テータ関数とデルタ関数の関係

齋藤 洋介

yousukesaitou7@gmail.com

2025 年 9 月 9 日

テータ関数 $\theta_p(z)=(z;p)_\infty\big(pz^{-1};p\big)_\infty$ と (形式的) デルタ関数 $\delta(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}z^n$ の間には

$$\bullet\ \left[\frac{1}{\theta_p(z)}\right]_{|p|<|z|<1}-\left[\frac{1}{\theta_p(z)}\right]_{1<|z|<|p|^{-1}}=\frac{\delta(z)}{{(p;p)_\infty}^2}$$

なる関係がある (記号の意味については後述する). これをうまく用いれば, 例えば楕円関数のベキ展開や恒等式が, 初等的な計算のみによって導けるようになる. この文書では, 上の「テータ関数とデルタ関数の関係」のご利益を, いくつかの具体例を通じて紹介する.

謝辞

本研究は, 文部科学省による「特色ある共同研究拠点の整備の推進事業 JPMXP0723833165」, 及び「大阪公立大学戦略的研究推進事業 (国際研究拠点形成支援)」の助成を受けたものである.

目次

1 (形式的) デルタ関数

Fourier 級数展開の話題においては

$$\bullet\ \delta_{\text{周期的}}(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i n x} \quad (x\in\mathbb{R})$$

で定義される「周期的デルタ関数」が重要な働きをする.

厳密さをあまり気にせずに述べると, 閉区間 $[0,1]$ で定義された適当な関数 $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ について

$$\bullet\ f(x) = \int_0^1 f(y)\delta_{\text{周期的}}(x-y)dy = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(y) e^{2\pi i n(x-y)} dy$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i n x} \int_0^1 f(y) e^{-2\pi i n y} dy$$

とできる. ここで $c_n = \int_0^1 f(y) e^{-2\pi i n y} dy$ $(n\in\mathbb{Z})$ とおけば

$$\bullet\ f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x}$$

である. このように, Fourier 級数展開とは「周期的デルタ関数が存在すること」そのものと言える.

周期的デルタ関数 $\delta_{\text{周期的}}(x)$ において, $e^{2\pi i x}$ を不定元 z に置き換えて得られる

$$\boxed{\bullet\ \delta_{\text{形式的}}(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n \in \mathbb{C}[[z, z^{-1}]]}$$

なる形式ベキ級数を「形式的デルタ関数」と呼ぶ. ここでは, この文書の主役である形式的デルタ関数の基本的な性質について解説する.

1.1 気楽な取り扱い

形式的デルタ関数 $\delta_{\text{形式的}}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n$ は, その名の通り全く形式的な無限和である. なぜこれを「形式的『デルタ関数』」と呼ぶのかについて, まずは「軽く」説明する. $\mathbb{C}$ の原点を中心としたある半径の開円盤 D で正則な関数 $f(z)$ があるとする. $a\in D\backslash\{0\}$ を 1 つとり, 積分

$$\bullet\ \oint \frac{dz}{2\pi i z} f(z)\delta_{\text{形式的}}\left(\frac{a}{z}\right)$$

を考える. 積分路のとり方はこれから述べる. 形式的デルタ関数の定義から

$$\bullet\ \delta_{\text{形式的}}\left(\frac{a}{z}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n$$

であるが, おなじみの

$$\bullet\ \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad (|z|<1)$$

によって, 1 つ目の和は $|a/z|<1$ において $\dfrac{1}{1-(a/z)}$ に収束し, 2 つ目の和は $|z/a|<1$ において $\dfrac{(z/a)}{1-(z/a)}$ に収束する．ここでの目的は形式的デルタ関数の働き方を軽く説明することなので, あまり細かいことにこだわらずに述べるが, 形式的デルタ関数を含む積分は

$$\bullet\ \oint\frac{dz}{2\pi iz}f(z)\delta_{\text{形式的}}\left(\frac{a}{z}\right)=\oint\frac{dz}{2\pi iz}f(z)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n\right]$$
$$=\oint_{\substack{z\in D\\|z|>|a|}}\frac{dz}{2\pi iz}f(z)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n+\oint_{\substack{z\in D\\|z|<|a|}}\frac{dz}{2\pi iz}f(z)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n$$

と実行するものと理解する．ここで, 例えば $\oint_{\substack{z\in D\\|z|>|a|}}$ は「条件 $z\in D$ かつ $|z|>|a|$ を満たしながら原点の周りを反時計回りに回る積分路を 1 つとって積分する」ことを意味する (今後もこういった表記を用いる)．標語的に述べると「形式的デルタ関数を上のように 2 つの無限和に分けたときに, それぞれの和が普通の関数に収束する場所で積分せよ」, ということである．ともかく次のようになる：

$$\bullet\ \oint\frac{dz}{2\pi iz}f(z)\delta_{\text{形式的}}\left(\frac{a}{z}\right)=\oint_{\substack{z\in D\\|z|>|a|}}\frac{dz}{2\pi iz}\cdot\frac{f(z)}{1-(a/z)}+\oint_{\substack{z\in D\\|z|<|a|}}\frac{dz}{2\pi iz}\cdot\frac{f(z)(z/a)}{1-(z/a)}$$
$$=\oint_{\substack{z\in D\\|z|>|a|}}\frac{dz}{2\pi i}\cdot\frac{f(z)}{z-a}-\oint_{\substack{z\in D\\|z|<|a|}}\frac{dz}{2\pi i}\cdot\frac{f(z)}{z-a}$$
$$=\oint_{C(a)}\frac{dz}{2\pi i}\cdot\frac{f(z)}{z-a}=f(a).$$

ここで「点 a を反時計回りに取り囲む積分路 $C(a)$ で $C(a)\subset D$ なるもの」を 1 つとって積分した．これが普通のデルタ関数の性質である

$$\bullet\ \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-a)dx=f(a)$$

と同じ働きだと理解するわけである．

普通のデルタ関数については「積分した結果が同じならば同一視する」という気持ちで

$$\bullet\ f(x)\delta(x-a)=f(a)\delta(x-a)$$

などとよくやっていたわけであるが, 形式的デルタ関数に対しても同様に考える：

- $a\in\mathbb{C}^\times$ 及び点 a を含む開集合で正則な関数 $f(z)$ に対し

$$\bullet\ f(z)\delta_{\text{形式的}}\left(\frac{a}{z}\right)=f(a)\delta_{\text{形式的}}\left(\frac{a}{z}\right).$$

これは次のようにしても (直感的には) 理解できる．まず

$$\bullet\ z\delta_{\text{形式的}}\left(\frac{a}{z}\right)=z\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{a}{z}\right)^n=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a\left(\frac{a}{z}\right)^{n-1}=a\delta_{\text{形式的}}\left(\frac{a}{z}\right)$$

