 0 \dots ?? \end{aligned}$$

という具合に “ $a_0=0$ ” となってしまう. 「量子 SIR 方程式のベキ級数解で $a_0 \neq 0$ であるものを探す」というつもりで条件 $\rho^{-\lambda} + i\hbar\gamma\lambda = E$ を見ていたので, これではおかしいというわけである.

こういったわけで、上に述べた問題は、量子 SIR 方程式を級数解法によって解く際、切実な問題である。これは次のようにして解決できる。

命題 2.1. E を $E > \frac{1 + \log r_0}{r_0}$ なる実数とする。 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ が方程式 $\rho^{-\lambda} + i\hbar\gamma\lambda = E$ の解になっており、かつ $\text{Im}(\lambda_1) = \text{Im}(\lambda_2)$ であるとする。このとき $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2)$ または $\text{Re}(\lambda_1) = -\text{Re}(\lambda_2)$ が成り立つ。

証明. $\lambda \in \mathbb{C}$ が方程式 $\rho^{-\lambda} + i\hbar\gamma\lambda = E$ の解であるとき、 $X = \hbar\beta\text{Re}(\lambda)$, $Y = \hbar\beta\text{Im}(\lambda)$ について

$$\bullet e^Y \cos X - \frac{1}{r_0} Y = E, \quad \bullet -e^Y \sin X + \frac{1}{r_0} X = 0$$

が成り立つのであった。よって、上の仮定から、

$$\bullet X_i = \hbar\beta\text{Re}(\lambda_i) \quad (i=1, 2), \quad \bullet Y = \hbar\beta\text{Im}(\lambda_1) = \hbar\beta\text{Im}(\lambda_2)$$

とおくとき

$$\bullet \begin{cases} e^Y \cos X_i - \frac{1}{r_0} Y = E, \\ -e^Y \sin X_i + \frac{1}{r_0} X_i = 0 \end{cases} \quad (i=1, 2)$$

である。これらのうち E を含む条件同士の差をとると

$$\bullet e^Y (\cos X_1 - \cos X_2) = 0$$

であるが、これは $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$ ($A, B \in \mathbb{R}$) によって

$$\bullet \sin \frac{X_1 + X_2}{2} \sin \frac{X_1 - X_2}{2} = 0$$

と同値である。こうして $\sin \frac{X_1 + X_2}{2} = 0$ または $\sin \frac{X_1 - X_2}{2} = 0$ であるが、これと残りの条件から何がわかるのかを見ていく。

(i) $\sin \frac{X_1 + X_2}{2} = 0$ の場合。この場合は $\frac{X_1 + X_2}{2} \in \mathbb{Z}\pi$ であるので、ある $n \in \mathbb{Z}$ があって $\frac{X_1 + X_2}{2} = n\pi$ すなわち $X_2 = -X_1 + 2\pi n$ である。これより

$$\begin{aligned} \bullet 0 &= -e^Y \sin X_2 + \frac{1}{r_0} X_2 = -e^Y \sin(-X_1 + 2\pi n) + \frac{1}{r_0} (-X_1 + 2\pi n) \\ &= e^Y \sin X_1 - \frac{1}{r_0} X_1 + \frac{2\pi}{r_0} n = \underbrace{e^Y \sin X_1 - \frac{1}{r_0} X_1}_0 + \frac{2\pi}{r_0} n \end{aligned}$$

なので $n=0$ を得る。よって $X_1 = -X_2$ が成り立つ。

(ii) $\sin \frac{X_1 - X_2}{2} = 0$ の場合. このとき $\frac{X_1 - X_2}{2} \in \mathbb{Z}\pi$ であることから, ある $n \in \mathbb{Z}$ があって $\frac{X_1 - X_2}{2} = n\pi$ すなわち $X_2 = X_1 - 2\pi n$ である. よって

$$\begin{aligned} \bullet 0 &= -e^Y \sin X_2 + \frac{1}{r_0} X_2 = -e^Y \sin(X_1 - 2\pi n) + \frac{1}{r_0} (X_1 - 2\pi n) \\ &= \underbrace{-e^Y \sin X_1 + \frac{1}{r_0} X_1}_0 - \frac{2\pi}{r_0} n = -\frac{2\pi}{r_0} n \end{aligned}$$

から $n=0$ を得る. こうして $X_1 = X_2$ が成り立つ. $\square$

以上のことから, 方程式 $\rho^{-\lambda} + i\hbar\gamma\lambda = E$ の解のうち, 量子 SIR 方程式のベキ級数解を作るのには使えないものがどういう風にして現れるのかもわかる.

命題 2.2. (i) $E > \frac{1 + \log r_0}{r_0}$ なる E に対し, 方程式 $\rho^{-\lambda} + i\hbar\gamma\lambda = E$ の解 $\lambda \in \mathbb{C}$ で, ある $k_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ によって $\operatorname{Re}(\lambda) = -\frac{k_0}{2}$ と表されるものが存在したとする. このとき $\rho^{-\lambda - k_0} + i\hbar\gamma(\lambda + k_0) = E$ も成り立つ.

(ii) $E > \frac{1 + \log r_0}{r_0}$ なる E 及び方程式 $\rho^{-\lambda} + i\hbar\gamma\lambda = E$ の解 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し, ある $k_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ があって $\rho^{-\lambda - k_0} + i\hbar\gamma(\lambda + k_0) = E$ が成り立つとする. このとき $\operatorname{Re}(\lambda) = -\frac{k_0}{2}$ である.