から $(z-a)\delta_{形式的}\left(\frac{a}{z}\right)=0$ がわかる．よって $(z-a)^k\delta_{形式的}\left(\frac{a}{z}\right)=0$ $(k\in\mathbb{Z}_{>0})$ も従う．関数 $f(z)$ が点 a を含むある開集合で正則であるとすると，$f(z)$ は

$$\bullet\ f(z)=f(a)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k$$

と点 a の周りで Taylor 展開できるので次が成り立つ：

$$\bullet\ f(z)\delta_{形式的}\left(\frac{a}{z}\right)=f(a)\delta_{形式的}\left(\frac{a}{z}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\underbrace{(z-a)^k\delta_{形式的}\left(\frac{a}{z}\right)}_{0}=f(a)\delta_{形式的}\left(\frac{a}{z}\right).$$

形式的デルタ関数に関してこれまで述べてきたのは，あくまでも「気楽な説明」であることに注意されたい．例えば $\oint\frac{dz}{2\pi iz}f(z)\delta_{形式的}\left(\frac{a}{z}\right)=f(a)$ や $f(z)\delta_{形式的}\left(\frac{a}{z}\right)=f(a)\delta_{形式的}\left(\frac{a}{z}\right)$ などに見られるように，関数 $f(z)$ と形式ベキ級数 $\delta_{形式的}\left(\frac{a}{z}\right)$ が "$f(z)\delta_{形式的}\left(\frac{a}{z}\right)$" という具合に同居しているものを平気で書いていたが，この存在を厳密に正当化するのは容易ではない．また，直近で述べた $f(z)\delta_{形式的}\left(\frac{a}{z}\right)=f(a)\delta_{形式的}\left(\frac{a}{z}\right)$ の説明で関数 $f(z)$ の点 a の周りでの Taylor 展開を用いたので,「それでは，これは $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k$ が使える領域でしか成り立たないのではないか ?」といったような疑問も生じ得る．次の 1.2「形式ベキ級数としての取り扱い」では，こういった問題が初等的に解決される様子を紹介する．

1.2　形式ベキ級数としての取り扱い

以下では，形式的デルタ関数を単に $\delta(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}z^n$ と表記し，これを「デルタ関数」と呼ぶ．先ほどまではデルタ関数の性質を積分との関連で見ていたが，ここでは，後に必要になるような事柄を含め，話が形式ベキ級数のみで済むような定式化を行う．

デルタ関数 $\delta(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}z^n$ は

$$\bullet\ \delta(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}$$

と分けられるが，これらの和は，有理関数 $\frac{1}{1-z}$ をそれぞれ $|z|<1$, $|z|>1$ において展開して現れるものである：

$$\bullet\ \frac{1}{1-z}=\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}z^n & (|z|<1),\\ -\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n} & (|z|>1).\end{cases}$$

そこで，この事実を

$$\bullet\ \left[\frac{1}{1-z}\right]_{|z|<1}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k,\quad \bullet\ \left[\frac{1}{1-z}\right]_{|z|>1}=-\sum_{k=1}^{\infty}z^{-k}$$

などと書くことにする. すなわち, 何かしらの条件 $(*)$ で定まる複素平面 $\mathbb{C}$ の領域において正則な関数 $f(z)$ を z について展開してできる無限級数 $f(z){=}\sum_k a_k z^k$ (← k がどういう範囲を動くのかは場合による) を形式ベキ級数と思い直したものを

$$\bullet\ [f(z)]_{(*)}{=}\sum_k a_k z^k{\in}\mathbb{C}[[z,z^{-1}]]$$

と書くことにする. この記号を用いると, デルタ関数 $\delta(z)$ は

$$\bullet\ \left[\frac{1}{1{-}z}\right]_{|z|<1}{-}\left[\frac{1}{1{-}z}\right]_{|z|>1}{=}\delta(z)$$

とも書ける. このように, デルタ関数 $\delta(z)$ は $|z|{<}1$ と $|z|{>}1$ という 2 つの異なる領域 (ただし境界 $|z|{=}1$ は共有している) における有理関数 $\dfrac{1}{1{-}z}$ のベキ展開の差として表すことができる.

上に述べた「何かしらの条件 $(*)$ で定まる複素平面 $\mathbb{C}$ の領域」というのが曖昧であるかもしれないが, 以下では, そのような領域としては $a{\in}\mathbb{C}^{\times}{=}\mathbb{C}\backslash\{0\}$ で定まる $\{z{\in}\mathbb{C}\mid |z|{<}|a|\}$ なる開円盤, $\mathbb{C}$ から閉円盤 $\{z{\in}\mathbb{C}\mid |z|{\le}|a|\}$ を除いた $\{z{\in}\mathbb{C}\mid |z|{>}|a|\}$, a, $b{\in}\mathbb{C}^{\times}$ で $|a|{<}|b|$ なるものによって定まるアニュラス $\bigl\{z{\in}\mathbb{C}^{\times}\bigm| |a|{<}|z|{<}|b|\bigr\}$ しか現れない (第 2 章以降はほとんどアニュラスしか現れない).

以下, 例えば「開円盤 $\{z{\in}\mathbb{C}\mid |z|{<}1\}$」と書くべきものを単に「開円盤 $|z|{<}1$」などとも書く.

例 1.1. 上に述べたことから, $a{\in}\mathbb{C}^{\times}$ について

$$\bullet\ \left[\frac{1}{1{-}(a/z)}\right]_{|a/z|<1}{-}\left[\frac{1}{1{-}(a/z)}\right]_{|a/z|>1}{=}\delta\Bigl(\frac{a}{z}\Bigr)$$

が成り立つ. 領域 $|a/z|{<}1$ と $|a/z|{>}1$ (← これは開円盤 $|z|{<}|a|$) は境界 $|z|{=}|a|$ を共有しているが, 上のような差によって生じるデルタ関数の台 (support) は境界 $|z|{=}|a|$ の上に生じる.

例 1.2. デルタ関数が 2 つ出てくる場合を考える. 例えば

$$\bullet\ \frac{1}{(1{-}z)(1{-}2z)}{=}\frac{-1}{1{-}z}{+}\frac{2}{1{-}2z}$$

なので, $|z|{<}1$ かつ $|2z|{<}1$ で定まる開円盤, および $|z|{>}1$ かつ $|2z|{>}1$ で定まる領域における有理関数 $\dfrac{1}{(1{-}z)(1{-}2z)}$ の展開が

$$\bullet\ \left[\frac{1}{(1{-}z)(1{-}2z)}\right]_{\substack{|z|<1\\|2z|<1}}{=}{-}\sum_{k=0}^{\infty}z^k{+}2\sum_{k=0}^{\infty}(2z)^k,$$

$$\bullet\ \left[\frac{1}{(1{-}z)(1{-}2z)}\right]_{\substack{|z|>1\\|2z|>1}}{=}\sum_{k=1}^{\infty}z^{-k}{-}2\sum_{k=1}^{\infty}(2z)^{-k}$$