証明. (i) 上のようなとき, $X = \hbar\beta \operatorname{Re}(\lambda) = -\frac{k_0}{2}\hbar\beta$, $Y = \hbar\beta \operatorname{Im}(\lambda)$ とおくと

$$\bullet e^Y \cos X - \frac{1}{r_0} Y = E, \quad \bullet -e^Y \sin X + \frac{1}{r_0} X = 0$$

が成り立つ. ここで $\lambda' := \lambda + k_0$ についても $X' := \hbar\beta \operatorname{Re}(\lambda')$, $Y' := \hbar\beta \operatorname{Im}(\lambda') = Y$ とおくと

$$\bullet X' = \hbar\beta \operatorname{Re}(\lambda') = X + \hbar\beta k_0 = \frac{k_0}{2}\hbar\beta = -X$$

なので次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \bullet e^{Y'} \cos X' - \frac{1}{r_0} Y' &= e^Y \cos(-X) - \frac{1}{r_0} Y = e^Y \cos X - \frac{1}{r_0} Y = E, \\ \bullet -e^{Y'} \sin X' + \frac{1}{r_0} X' &= -e^Y \sin(-X) + \frac{1}{r_0} (-X) = e^Y \sin X - \frac{1}{r_0} X = 0. \end{aligned}$$

(ii) 命題 2.1 から, λ 及び $\lambda' := \lambda + k_0$ について $\operatorname{Re}(\lambda') - \operatorname{Re}(\lambda)$ か $\operatorname{Re}(\lambda') + \operatorname{Re}(\lambda)$ の少なくとも一方は 0 であるが,

$$\bullet \operatorname{Re}(\lambda') - \operatorname{Re}(\lambda) = k_0 \neq 0, \quad \bullet \operatorname{Re}(\lambda') + \operatorname{Re}(\lambda) = 2\operatorname{Re}(\lambda) + k_0$$

なので $2\operatorname{Re}(\lambda) + k_0 = 0$ となるしかない. $\square$

上の命題 2.2 から従うことであるが, 方程式 $\rho^{-\lambda} + i\hbar\gamma\lambda = E$ の解のうち「量子 SIR 方程式のベキ級数解の特性指数としての資格を持つもの」は次のようにして現れる:

命題 2.3. $-\frac{1}{2}$ の自然数倍の全体を $\mathbb{Z}_{>0}\left(-\frac{1}{2}\right) := \left\{-\frac{1}{2}k \in \mathbb{Q} \mid k \in \mathbb{Z}_{>0}\right\}$ と書く.

$E > \frac{1 + \log r_0}{r_0}$ なる E を含む方程式 $\rho^{-\lambda} + i\hbar\gamma\lambda = E$ の解 $\lambda \in \mathbb{C}$ について

$$\bullet \operatorname{Re}(\lambda) \notin \mathbb{Z}_{>0}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

であるとき (このような λ は存在する), 任意の $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し

$$\bullet E - \rho^{-\lambda-k} - i\hbar\gamma(\lambda+k) \neq 0.$$

以上でわかったことをまとめると次のようになる:

命題 2.4 (量子 SIR 方程式のベキ級数解). $\beta > 0, \gamma > 0$ 及び $r_0 = \beta/\gamma$ とし, 特に $r_0 > 1$ であるとする. E を

$$\bullet E > \frac{1 + \log r_0}{r_0}$$

なる実数とする. ここで $\rho = e^{i\hbar\beta}$ とし, $\lambda \in \mathbb{C}$ を

$$\bullet \rho^{-\lambda} + i\hbar\gamma\lambda = E, \quad \bullet \operatorname{Re}(\lambda) \notin \mathbb{Z}_{>0}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

を満たすように選ぶ (このような $\lambda \in \mathbb{C}$ は存在する). このとき, ベキ級数

$$\bullet \psi(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=1}^k \frac{1}{E - \rho^{-\lambda-j} - i\hbar\gamma(\lambda+j)} \cdot z^{\lambda+k}$$

の収束半径は ∞ であり, これは量子 SIR 方程式を満たす:

$$\bullet \psi(\rho^{-1}z) + i\hbar\gamma z \frac{d\psi}{dz}(z) + z\psi(z) = E\psi(z).$$

特に $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ ならば, 対応する解 $\psi(z)$ は元の変数 $x = \log z$ の関数として 2 乗可積分である: $\int_{-\infty}^0 |\psi(x)|^2 dx < \infty$.

2.3 量子 SIR 方程式の特性指数が 0 以上の整数である解

今回, 量子 SIR 方程式を解く際, 解として $\psi(z) = z^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ のような「特性指数 λ を含むベキ関数」と「0 以上の整数ベキの項のみから成るベキ級数」との積で書かれるものを探

したので、話がうまく進んだ。その一方で、「量子 SIR 方程式の解として

$$\bullet \psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

という風な 0 以上の整数ベキのベキ級数解を探していたとしたら、どうなっていたのか？」, と感じた読者がいるかもしれない。これに答えるためには、量子 SIR 方程式のベキ級数解の特性指数が 0 以上の整数になる場合を見極めればよい。

まず、量子 SIR 方程式のベキ級数解の特性指数を決める方程式 $\rho^{-\lambda} + i\hbar\gamma\lambda = E$ を $X = \hbar\beta\text{Re}(\lambda)$, $Y = \hbar\beta\text{Im}(\lambda)$ を用いて書くと

$$\bullet e^Y \cos X - \frac{1}{r_0} Y = E, \quad \bullet -e^Y \sin X + \frac{1}{r_0} X = 0$$

なのであったが、ここで $Y=0$ とおくと

$$\bullet \cos X = E, \quad \bullet \sin X = \frac{X}{r_0}$$

である。これより $1 = \cos^2 X + \sin^2 X = E^2 + \frac{X^2}{r_0^2}$, すなわち

$$\bullet X^2 = r_0^2 (1 - E^2)$$

であるが、この $X = \hbar\beta\text{Re}(\lambda)$ の 2 次方程式が実数解を持つのは

$$\bullet \frac{1 + \log r_0}{r_0} < E \leq 1$$

の場合のみで、この場合には

$$\bullet X = \pm r_0 \sqrt{1 - E^2}$$

である。更に、このうち符号が + のものから

$$\bullet \text{Re}(\lambda) = \frac{1}{\hbar\beta} \cdot r_0 \sqrt{1 - E^2} = \frac{1}{\hbar\gamma} \sqrt{1 - E^2}$$

が得られるが、これが 0 以上の整数になる場合を考える。そこで、ある $\ell_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ があって

$$\bullet \text{Re}(\lambda) = \frac{1}{\hbar\gamma} \sqrt{1 - E^2} = \ell_0$$

であったとすると、これを E について解くことで

$$\bullet E = \sqrt{1 - (\hbar\gamma\ell_0)^2}$$

を得る。よって、量子 SIR 方程式の解のうち、 $\ell_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を含む

$$\bullet \psi(z) = z^{\ell_0} \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

なるものは, このような特別な値のエネルギーに対応するものしか存在しないというわけである. ただし, $\ell_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ はいくらでも大きくなれるわけではなく, 条件 $\frac{1+\log r_0}{r_0} < E \leq 1$ 及び

$$\ell_0 = \frac{1}{\hbar\gamma} \sqrt{1-E^2} \text{ から}$$

$$\bullet \ 0 \leq \ell_0 < \frac{1}{\hbar\gamma} \sqrt{1 - \left(\frac{1+\log r_0}{r_0} \right)^2}$$

という具合に制限される.

命題 2.5 (量子 SIR 方程式の特性指数が 0 以上の整数である解). 0 以上の整数 ℓ_0 で

$$\bullet \ 0 \leq \ell_0 < \frac{1}{\hbar\gamma} \sqrt{1 - \left(\frac{1+\log r_0}{r_0} \right)^2}$$

なるものを 1 つとり, $E_{\ell_0}, \{b_k\}_{k \geq 0}$ を

$$\bullet \ E_{\ell_0} := \sqrt{1 - (\hbar\gamma\ell_0)^2}, \quad \bullet \ b_0 := 1, \quad \bullet \ b_k := \prod_{j=1}^k \frac{1}{E_{\ell_0} - \rho^{-\ell_0-j} - i\hbar\gamma(\ell_0+j)} \quad (k \in \mathbb{Z}_{>0})$$

とおく. このとき, ベキ級数

$$\bullet \ \psi_{\ell_0}(z) := z^{\ell_0} \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{\ell_0+k}$$

の収束半径は ∞ であり, これは次の量子 SIR 方程式を満たす:

$$\bullet \ \psi_{\ell_0}(\rho^{-1}z) + i\hbar\gamma z \frac{d\psi_{\ell_0}}{dz}(z) + z\psi_{\ell_0}(z) = E_{\ell_0} \psi_{\ell_0}(z).$$

3 「 $\gamma=0$ の場合」の量子 SIR モデル

ここでは「 $\gamma=0$ の場合」の量子 SIR モデルを考える．先に述べておくと，今回の「 $\gamma=0$ の場合」は，解の構成に関して微妙な問題を含んでいるため，既に見たような「 $\gamma>0$ の場合」の量子 SIR 方程式を解く話よりも難しく，筆者は「 $\gamma=0$ の場合」の解について理解しきれていない．以下では，現時点でわかっていることを述べていきたい (2025 年 7 月の発言)．

3.1 既に知っている解で「 $\gamma=0$ 」とおくだけでよいのでは？

量子 SIR 方程式は

$$\bullet \psi(x-i\hbar\beta)+i\hbar\gamma\frac{d\psi}{dx}(x)+e^x\psi(x)=E\psi(x)$$

であったので，「 $\gamma=0$ の場合」の量子 SIR 方程式は

$$\bullet \psi(x-i\hbar\beta)+e^x\psi(x)=E\psi(x)$$

である．ここでエネルギー E は $0<E\leq 1$ なる実数であると考える．

「 $\gamma=0$ の場合」の (古典) SIR モデルのエネルギーは，初期値 $S_0, I_0>0$ で $S_0+I_0\leq 1$ を満たすものによって

$$\bullet E=S_0+I_0$$

と書かれる．よって，当然 $0<E\leq 1$ であるが，「 $\gamma=0$ の場合」の量子 SIR モデルのエネルギーもこの条件を満たすべきであると考える．