であることから次が成り立つ：

$$\bullet\ \left[\frac{1}{(1{-}z)(1{-}2z)}\right]_{\substack{|z|<1\\|2z|<1}}{-}\left[\frac{1}{(1{-}z)(1{-}2z)}\right]_{\substack{|z|>1\\|2z|>1}}{=}{-}\delta(z){+}2\delta(2z).$$

ところで, 領域 $\{z{\in}\mathbb{C} \mid |z|{<}1,\ |2z|{<}1\}$ とは単に開円盤 $\{z{\in}\mathbb{C} \mid |z|{<}1/2\}$ のことであるし, $\{z{\in}\mathbb{C} \mid |z|{>}1,\ |2z|{>}1\}{=}\{z{\in}\mathbb{C} \mid |z|{>}1\}$ である. よって, 上で示したのは単に

$$\bullet\ \left[\frac{1}{(1-z)(1-2z)}\right]_{|z|<1/2}-\left[\frac{1}{(1-z)(1-2z)}\right]_{|z|>1}=-\delta(z)+2\delta(2z)$$

とも書けるわけである. ただ, こう書かれるとなぜ $\delta(z)$ や $\delta(2z)$ が現れるのかわからないと感じる読者がいるかもしれない. 一見すると, 領域 $|z|{<}1/2$ と $|z|{>}1$ は境界を共有していないからである. それでも上の内容は正しい. それは単純に

$$\begin{aligned}\bullet\ \left[\frac{1}{(1-z)(1-2z)}\right]_{|z|<1/2}&=\left[\frac{-1}{1-z}+\frac{2}{1-2z}\right]_{|z|<1/2}=-\sum_{k=0}^{\infty}z^k+2\sum_{k=0}^{\infty}(2z)^k\\&=\left[\frac{-1}{1-z}\right]_{|z|<1}+\left[\frac{2}{1-2z}\right]_{|z|<1/2},\\ \bullet\ \left[\frac{1}{(1-z)(1-2z)}\right]_{|z|>1}&=\left[\frac{-1}{1-z}+\frac{2}{1-2z}\right]_{|z|>1}=\sum_{k=1}^{\infty}z^{-k}-2\sum_{k=1}^{\infty}(2z)^{-k}\\&=\left[\frac{-1}{1-z}\right]_{|z|>1}+\left[\frac{2}{1-2z}\right]_{|z|>1/2}\end{aligned}$$

が成り立つからである. 確かにこれらの差は先に見た結果に一致する：

$$\begin{aligned}&\bullet\ \left[\frac{1}{(1-z)(1-2z)}\right]_{|z|<1/2}-\left[\frac{1}{(1-z)(1-2z)}\right]_{|z|>1}\\&=\left[\frac{-1}{1-z}\right]_{|z|<1}-\left[\frac{-1}{1-z}\right]_{|z|>1}+\left[\frac{2}{1-2z}\right]_{|z|<1/2}-\left[\frac{2}{1-2z}\right]_{|z|>1/2}=-\delta(z)+2\delta(2z).\end{aligned}$$

極端な話ではあるが

$$\bullet\ \left[\frac{1}{1-z}\right]_{|z|<10^{-3}}-\left[\frac{1}{1-z}\right]_{|z|>5\times10^{15}}=\delta(z)$$

も正しいわけである. 上に述べたのはこういう類の話である.

例えば, 指数関数 e^z は点 0 の周りで次のように Taylor 展開できる：

$$\bullet\ e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\quad (z{\in}\mathbb{C}).$$

この右辺のベキ級数の収束半径は ∞ なので, $a{\in}\mathbb{C}^{\times}$ を 1 つとるとき, この e^z の Taylor 展開は $|z|{<}|a|$ でも $|z|{>}|a|$ でも使えて

$$\bullet\ [e^z]_{|z|<|a|}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!},\quad \bullet\ [e^z]_{|z|>|a|}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$$

である. よって

$$\bullet\ [e^z]_{|z|<|a|}-[e^z]_{|z|>|a|}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=0$$

であるが, 同様のことが開円盤で正則な関数について一般に成り立つ.

命題 1.3. 複素平面 $\mathbb{C}$ の原点を中心とした開円盤 D で正則な関数 $f(z)$ があるとする. このとき, 任意の $a\in D\setminus\{0\}$ に対し次が成り立つ：

$$\bullet\ [f(z)]_{\substack{z\in D\\ |a/z|<1}} - [f(z)]_{\substack{z\in D\\ |a/z|>1}} = 0.$$

証明. 上の開円盤 D の半径を $R>0$ とすると, 上の関数 $f(z)$ は

$$\bullet\ f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k \quad (|z|<R)$$

と点 0 の周りで Taylor 展開できる (もちろん, 今回の場合, 条件「$|z|<R$」とは単に「$z\in D$」のことである). この展開は $|z|<|a|$ においても $|a|<|z|<R$ においても使えるので

$$\bullet\ [f(z)]_{\substack{z\in D\\ |a/z|<1}} - [f(z)]_{\substack{z\in D\\ |a/z|>1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k = 0. \quad \square$$

次の命題は, デルタ関数をどのように扱ったらよいのかを明確にしているという意味で, 非常に基本的なものである.

命題 1.4. 複素平面 $\mathbb{C}$ の原点を中心とした開円盤 D において正則な関数 $f(z)$ と $a\in D\setminus\{0\}$ について次が成り立つ：

$$\bullet\ \left[\frac{f(z)}{1-(a/z)}\right]_{\substack{z\in D\\ |a/z|<1}} - \left[\frac{f(z)}{1-(a/z)}\right]_{\substack{z\in D\\ |a/z|>1}} = f(a)\delta\left(\frac{a}{z}\right).$$

証明. 今回問題にしている関数 $\dfrac{f(z)}{1-(a/z)}$ は

$$\bullet\ \frac{f(z)}{1-(a/z)} = \frac{f(z)-f(a)+f(a)}{1-(a/z)} = \frac{f(a)}{1-(a/z)} + \underbrace{\frac{f(z)-f(a)}{1-(a/z)}}_{g(z)\text{ とおく}}$$

とも書けるが, ここに見えている $g(z):=\dfrac{f(z)-f(a)}{1-(a/z)}=z\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$ は D 全体で正則であることに注意する ($g(z)$ は厳密には $z=a$ では定義されていないが, $\lim_{z\to a} z\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}=af^{(1)}(a)$ から, $z=a$ においても定義されていると理解する). よって, 命題 1.3 から次が成り立つ：

$$\begin{aligned}
\bullet\ & \left[\frac{f(z)}{1-(a/z)}\right]_{\substack{z\in D\\ |a/z|<1}} - \left[\frac{f(z)}{1-(a/z)}\right]_{\substack{z\in D\\ |a/z|>1}} \\
&= \left[\frac{f(a)}{1-(a/z)}+g(z)\right]_{\substack{z\in D\\ |a/z|<1}} - \left[\frac{f(a)}{1-(a/z)}+g(z)\right]_{\substack{z\in D\\ |a/z|>1}} \\
&= \left[\frac{f(a)}{1-(a/z)}\right]_{\substack{z\in D\\ |a/z|<1}} - \left[\frac{f(a)}{1-(a/z)}\right]_{\substack{z\in D\\ |a/z|>1}} + \underbrace{[g(z)]_{\substack{z\in D\\ |a/z|<1}} - [g(z)]_{\substack{z\in D\\ |a/z|>1}}}_{0} = f(a)\delta\left(\frac{a}{z}\right). \quad \square
\end{aligned}$$

この命題 1.4 は, 先に見た 1.1「気楽な取り扱い」での “$f(z)\delta\left(\frac{a}{z}\right)=f(a)\delta\left(\frac{a}{z}\right)$” に対応するものである. 命題 1.4 によれば, 関数 $f(z)$ とデルタ関数 $\delta\left(\frac{a}{z}\right)$ の “$f(z)\delta\left(\frac{a}{z}\right)$” という具合の同居を避けられるし, 1.1「気楽な取り扱い」の最後に述べた

$$“f(z)\delta\left(\frac{a}{z}\right)=f(a)\delta\left(\frac{a}{z}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\underbrace{(z-a)^k\delta\left(\frac{a}{z}\right)}_{0}=f(a)\delta\left(\frac{a}{z}\right)”$$

において生じる「本当にこれでよいのか ?」という風な疑念からも解放されている.

命題 1.4 と同様にすることで次も確かめられる：

- 複素平面 $\mathbb{C}$ の原点を中心とした半径が 1 より大きな開円盤 D において正則な関数 $f(z)$ について次が成り立つ：

$$\bullet\ \left[\frac{f(z)}{1-z}\right]_{\substack{z\in D\\ |z|<1}}-\left[\frac{f(z)}{1-z}\right]_{\substack{z\in D\\ |z|>1}}=f(1)\delta(z).$$

1.3 より一般の場合

ここでは, デルタ関数が複数個現れる場合や, 0 以上の整数 $N\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を含む $\dfrac{f(z)}{(1-z)^{N+1}}$, または, ある $\mathbb{C}^{\times}$ の元 a を含む $\dfrac{f(z)}{\{1-(a/z)\}^{N+1}}$ といった格好の関数のベキ展開からデルタ関数がどのように現れるのかを考える.

例 1.2 において

$$\bullet\ \left[\frac{1}{(1-z)(1-2z)}\right]_{\substack{|z|<1\\ |2z|<1}}-\left[\frac{1}{(1-z)(1-2z)}\right]_{\substack{|z|>1\\ |2z|>1}}=-\delta(z)+2\delta(2z)$$

が成り立つことを見たが, これを次のように一般化してみる. 複素平面 $\mathbb{C}$ の原点を中心としたある半径の開円盤 D において正則な関数 $f(z)$ があるとし, $a,\ b\in D\backslash\{0\}$ で $a\neq b$ なるものを任意にとる. ここで

$$\bullet\ \frac{1}{\{1-(a/z)\}\{1-(b/z)\}}=\frac{1}{1-(b/a)}\cdot\frac{1}{1-(a/z)}+\frac{1}{1-(a/b)}\cdot\frac{1}{1-(b/z)}$$

という具合に部分分数分解できるので, 関数 $\dfrac{f(z)}{\{1-(a/z)\}\{1-(b/z)\}}$ について

$$\begin{aligned}\bullet\ &\frac{f(z)}{\{1-(a/z)\}\{1-(b/z)\}}\\ =&\frac{1}{1-(b/a)}\cdot\frac{f(z)}{1-(a/z)}+\frac{1}{1-(a/b)}\cdot\frac{f(z)}{1-(b/z)}\\ =&\frac{1}{1-(b/a)}\cdot\frac{f(a)}{1-(a/z)}+\frac{1}{1-(a/b)}\cdot\frac{f(b)}{1-(b/z)}+\underbrace{\frac{1}{1-(b/a)}\cdot\frac{f(z)-f(a)}{1-(a/z)}+\frac{1}{1-(a/b)}\cdot\frac{f(z)-f(b)}{1-(b/z)}}_{g(z)\text{ とおく}}\end{aligned}$$

とできる．上の $g(z)$ は D において正則であるので次が成り立つことがわかる：

$$
\bullet \left[\frac{f(z)}{\{1-(a/z)\}\{1-(b/z)\}}\right]_{\substack{z\in D\\|a/z|<1\\|b/z|<1}}-\left[\frac{f(z)}{\{1-(a/z)\}\{1-(b/z)\}}\right]_{\substack{z\in D\\|a/z|>1\\|b/z|>1}}
$$
$$
=\left[\frac{1}{1-(b/a)}\cdot\frac{f(a)}{1-(a/z)}+\frac{1}{1-(a/b)}\cdot\frac{f(b)}{1-(b/z)}+g(z)\right]_{\substack{z\in D\\|a/z|<1\\|b/z|<1}}
$$
$$
-\left[\frac{1}{1-(b/a)}\cdot\frac{f(a)}{1-(a/z)}+\frac{1}{1-(a/b)}\cdot\frac{f(b)}{1-(b/z)}+g(z)\right]_{\substack{z\in D\\|a/z|>1\\|b/z|>1}}
$$
$$
=\left[\frac{1}{1-(b/a)}\cdot\frac{f(a)}{1-(a/z)}+\frac{1}{1-(a/b)}\cdot\frac{f(b)}{1-(b/z)}\right]_{\substack{z\in D\\|a/z|<1\\|b/z|<1}}
$$
$$
-\left[\frac{1}{1-(b/a)}\cdot\frac{f(a)}{1-(a/z)}+\frac{1}{1-(a/b)}\cdot\frac{f(b)}{1-(b/z)}\right]_{\substack{z\in D\\|a/z|>1\\|b/z|>1}}
$$
$$
=\frac{f(a)}{1-(b/a)}\delta\left(\frac{a}{z}\right)+\frac{f(b)}{1-(a/b)}\delta\left(\frac{b}{z}\right).
$$

上に述べたことは次のように一般化できる．

命題 1.5. 複素平面 $\mathbb{C}$ の原点を中心とした開円盤 D において正則な関数 $f(z)$ があるとする．$a_1,\ldots,a_N\in D\backslash\{0\}$ で $a_i\neq a_j$ $(1\leq i\neq j\leq N)$ なるものを任意にとるとき，次が成り立つ：

$$
\bullet \left[f(z)\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{1-(a_i/z)}\right]_{\substack{z\in D\\|a_i/z|<1\\(1\leq i\leq N)}}-\left[f(z)\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{1-(a_i/z)}\right]_{\substack{z\in D\\|a_i/z|>1\\(1\leq i\leq N)}}
$$
$$
=\sum_{i=1}^{N}f(a_i)\prod_{j\neq i}\frac{1}{1-(a_j/a_i)}\delta\left(\frac{a_i}{z}\right).
$$