これまでと同様に $z=e^x$ ， $\rho=e^{i\hbar\beta}$ とおき， $\psi(x)=\psi(\log z)$ を単に $\psi(z)$ と書くと，「 $\gamma=0$ の場合」の量子 SIR 方程式は

$$\bullet \psi(\rho^{-1}z)+z\psi(z)=E\psi(z)$$

である．これを見て，「量子 SIR 方程式の解は命題 2.4 でもう得られているのであるから，そこで単に $\gamma=0$ とおくだけでよいのでは？」と感じた読者がいるかもしれない．実際に，命題 2.4 にある

$$\bullet \psi(z)=z^\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{j=1}^k\frac{1}{E-\rho^{-\lambda-j}-i\hbar\gamma(\lambda+j)}\cdot z^k$$

において $\gamma=0$ としてみると，この場合の $\lambda\in\mathbb{C}$ は $\rho^{-\lambda}=E$ を満たすようにとっているので

$$“\psi(z)=z^\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{j=1}^k\frac{1}{E-\rho^{-\lambda-j}}\cdot z^k=z^\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{j=1}^k\frac{1}{1-\rho^{-j}}\cdot\left(\frac{z}{E}\right)^k”$$

である。ところが、このベキ級数の収束半径に当たるものは

$$\text{“} \lim_{k \rightarrow \infty} |E - E\rho^{-k}| \text{”} \dots ??$$

なので、この収束は明らかではない ($|\rho|=1$ に注意). 既に知っている解において $\gamma=0$ とおくだけでは話は済まないようである。

3.2 準備 : 「 $|q|=1$ 」の場合の q -無限積

このような具合の悪い状況は「 $|q|=1$ 」の場合の q -無限積」を使えば解消できる (この用語の意味については後述する). $|q|<1$ なる複素数 q と $z \in \mathbb{C}$ に対し

$$\bullet (z; q)_{\infty} := \prod_{n \geq 0} (1 - zq^n)$$

を q -無限積と呼ぶ. 特に $|z|<1$ の場合には

$$\bullet (z; q)_{\infty} = \prod_{n \geq 0} \exp \left[- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(zq^n)^k}{k} \right] = \exp \left[- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \sum_{n=0}^{\infty} q^{nk} \right] = \exp \left[- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k} \cdot \frac{z^k}{k} \right]$$

が成り立つ. q -無限積自体は $|q|=1$ である q に対しては定義されないが、この表示によれば $|q|=1$ の場合もある程度はカバーできる。

定義 3.1 (generic な実数). $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$\bullet \|x\| := \min \{ |x - n| \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

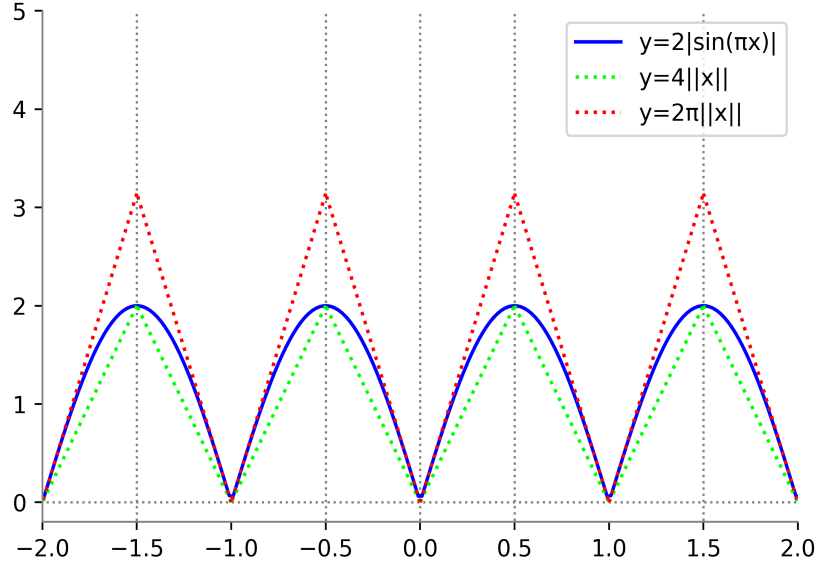
とおく. $x \in \mathbb{R}$ について $\lim_{n \rightarrow \infty} \|nx\|^{\frac{1}{n}} = 1$ が成り立つとき、 x は generic であるという。

平たく述べると、 $\|x\|$ とは「点 x に一番近い格子点との距離」のことである. 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $0 \leq \|x\| \leq \frac{1}{2}$ であり、 $x \in \mathbb{R}$ について $\|x\|=0$ であることと $x \in \mathbb{Z}$ であることが同値である. また、 $\|x\| = \frac{1}{2}$ であることと $x \in \left\{ n + \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ であることが同値である. こういったことから、関数 $y = \|x\|$ ($x \in \mathbb{R}$) のグラフは $y=0$ と $y = \frac{1}{2}$ の間を行き来する「ギザギザした折れ線」として現れることがわかる (次のページの図を参照. 関数 $y = \|x\|$ のグラフそれ自体はないが、参考にはなると思う).

$e(x) := \exp(2\pi i x)$ ($x \in \mathbb{C}$) とおく.

命題 3.2. 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し次が成り立つ :

$$\bullet 4\|x\| \leq |1 - e(x)| \leq 2\pi\|x\|.$$



関数 $y=|1-e(x)|=2|\sin(\pi x)|$ のグラフ (青色), 及び $y=4||x||$ (緑色の点線), $y=2\pi||x||$ (赤色の点線) のグラフの概形.