証明. まずは次の部分分数分解が成り立つことに注意する：

$$
\bullet \prod_{i=1}^{N}\frac{1}{1-(a_i/z)}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{1-(a_i/z)}\prod_{j\neq i}\frac{1}{1-(a_j/a_i)}.
$$

これによれば，次のような書き換えが可能である：

$$
\bullet\ f(z)\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{1-(a_i/z)}=\sum_{i=1}^{N}\frac{f(z)}{1-(a_i/z)}\prod_{j\neq i}\frac{1}{1-(a_j/a_i)}=\sum_{i=1}^{N}\frac{f(a_i)+f(z)-f(a_i)}{1-(a_i/z)}\prod_{j\neq i}\frac{1}{1-(a_j/a_i)}
$$
$$
=\sum_{i=1}^{N}\frac{f(a_i)}{1-(a_i/z)}\prod_{j\neq i}\frac{1}{1-(a_j/a_i)}+\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\frac{f(z)-f(a_i)}{1-(a_i/z)}\prod_{j\neq i}\frac{1}{1-(a_j/a_i)}}_{g(z)\text{ とおく}}.
$$

上で定めた $g(z)$ は D で正則なので次が成り立つ：

$$\bullet \left[f(z)\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{1-(a_i/z)}\right]_{\substack{z\in D\\|a_i/z|<1\\(1\le i\le N)}}-\left[f(z)\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{1-(a_i/z)}\right]_{\substack{z\in D\\|a_i/z|>1\\(1\le i\le N)}}$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{f(a_i)}{1-(a_i/z)}\prod_{j\neq i}\frac{1}{1-(a_j/a_i)}+g(z)\right]_{\substack{z\in D\\|a_i/z|<1\\(1\le i\le N)}}$$

$$-\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{f(a_i)}{1-(a_i/z)}\prod_{j\neq i}\frac{1}{1-(a_j/a_i)}+g(z)\right]_{\substack{z\in D\\|a_i/z|>1\\(1\le i\le N)}}$$

$$=\sum_{i=1}^{N}f(a_i)\prod_{j\neq i}\frac{1}{1-(a_j/a_i)}\delta\Big(\frac{a_i}{z}\Big).\quad\square$$

上の命題 1.5 は次の格好でも用いられる：

- $\mathbb{C}$ の原点を中心とした開円盤 D において正則な関数 $f(z)$ と, ${a_1}^{-1},\ldots {a_N}^{-1}\in D\backslash\{0\}$ で $a_i\neq a_j$ $(1\le i\neq j\le N)$ なるものに対し

$$\bullet \left[f(z)\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{1-a_iz}\right]_{\substack{z\in D\\|a_iz|<1\\(1\le i\le N)}}-\left[f(z)\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{1-a_iz}\right]_{\substack{z\in D\\|a_iz|>1\\(1\le i\le N)}}=\sum_{i=1}^{N}f\big({a_i}^{-1}\big)\prod_{j\neq i}\frac{1}{1-(a_j/a_i)}\delta(a_iz).$$

正則関数に関する「Goursat の定理」と呼ばれるものがあった. 簡単な場合に述べると, 複素平面 $\mathbb{C}$ の原点を中心とした開円盤 D において正則な関数 $f(z)$ があるとき, $a\in D$ 及び $N\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対し, 点 a を反時計回りに取り囲む積分路 $C(a)\subset D$ を 1 つとるとき

$$\bullet\ \frac{f^{(N)}(a)}{N!}=\oint_{C(a)}\frac{dz}{2\pi i}\cdot\frac{f(z)}{(z-a)^{N+1}}$$

が成り立つ, というものであった. 特に $a\in D\backslash\{0\}$ の場合には

$$\bullet\ \frac{f^{(N)}(a)}{N!}=\left\{\oint_{\substack{z\in D\\|z|>|a|}}-\oint_{\substack{z\in D\\|z|<|a|}}\right\}\frac{dz}{2\pi iz}\cdot\frac{z^{-N}f(z)}{\{1-(a/z)\}^{N+1}}$$

$$=\left\{\oint_{\substack{z\in D\\|a/z|<1}}-\oint_{\substack{z\in D\\|a/z|>1}}\right\}\frac{dz}{2\pi iz}\cdot\frac{z^{-N}f(z)}{\{1-(a/z)\}^{N+1}}$$

などとできるので, 大方

$$\bullet \left[\frac{z^{-N}f(z)}{\{1-(a/z)\}^{N+1}}\right]_{\substack{z\in D\\|a/z|<1}}-\left[\frac{z^{-N}f(z)}{\{1-(a/z)\}^{N+1}}\right]_{\substack{z\in D\\|a/z|>1}}\sim\frac{f^{(N)}(a)}{N!}\delta\Big(\frac{a}{z}\Big)$$

なのであろうと予想できる. 実際にはもう少し複雑な結果が得られる.

命題 1.6. $\mathbb{C}$ の原点を中心とした開円盤 D で正則な関数 $f(z)$ があるとする．$a\in D\backslash\{0\}$ 及び $N\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を任意にとるとき，次が成り立つ：

$$\bullet\ \left[\frac{z^{-N}f(z)}{\{1-(a/z)\}^{N+1}}\right]_{\substack{z\in D\\|a/z|<1}}-\left[\frac{z^{-N}f(z)}{\{1-(a/z)\}^{N+1}}\right]_{\substack{z\in D\\|a/z|>1}}=\sum_{k=0}^{N}\frac{f^{(k)}(a)}{k!(N-k)!}\partial_a{}^{N-k}\delta\Big(\frac{a}{z}\Big).$$

証明. 関数 $\dfrac{z^{-N}f(z)}{\{1-(a/z)\}^{N+1}}$ は，$f(z)$ の点 a の周りでの Taylor 展開を意識して

$$\bullet\ \frac{z^{-N}f(z)}{\{1-(a/z)\}^{N+1}}=\frac{zf(z)}{(z-a)^{N+1}}=\frac{z\sum_{k=0}^{N}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k}{(z-a)^{N+1}}+\underbrace{z\frac{f(z)-\sum_{k=0}^{N}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k}{(z-a)^{N+1}}}_{g(z)\ \text{とおく}}$$

とも書ける．ここに現れた関数

$$\bullet\ g(z):=z\frac{f(z)-\sum_{k=0}^{N}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k}{(z-a)^{N+1}}$$

は D 全体で正則であることに注意する．実際，点 a の周りでの Taylor 展開

$$\bullet\ f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k$$

が使える収束領域の半径 (収束半径) が $r>0$ であったとすると，$z\in D$ かつ $|z-a|\geq r$ である場合は，$g(z)$ の分母 $(z-a)^{N+1}$ が 0 になることはないので正則である．また，$z\in D$ かつ $|z-a|<r$ である場合には，$f(z)$ の点 a の周りでの Taylor 展開が使えるので

$$\bullet\ g(z)\overset{|z-a|<r}{=\!=\!=}\frac{z\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k}{(z-a)^{N+1}}=z\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^{k-N-1}$$