証明. これは, 関数 $y=|1-e(x)|=2|\sin(\pi x)|$ のグラフが $y=4||x||$ 及び $y=2\pi||x||$ のグラフに挟まれるようにして現れることからわかる (上の図を参照). $\square$

命題 3.3. $\omega \in \mathbb{R}$ は generic な実数であるとする. このとき, ベキ級数

$$\bullet \sum_{n>0} \frac{1}{1-e(n\omega)} \cdot \frac{z^n}{n}$$

は $|z|<1$ なる $z \in \mathbb{C}$ に対して絶対収束する.

証明. 上の命題 3.2 から

$$\bullet \frac{1}{(2\pi n)^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{1}{||n\omega||^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{1}{|1-e(n\omega)|^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{1}{(4n)^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{1}{||n\omega||^{\frac{1}{n}}}$$

である. ω は generic にとっているので, はさみ打ちの原理によって

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{1}{|1-e(n\omega)|^{\frac{1}{n}}} = 1$$

が成り立つ. このことと, ベキ級数の収束半径に関する「Cauchy の判定法」によって, ベキ級数 $\sum_{n>0} \frac{1}{1-e(n\omega)} \cdot \frac{z^n}{n}$ の収束半径が 1 であることがわかる. $\square$

q -無限積について, 特に $|z|<1$ の場合には $(z; q)_{\infty} = \exp \left[- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k} \cdot \frac{z^k}{k} \right]$ なのであった. よって, 先に見た generic な実数 ω に対する $\sum_{n>0} \frac{1}{1-e(n\omega)} \cdot \frac{z^n}{n}$ は, 形式的には $q=e(\omega)$ という「『 $|q|=1$ 』の

場合の q -無限積」の対数をとったものと理解できる (q -無限積自体は $|q|<1$ なる q に対してしか定義できないことに注意). このような理由によって, generic な実数 ω で決まる関数

$$\bullet \exp \left[- \sum_{n>0} \frac{1}{1-e(n\omega)} \cdot \frac{z^n}{n} \right] \quad (|z|<1)$$

を「 $|q|=1$ 」の場合の q -無限積」と呼ぶ (広く用いられている用語ではない).

3.3 「 $\gamma=0$ 」の場合の量子 SIR 方程式の解

さて, 冒頭で述べた「 $\gamma=0$ の場合」の量子 SIR モデルの問題に戻る. 簡単に述べると, 命題 2.4 にある量子 SIR 方程式の解においては $\gamma=0$ とはできないのであった. この問題は次のようにして回避できる: 「 $\gamma=0$ の場合」の量子 SIR 方程式が

$$\bullet \psi(x-i\hbar\beta)=E\left(1-\frac{e^x}{E}\right)\psi(x)=-e^x\left(1-\frac{E}{e^x}\right)\psi(x)$$

とも書けること, 及び「 $|q|=1$ 」の場合の q -無限積」を用いることで解を得ることができる.

命題 3.4 (「 $\gamma=0$ の場合」の量子 SIR 方程式の「 $|q|=1$ 」の場合の q -無限積による解).
 $\beta>0$ を $\frac{\hbar\beta}{2\pi} \in \mathbb{R}$ が generic になるようにとっておく. $\rho=e^{i\hbar\beta}$ とおく.

(i) $0<E \leq 1$ であるとする. $\lambda \in \mathbb{C}$ を $\rho^{-\lambda}=E$ を満たすようにとるとき,

$$\bullet \psi_L(x):=e^{\lambda x} \exp \left[\sum_{n>0} \frac{1}{1-\rho^{-n}} \cdot \frac{(e^x/E)^n}{n} \right] \quad (-\infty < \operatorname{Re}(x) < \log E)$$

は「 $\gamma=0$ の場合」の量子 SIR 方程式を満たす: $\psi_L(x-i\hbar\beta)=(E-e^x)\psi_L(x)$.

(ii) $0<E<1$ であるとする. $r \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\bullet f_r(x):=\exp \left[\frac{ix^2}{2\hbar\beta} - \frac{x}{2} + \frac{(2r+1)\pi}{\hbar\beta} x \right]$$

とおく. これは $f_r(x-i\hbar\beta)=-e^x f_r(x)$ を満たす. この $f_r(x)$ を用いて定義される

$$\bullet \psi_R(x):=f_r(x) \exp \left[\sum_{n>0} \frac{1}{1-\rho^n} \cdot \frac{(E/e^x)^n}{n} \right] \quad (\log E < \operatorname{Re}(x) < 0)$$

は「 $\gamma=0$ の場合」の量子 SIR 方程式を満たす: $\psi_R(x-i\hbar\beta)=(E-e^x)\psi_R(x)$.

「 $|q|=1$ 」の場合の q -無限積の収束のための条件から, 上の $\psi_L(x)$ は $-\infty < \operatorname{Re}(x) < \log E$ で定義され, $\psi_R(x)$ は $\log E < \operatorname{Re}(x) < 0$ で定義されている. $E=1$ の場合の $\psi_L(x)$ は「 $\mathbb{C}$ の左半分」 $\{x \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(x) < 0\}$ 全体で定義されていると言えるが, それ以外の $0<E<1$ の場合には, 「 $\mathbb{C}$ の左半分」

全体で定義される解は、上のやり方のみでは得られないということである。この状態では、 $E=1$ の場合の $\psi_L(x)$ を除いては、「 $\gamma=0$ の場合」の量子 SIR 方程式の解の ($-\infty < x < 0$ で積分するという意味での) 2 乗可積分性については考えられないわけである。こういったところに「 $\gamma=0$ の場合」の難しさがある (第 2 章で見た「 $\gamma>0$ の場合」には、量子 SIR 方程式の解として収束半径が ∞ のベキ級数解が現れたので、解の定義域から来る面倒がなかった)。「 $\mathbb{C}$ の左半分」全体で定義された解を得るには、どうすればよいのであろう？

上の $f_r(x)$ が $f_r(x-i\hbar\beta)=-e^x f_r(x)$ を満たすことを先に確認しておく。これは直接の計算によって次のように確かめられる：

$$\begin{aligned} \bullet f_r(x-i\hbar\beta) &= \exp\left[\frac{i}{2\hbar\beta}(x-i\hbar\beta)^2 - \frac{1}{2}(x-i\hbar\beta) + \frac{(2r+1)\pi}{\hbar\beta}(x-i\hbar\beta)\right] \\ &= \exp\left[\frac{i}{2\hbar\beta}(x^2 - 2i\hbar\beta x - \hbar^2\beta^2) - \frac{x}{2} + \frac{i\hbar\beta}{2} + \frac{(2r+1)\pi}{\hbar\beta}x - (2r+1)\pi i\right] \\ &= \exp\left[x - \frac{i\hbar\beta}{2} + \frac{i\hbar\beta}{2} - (2r+1)\pi i\right] f_r(x) = -e^x f_r(x). \end{aligned}$$

証明. (i) $i\hbar\beta$ は純虚数なので、 $\operatorname{Re}(x) < \log E$ なる x について $\operatorname{Re}(x-i\hbar\beta) < \log E$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} \bullet \psi_L(x-i\hbar\beta) &= e^{\lambda(x-i\hbar\beta)} \exp\left[\sum_{n>0} \frac{1}{1-\rho^{-n}} \cdot \frac{(e^{x-i\hbar\beta}/E)^n}{n}\right] \\ &= \rho^{-\lambda} e^{\lambda x} \exp\left[\sum_{n>0} \frac{\rho^{-n}}{1-\rho^{-n}} \cdot \frac{(e^x/E)^n}{n}\right] \\ &= E e^{\lambda x} \exp\left[\sum_{n>0} \left(-1 + \frac{1}{1-\rho^{-n}}\right) \frac{(e^x/E)^n}{n}\right] \\ &= E \exp\left[\log\left(1 - \frac{e^x}{E}\right)\right] \psi_L(x) = E \left(1 - \frac{e^x}{E}\right) \psi_L(x). \end{aligned}$$

(ii) $f_r(x)$ が $f_r(x-i\hbar\beta)=-e^x f_r(x)$ を満たすことを使うと

$$\begin{aligned} \bullet \psi_R(x-i\hbar\beta) &= f_r(x-i\hbar\beta) \exp\left[\sum_{n>0} \frac{1}{1-\rho^n} \cdot \frac{(E/e^{x-i\hbar\beta})^n}{n}\right] \\ &= -e^x f_r(x) \exp\left[\sum_{n>0} \frac{\rho^n}{1-\rho^n} \cdot \frac{(E/e^x)^n}{n}\right] \\ &= -e^x f_r(x) \exp\left[\sum_{n>0} \left(-1 + \frac{1}{1-\rho^n}\right) \frac{(E/e^x)^n}{n}\right] \\ &= -e^x \exp\left[\log\left(1 - \frac{E}{e^x}\right)\right] \psi_R(x) = -e^x \left(1 - \frac{E}{e^x}\right) \psi_R(x). \quad \square \end{aligned}$$

上の命題 3.4 で $\psi_L(x)$ の中の $\lambda \in \mathbb{C}$ を $\rho^{-\lambda} = E$ を満たすようにとっているが、これは

$$\bullet \exp[-i\hbar\beta \operatorname{Re}(\lambda)] \exp[\hbar\beta \operatorname{Im}(\lambda)] = E$$

とも書けるので, $0 < E \leq 1$ なる E を 1 つとるとき, $\rho^{-\lambda} = E$ を満たす $\lambda \in \mathbb{C}$ は 1 つには決まらずに

$$\bullet \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \rho^{-\lambda} = E \right\} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\lambda) \in \frac{2\pi}{\hbar\beta} \mathbb{Z}, \operatorname{Im}(\lambda) = \frac{1}{\hbar\beta} \log E \right\}$$

である. 特に $\operatorname{Re}(\lambda) \in \frac{2\pi}{\hbar\beta} \mathbb{Z}_{>0}$ となるように $\lambda \in \mathbb{C}$ を選べば, 対応する解 $\psi_L(x)$ を「半直線」 $-\infty < x < 0$ に制限したものについて $\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi_L(x) = 0$ である.

3.4 解に周期 $i\hbar\beta$ の周期関数をかけるだけの不定性

「 $\gamma=0$ の場合」の量子 SIR 方程式 $\psi(x - i\hbar\beta) = (E - e^x)\psi(x)$ の解 $\psi(x)$ に「周期 $i\hbar\beta$ の周期関数」 $g(x)$ をかけたもの $\psi(x)g(x)$ を考えると, これもまた解になっていることに注意する. 実際,

$$\bullet \psi(x - i\hbar\beta)g(x - i\hbar\beta) = \psi(x - i\hbar\beta)g(x) = (E - e^x)\psi(x)g(x)$$

という具合である.