であり，これは $|z-a|<r$ において正則である (↑ この右辺のベキ級数の収束半径も $r>0$ である)．こうして $g(z)$ は D で正則であることがわかったので，次のようにできる：

$$\bullet\ \left[\frac{z^{-N}f(z)}{\{1-(a/z)\}^{N+1}}\right]_{\substack{z\in D\\|a/z|<1}}-\left[\frac{z^{-N}f(z)}{\{1-(a/z)\}^{N+1}}\right]_{\substack{z\in D\\|a/z|>1}}$$

$$=\left[\sum_{k=0}^{N}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot\frac{z}{(z-a)^{N-k+1}}+g(z)\right]_{\substack{z\in D\\|a/z|<1}}-\left[\sum_{k=0}^{N}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot\frac{z}{(z-a)^{N-k+1}}+g(z)\right]_{\substack{z\in D\\|a/z|>1}}$$

$$=\sum_{k=0}^{N}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\left\{\left[\frac{z}{(z-a)^{N-k+1}}\right]_{\substack{z\in D\\|a/z|<1}}-\left[\frac{z}{(z-a)^{N-k+1}}\right]_{\substack{z\in D\\|a/z|>1}}\right\}.$$

ここで $\dfrac{z}{(z-a)^{N-k+1}}$ について

$$\bullet\ \frac{z}{(z-a)^{N-k+1}}=\frac{z}{(N-k)!}\partial_a{}^{N-k}\left(\frac{1}{z-a}\right)=\frac{1}{(N-k)!}\partial_a{}^{N-k}\left\{\frac{1}{1-(a/z)}\right\}$$

であることを使うと

$$\begin{aligned}\bullet\ &\left[\frac{z^{-N}f(z)}{\{1-(a/z)\}^{N+1}}\right]_{\substack{z\in D\\|a/z|<1}}-\left[\frac{z^{-N}f(z)}{\{1-(a/z)\}^{N+1}}\right]_{\substack{z\in D\\|a/z|>1}}\\ &=\sum_{k=0}^{N}\frac{f^{(k)}(a)}{k!(N-k)!}\left\{\left[\partial_a{}^{N-k}\left\{\frac{1}{1-(a/z)}\right\}\right]_{\substack{z\in D\\|a/z|<1}}-\left[\partial_a{}^{N-k}\left\{\frac{1}{1-(a/z)}\right\}\right]_{\substack{z\in D\\|a/z|>1}}\right\}\\ &=\sum_{k=0}^{N}\frac{f^{(k)}(a)}{k!(N-k)!}\partial_a{}^{N-k}\delta\left(\frac{a}{z}\right).\quad\square\end{aligned}$$

上の命題 1.6 の証明と同様にすることで次が確かめられる：

> • $\mathbb{C}$ の原点を中心とした半径が 1 より大きな開円盤 D において正則な関数 $f(z)$ があるとする. $N\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を任意にとるとき, 次が成り立つ：
>
> $$\bullet\ \left[\frac{f(z)}{(1-z)^{N+1}}\right]_{\substack{z\in D\\|z|<1}}-\left[\frac{f(z)}{(1-z)^{N+1}}\right]_{\substack{z\in D\\|z|>1}}=\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k f^{(k)}(1)}{k!(N-k)!}\partial_z{}^{N-k}\delta(z).$$

1.4 形式ベキ級数の定数項をとる操作と積分の対応

第 1 章の 1.1「気楽な取り扱い」において, デルタ関数の性質を積分と関連させて細かいことはあまり気にせずに述べた. デルタ関数をどのように扱えばよいのかがわかった今ならば, 1.1「気楽な取り扱い」にて触れた内容にも意味がつけられるので, ここでその内容に立ち返ってみる.

形式ベキ級数 $\widetilde{f}(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k z^k\in\mathbb{C}[[z,z^{-1}]]$ の定数項 c_0 を拾う操作を

$$\bullet\ \underset{z}{\mathrm{CT}}\left[\widetilde{f}(z)\right]:=c_0$$

なる記号によって表す (CT は「constant term」を意味する). これによれば

$$\bullet\ \underset{z}{\mathrm{CT}}\left[\delta(z)\right]=\underset{z}{\mathrm{CT}}\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}z^k\right]=1$$

であるが, こういった内容と第 1 章の 1.1「気楽な取り扱い」にて述べたような

$$\text{“}\oint\frac{dz}{2\pi iz}f(z)\delta\left(\frac{a}{z}\right)=f(a)\text{”}$$

などのことを整合させるには次のようにすればよい：

- 条件 $(*)$ で定まる複素平面 $\mathbb{C}$ の領域で正則な関数 $f(z)$ を z について展開したもの $[f(z)]_{(*)}{\in}\mathbb{C}[[z,z^{-1}]]$ の定数項 $\underset{z}{\mathrm{CT}}\left[[f(z)]_{(*)}\right]$ について次が成り立つと理解する：

$$\bullet\ \underset{z}{\mathrm{CT}}\left[[f(z)]_{(*)}\right]{=}\oint_{(*)}\frac{dz}{2\pi iz}f(z).$$

ここで $\displaystyle\oint_{(*)}$ は「条件 $(*)$ を満たしながら複素平面 $\mathbb{C}$ の原点を反時計回りに取り囲む積分路を 1 つとって積分する」操作を表す.

複雑な領域に対しては, 上のように $\displaystyle\oint_{(*)}\frac{dz}{2\pi iz}f(z)$ と書いたところで意味を成さない場合があり得るが, 開円盤やアニュラスに対しては問題ない. このことを軽く確かめる. 複素平面 $\mathbb{C}$ の原点を中心とした半径 $R{>}0$ の開円盤 D で正則な関数があるとき, $f(z)$ は

$$\bullet\ f(z){=}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k\quad(|z|{<}R)$$

という具合に Taylor 展開できる. よって

$$\bullet\ [f(z)]_{z\in D}{=}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k$$

であるので, この z についての定数項は明らかに $\underset{z}{\mathrm{CT}}\big[[f(z)]_{z\in D}\big]{=}f(0)$ である. 一方で, 複素平面 $\mathbb{C}$ の原点を反時計回りに取り囲む積分路 $C{\subset}D$ を 1 つとると

$$\bullet\ \oint_{z\in D}\frac{dz}{2\pi iz}f(z){=}\oint_C\frac{dz}{2\pi i}{\cdot}\frac{f(z)}{z{-}0}{=}f(0)$$

である (積分路の選び方は結果に影響しないのであるが, これは例の「被積分関数が正則なところでは積分路を変形してよい」という性質による). 確かにこの場合には次が成り立つ：

$$\bullet\ \underset{z}{\mathrm{CT}}\big[[f(z)]_{z\in D}\big]{=}\oint_{z\in D}\frac{dz}{2\pi iz}f(z){=}f(0).$$

アニュラスで正則な関数についても考えてみる. ここで次の事実を用いる：

- $|a|{<}|b|$ なる $a,b{\in}\mathbb{C}^\times$ によって定まるアニュラス $\{z{\in}\mathbb{C}^\times \mid |a|{<}|z|{<}|b|\}$ において正則な関数 $f(z)$ があるとする. $\mathbb{C}$ の原点を反時計回りに取り囲む積分路 C でアニュラス $\{z{\in}\mathbb{C}^\times \mid |a|{<}|z|{<}|b|\}$ に含まれるものを 1 つとって

$$\bullet\ c_k{:=}\oint_C\frac{dz}{2\pi iz}z^{-k}f(z)\quad(k{\in}\mathbb{Z})$$

とおくと $f(z){=}\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_kz^k$ $(|a|{<}|z|{<}|b|)$ が成り立つ.

上に述べた係数 $c_k = \oint_C \frac{dz}{2\pi i z} z^{-k} f(z)$ $(k \in \mathbb{Z})$ の被積分関数はアニュラス $\left\{ z \in \mathbb{C}^\times \;\middle|\; |a| < |z| < |b| \right\}$ で正則なので, 係数 c_k を計算するのに使う積分路は「$\mathbb{C}$ の原点を反時計回りに取り囲む積分路でアニュラス $\left\{ z \in \mathbb{C}^\times \;\middle|\; |a| < |z| < |b| \right\}$ に含まれるもの」であれば何でもよい.

これによって, アニュラス $\{z \in \mathbb{C}^\times \mid |a| < |z| < |b|\}$ で正則な関数 $f(z)$ があるとき, これは

$$\bullet\ f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k \quad (|a| < |z| < |b|)$$

という格好の z についてのベキ展開を持つ. これによって

$$\bullet\ [f(z)]_{|a|<|z|<|b|} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k$$

なので, この定数項は $\operatorname*{CT}_z \Big[[f(z)]_{|a|<|z|<|b|} \Big] = c_0$ である. ここで, $\mathbb{C}$ の原点を反時計回りに取り囲む積分路 C でアニュラス $\{z \in \mathbb{C}^\times \mid |a| < |z| < |b|\}$ に含まれるものを 1 つとると, 上に述べたことから

$$\bullet\ \oint_{|a|<|z|<|b|} \frac{dz}{2\pi i z} f(z) = \oint_C \frac{dz}{2\pi i z} f(z) = c_0$$

が成り立つ. よって, この場合にも次が成り立つことがわかる：

$$\bullet\ \operatorname*{CT}_z \Big[[f(z)]_{|a|<|z|<|b|} \Big] = \oint_{|a|<|z|<|b|} \frac{dz}{2\pi i z} f(z) = c_0.$$

例 1.7. $\mathbb{C}$ の原点を中心とした開円盤 D で正則な関数 $f(z)$ 及び $a \in D \setminus \{0\}$ について

$$\bullet\ \left[\frac{f(z)}{1-(a/z)} \right]_{\substack{z \in D \\ |a/z|<1}} - \left[\frac{f(z)}{1-(a/z)} \right]_{\substack{z \in D \\ |a/z|>1}} = f(a) \delta\Big(\frac{a}{z}\Big)$$

であることと $\operatorname*{CT}_z \Big[f(a) \delta\Big(\frac{a}{z}\Big) \Big] = f(a)$ から, ↑ この両辺の z についての定数項は $f(a)$ である. 一方で, 形式ベキ級数の定数項をとる操作と積分の対応を使えば, この左辺から

$$\begin{aligned} &\bullet\ \operatorname*{CT}_z \left[\left[\frac{f(z)}{1-(a/z)} \right]_{\substack{z \in D \\ |a/z|<1}} \right] - \operatorname*{CT}_z \left[\left[\frac{f(z)}{1-(a/z)} \right]_{\substack{z \in D \\ |a/z|>1}} \right] \\ &= \oint_{\substack{z \in D \\ |a/z|<1}} \frac{dz}{2\pi i z} \cdot \frac{f(z)}{1-(a/z)} - \oint_{\substack{z \in D \\ |a/z|>1}} \frac{dz}{2\pi i z} \cdot \frac{f(z)}{1-(a/z)} \\ &= \oint_{\substack{z \in D \\ |z|>|a|}} \frac{dz}{2\pi i} \cdot \frac{f(z)}{z-a} - \oint_{\substack{z \in D \\ |z|<|a|}} \frac{dz}{2\pi i} \cdot \frac{f(z)}{z-a} = f(a) \end{aligned}$$

が得られる. 確かにうまく対応がついていることがわかる.

例 1.8. 命題 1.6 にて述べた

$$\bullet\ \left[\frac{z^{-N} f(z)}{\{1-(a/z)\}^{N+1}} \right]_{\substack{z \in D \\ |a/z|<1}} - \left[\frac{z^{-N} f(z)}{\{1-(a/z)\}^{N+1}} \right]_{\substack{z \in D \\ |a/z|>1}} = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!(N-k)!} \partial_a{}^{N-k} \delta\Big(\frac{a}{z}\Big)$$

の両辺の z に関する定数項を拾えば, 例の Goursat の定理が出るはずであるが, 何だかこの右辺の定数項は $\dfrac{f^{(N)}(a)}{N!}$ 以外の余計なものをたくさん含んでしまうように見える．ただ, そういった心配は無用である．Euler 微分 D_x について一般に

$$\bullet\ x^n{\partial_x}^n = D_x(D_x-1)\cdots\{D_x-(n-1)\} \quad (n\in\mathbb{Z}_{>0})$$

であることから

$$\begin{aligned}\bullet\ &\sum_{k=0}^{N}\frac{f^{(k)}(a)}{k!(N-k)!}{\partial_a}^{N-k}\delta\Big(\frac{a}{z}\Big)\\ &=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!(N-k)!}a^{-N+k}a^{N-k}{\partial_a}^{N-k}\delta\Big(\frac{a}{z}\Big)+\frac{f^{(N)}(a)}{N!}\delta\Big(\frac{a}{z}\Big)\\ &=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!(N-k)!}a^{-N+k}D_a\Big\{(D_a-1)\cdots\{D_a-(N-k-1)\}\delta\Big(\frac{a}{z}\Big)\Big\}+\frac{f^{(N)}(a)}{N!}\delta\Big(\frac{a}{z}\Big)\end{aligned}$$

と書き換えられる．ここで形式ベキ級数 $\widetilde{f}(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_kz^k\in\mathbb{C}[[z,z^{-1}]]$ に $z\mapsto a/z$ なる代入を行い, これを a で Euler 微分したものの「z についての」定数項は

$$\bullet\ \underset{z}{\mathrm{CT}}\Big[D_a\widetilde{f}\Big(\frac{a}{z}\Big)\Big]=\underset{z}{\mathrm{CT}}\Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}}kc_k\Big(\frac{a}{z}\Big)^k\Big]=0$$

である．これは形式ベキ級数について一般に成り立つので次がわかる：

$$\bullet\ \underset{z}{\mathrm{CT}}\Big[\sum_{k=0}^{N}\frac{f^{(k)}(a)}{k!(N-k)!}{\partial_a}^{N-k}\delta\Big(\frac{a}{z}\Big)\Big]=\frac{f^{(N)}(a)}{N!}.$$