周期 $i\hbar\beta$ の周期関数は, 一般に

$$\bullet \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp\left(\frac{2\pi n}{\hbar\beta} x\right)$$

という格好をしている. よって, 「 $\gamma=0$ の場合」の量子 SIR 方程式の解 $\psi(x)$ に周期 $i\hbar\beta$ の周期関数をかけることで生じる変化を見なければ, 特に

$$\bullet \psi(x) \mapsto \exp\left(\frac{2\pi m}{\hbar\beta} x\right) \psi(x) \quad (m \in \mathbb{Z})$$

なる操作を考えるので十分である. これを特に $\psi_L(x)$, $\psi_R(x)$ に対して行ってみる.

ここだけの記号として, 命題 3.4 で得た $\psi_L(x)$, $\psi_R(x)$ を特に次のように表記する:

$$\begin{aligned} \bullet \psi_L(x; E, \lambda) &:= e^{\lambda x} \exp\left[\sum_{n>0} \frac{1}{1-\rho^{-n}} \cdot \frac{(e^x/E)^n}{n}\right] \quad (-\infty < \operatorname{Re}(x) < \log E), \\ \bullet \psi_R(x; E, r) &:= f_r(x) \exp\left[\sum_{n>0} \frac{1}{1-\rho^n} \cdot \frac{(E/e^x)^n}{n}\right] \quad (\log E < \operatorname{Re}(x) < 0). \end{aligned}$$

これらに $\exp\left(\frac{2\pi m}{\hbar\beta} x\right)$ ($m \in \mathbb{Z}$) をかけるわけであるが, 簡単な計算によって

$$\begin{aligned} \bullet \exp\left(\frac{2\pi m}{\hbar\beta} x\right) e^{\lambda x} &= \exp\left[\left(\lambda + \frac{2\pi m}{\hbar\beta}\right)x\right] \quad (m \in \mathbb{Z}), \\ \bullet \exp\left(\frac{2\pi m}{\hbar\beta} x\right) f_r(x) &= \exp\left(\frac{2\pi m}{\hbar\beta} x\right) \exp\left[\frac{ix^2}{2\hbar\beta} - \frac{x}{2} + \frac{(2r+1)\pi}{\hbar\beta} x\right] \\ &= \exp\left[\frac{ix^2}{2\hbar\beta} - \frac{x}{2} + \frac{\{2(r+m)+1\}\pi}{\hbar\beta} x\right] \\ &= f_{r+m}(x) \quad (m \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

であるので, 次が成り立つことがわかる:

命題 3.5. 「 $\gamma=0$ の場合」の量子 SIR 方程式の解 $\psi_L(x; E, \lambda)$, $\psi_R(x; E, r)$ について次が成り立つ：

$$\begin{aligned} & \bullet \exp\left(\frac{2\pi m}{\hbar\beta}x\right)\psi_L(x; E, \lambda)=\psi_L\left(x; E, \lambda+\frac{2\pi m}{\hbar\beta}\right) \quad (m\in\mathbb{Z}), \\ & \bullet \exp\left(\frac{2\pi m}{\hbar\beta}x\right)\psi_R(x; E, r)=\psi_R(x; E, r+m) \quad (m\in\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

これによって次のことがわかる．例えば、周期 $i\hbar\beta$ の周期関数 $g(x)$ で

$$\bullet g(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n\exp\left(\frac{2\pi n}{\hbar\beta}x\right)$$

なるものを $\psi_L(x; E, \lambda)$ にかけると、命題 3.5 から

$$\bullet g(x)\psi_L(x; E, \lambda)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n\exp\left(\frac{2\pi n}{\hbar\beta}x\right)\psi_L(x; E, \lambda)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n\psi_L\left(x; E, \lambda+\frac{2\pi n}{\hbar\beta}\right)$$

である． $\psi_L(x; E, \lambda)$ に $g(x)$ をかけることで、解としてはもちろん別物にはなるが、全く知らないクラスの解になるというのではなく、それは結局 $\psi_L\left(x; E, \lambda+\frac{2\pi n}{\hbar\beta}\right)$ ($n\in\mathbb{Z}$) の和で書けるのである．今回得られた解 $\psi_L(x; E, \lambda)$, $\psi_R(x; E, r)$ は「周期 $i\hbar\beta$ の周期関数をかけるだけの不定性」にある程度対応できる格好をしているということである．

4 残されていることと関連する話題

以上によって、量子 SIR 方程式を解くことはある程度は可能であるらしいということはわかったものの、正直なところ「量子 SIR モデルの性質がよくわかった」とは言えない状況であると思う。ここでは、筆者が今回扱ったような事柄に引き続いて考えられそうな問題について軽くコメントする。

4.1 量子 SIR 方程式の解は得られたが……

● 今回得られたような量子 SIR モデルに関する結果は応用が可能か？例えば、(古典) SIR モデルでは「感染症の流行で生じた総感染者数の割合」である

$$\bullet \int_0^\infty I_{\text{古典}}(t)dt = \int_0^\infty \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dR_{\text{古典}}}{dt}(t)dt = \frac{1}{\gamma} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} R_{\text{古典}}(t) - R_{\text{古典}}(0) \right\}$$

が計算できたが、これに相当するものは量子 SIR モデルの側では計算できるのか？

● 量子 SIR 方程式を級数解法で解くと、特性指数の実部が 0 の解が必ず現れるが、これらは何なのか？少し振り返ると、 $E > \frac{1 + \log r_0}{r_0}$ なる E を含む「量子 SIR 方程式のベキ級数解の特性指数を決める方程式」 $\rho^{-\lambda} + i\hbar\gamma\lambda = E$ は、 $X = \hbar\beta\text{Re}(\lambda)$, $Y = \hbar\beta\text{Im}(\lambda)$ とおくと

$$\bullet e^Y \cos X - \frac{1}{r_0} Y = E, \quad \bullet -e^Y \sin X + \frac{1}{r_0} X = 0$$

と同値なのであった。特に $X=0$ の場合を考えると

$$\bullet e^Y - \frac{1}{r_0} Y = E$$

であるが、これは必ず 2 つの異なる実数解を持つ。このような理由で、量子 SIR 方程式の解として特性指数の実部が 0 のものが必ず存在するが、こういった解たちを「2 乗可積分でない」として排除するのは適当なのか？

● 「 $\gamma=0$ の場合」の量子 SIR 方程式の「 $\mathbb{C}$ の左半分」 $\{x \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(x) < 0\}$ 全体で定義された解を得るには、どうすればよいのか？命題 3.4 にて述べたように、 $0 < E < 1$ の場合、解 $\psi_L(x)$ は $-\infty < \text{Re}(x) < \log E < 0$ において定義されており、一方、 $\psi_R(x)$ は $\log E < \text{Re}(x) < 0$ で定義されている。よって、「 $\mathbb{C}$ の左半分」全体で定義された解が欲しければ、これら $\psi_L(x)$, $\psi_R(x)$ を適当に組み合わせればよいのであらうと筆者は考えた。そこで、 $C \in \mathbb{C}$ を含む

$$\bullet \psi(x) = \begin{cases} \psi_L(x) & (-\infty < \text{Re}(x) < \log E), \\ C\psi_R(x) & (\log E < \text{Re}(x) < 0) \end{cases}$$

という格好の解で

$$“\psi_L(\log E - 0) = C\psi_R(\log E + 0)”$$

を満たすものを求めようとしてみた。ところが、 $\psi_L(\log E - 0)$ 及び $\psi_R(\log E + 0)$ は通常の意味では存在しないのである。どうすればよいのであらう？

4.2 Heisenberg 描像による量子 SIR モデル

● 本文書で使った量子力学というのは、いわゆる「Schrödinger 描像」によるものである。それでは、量子 SIR モデルを「Heisenberg 描像」で解くことは可能であろうか？ 物理量にはハットをつけて

$$\bullet \hat{H} = e^{\beta \hat{p}} - \gamma \hat{p} + e^{\hat{x}}$$

などすると、量子 SIR モデルの Heisenberg 方程式は次のようになる：標準的な交換子の記号 $[A, B] := AB - BA$ を使うと

$$\begin{aligned} \bullet i\hbar \frac{d\hat{x}}{dt}(t) &= [\hat{x}(t), \hat{H}] = i\hbar \beta e^{\beta \hat{p}(t)} - i\hbar \gamma, \\ \bullet i\hbar \frac{d\hat{p}}{dt}(t) &= [\hat{p}(t), \hat{H}] = -i\hbar e^{\hat{x}(t)}. \end{aligned}$$

結果だけ述べると、上では次のような計算を行っている：

$$\bullet \hat{x} e^{\beta \hat{p}} = e^{\beta \hat{p}} \hat{x} e^{-\beta \hat{p}} e^{\beta \hat{p}} = e^{\beta \hat{p}} \{\hat{x} + [-\beta \hat{p}, \hat{x}]\} = e^{\beta \hat{p}} \hat{x} + i\hbar \beta e^{\beta \hat{p}}.$$

よって、量子 SIR モデルにおいても

$$\bullet \frac{d\hat{x}}{dt}(t) = \beta e^{\beta \hat{p}(t)} - \gamma, \quad \bullet \frac{d\hat{p}}{dt}(t) = -e^{\hat{x}(t)}$$

という具合に古典論と同じ格好の方程式が現れる。これらは解けるのであろうか？

4.3 確率微分方程式との関連

● Google Scholar で「quantum SIR model」や「canonical quantization of SIR model」などのキーワードによって検索をかけてみたところ、筆者が今回の文書で扱った量子 SIR 方程式に相当するものを考えているような論文は見つからなかった (2025 年 7 月の発言)。その一方で、(古典) SIR モデルの微分方程式である SIR 方程式に

$$\begin{aligned} \bullet dS(t) &= -\beta S(t)I(t)dt + (\text{Brown 運動の寄与}), \\ \bullet dI(t) &= \{\beta S(t)I(t) - \gamma I(t)\}dt + (\text{Brown 運動の寄与}), \\ \bullet dR(t) &= \gamma I(t)dt + (\text{Brown 運動の寄与}) \end{aligned}$$

といったような「Brown 運動の寄与」を加えた確率微分方程式を扱っている論文はいくつか見つかった (「stochastic SIR model」などと呼ばれているようであった)。こういった話題と量子 SIR モデルは関連しているのか？