途中で使った Euler 微分に関する

$$\bullet\ x^n{\partial_x}^n = D_x(D_x-1)\cdots\{D_x-(n-1)\} \quad (n\in\mathbb{Z}_{>0})$$

であるが, これを示すには次のようにすればよい．交換子を $[A,B]:=AB-BA$ と書くと,

$$\bullet\ [\partial_x, x]=1$$

によって次がわかる：

$$\bullet\ [D_x,\partial_x]=-[\partial_x, x\partial_x]=-[\partial_x,x]\partial_x-x\underbrace{[\partial_x,\partial_x]}_{0}=-\partial_x.$$

これによれば, 例えば $x^2{\partial_x}^2$ は

$$\begin{aligned}\bullet\ x^2{\partial_x}^2&=xD_x\partial_x=x\{[D_x,\partial_x]+\partial_xD_x\}=x(-\partial_x+\partial_xD_x)=x\partial_x(D_x-1)\\ &=D_x(D_x-1)\end{aligned}$$

という風に書けるし, $x^3{\partial_x}^3$ については

$$\begin{aligned}\bullet\ x^3{\partial_x}^3&=x^2D_x{\partial_x}^2=x^2\big\{[D_x,{\partial_x}^2]+{\partial_x}^2D_x\big\}=x^2\big\{[D_x,\partial_x]\partial_x+\partial_x[D_x,\partial_x]+{\partial_x}^2D_x\big\}\\ &=x^2\big(-2{\partial_x}^2+{\partial_x}^2D_x\big)=x^2{\partial_x}^2(D_x-2)=D_x(D_x-1)(D_x-2)\end{aligned}$$

という具合である．あとは帰納法を使えばよい．

これまで, 例えば

$$\bullet \ \left[\frac{1}{1-z}\right]_{|z|<1}-\left[\frac{1}{1-z}\right]_{|z|>1}=\delta(z)$$

という風な「ある関数の別々の領域におけるベキ展開の差」を見てきたが, これと似たようなものは「佐藤超関数」を表示する際にも見られる. その一例として, 冒頭に挙げた「周期的デルタ関数」$\delta_{\text{周期的}}(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{2\pi inx}$ に対して次のようなことを考える. まず, 形式的には

$$\begin{aligned}\bullet \ \delta_{\text{周期的}}(x)&=\lim_{\varepsilon\to+0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-2\pi|n|\varepsilon}e^{2\pi inx}\\&=\lim_{\varepsilon\to+0}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2\pi n\varepsilon}e^{2\pi inx}+\lim_{\varepsilon\to+0}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-2\pi n\varepsilon}e^{-2\pi inx}\\&=\lim_{\varepsilon\to+0}\sum_{n=0}^{\infty}e^{2\pi in(x+i\varepsilon)}+\lim_{\varepsilon\to+0}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-2\pi in(x-i\varepsilon)}\end{aligned}$$

とできる. $x\in\mathbb{R}$ かつ $\varepsilon>0$ ならば

$$\bullet \ \sum_{n=0}^{\infty}e^{2\pi in(x+i\varepsilon)}=\frac{1}{1-e^{2\pi i(x+i\varepsilon)}},\quad \bullet \ \sum_{n=1}^{\infty}e^{-2\pi in(x-i\varepsilon)}=\frac{e^{-2\pi i(x-i\varepsilon)}}{1-e^{-2\pi i(x-i\varepsilon)}}=-\frac{1}{1-e^{2\pi i(x-i\varepsilon)}}$$

であるので, $\lim_{\varepsilon\to+0}$ を省略して $\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{1-e^{2\pi i(x+i\varepsilon)}}=\frac{1}{1-e^{2\pi i(x+i0)}}$ などと書くことにすれば, $\delta_{\text{周期的}}(x)$ について

$$\boxed{\bullet \ \delta_{\text{周期的}}(x)=\frac{1}{1-e^{2\pi i(x+i0)}}-\frac{1}{1-e^{2\pi i(x-i0)}}}$$

が成り立つと理解できる. 直感的に述べると, $e^{2\pi i(x+i0)}$ は $\mathbb{C}$ の原点を中心とした単位円周上の点 $e^{2\pi ix}$ に「単位円の内側から」接近していると理解でき, $e^{2\pi i(x-i0)}$ は $e^{2\pi ix}$ に「単位円の外側から」近づいているとみなせる. この 2 つの近づき方における関数 $\frac{1}{1-e^{2\pi ix}}$ の値の差が $\delta_{\text{周期的}}(x)$ だというわけである. 大まかに述べると, 佐藤超関数は「2 つの領域が境界を共有している場合での, その境界上の点にそれら別々の領域から近づいていくときの, ある関数の値の差」として表示される. 上で得られたのは, 周期的デルタ関数 $\delta_{\text{周期的}}(x)$ の佐藤超関数としての表示である.

2　テータ関数からデルタ関数が出てくる

$|q|<1$ なる複素数 q 及び $z\in\mathbb{C}$ に対し

$$\bullet\ (z;q)_\infty := \prod_{n\geq 0}(1-zq^n)$$

を q-無限積と呼ぶ. これを用いて定義される

$$\boxed{\bullet\ \theta_q(z) := (z;q)_\infty\left(qz^{-1};q\right)_\infty \quad \left(z\in\mathbb{C}^\times=\mathbb{C}\setminus\{0\}\right)}$$

をテータ関数と呼ぶ. ここではいよいよ, 本文書のメインの話題である「テータ関数とデルタ関数の関係」について述べていく.

テータ関数の性質について少し触れておく. 以下では「楕円モジュラス」は p によって表すことにし, $\theta_p(z)=(z;p)_\infty\left(pz^{-1};p\right)_\infty$ などとする. テータ関数 $\theta_p(z)$ は $\mathbb{C}^\times$ 全体で正則で, このゼロ点の全体は $\{z\in\mathbb{C}^\times \mid \theta_p(z)=0\}=p^{\mathbb{Z}}:=\{p^n\in\mathbb{C}^\times \mid n\in\mathbb{Z}\}$ である.

テータ関数 $\theta_p(z)$ については

$$\bullet\ \theta_p(pz)=\theta_p\left(z^{-1}\right)=-z^{-1}\theta_p(z)$$

が成り立つ (テータ関数の擬周期性). 実際, q-無限積について $(z;q)_\infty=(1-z)\cdot(qz;q)_\infty$ なので

$$\begin{aligned}\bullet\ \theta_p(pz)&=(pz;p)_\infty\left(z^{-1};p\right)_\infty=\theta_p\left(z^{-1}\right)\\&=\frac{(z;p)_\infty}{1-z}\left(1-z^{-1}\right)\cdot\left(pz^{-1};p\right)_\infty=\frac{1-z^{-1}}{1-z}\theta_p(z)=-z^{-1}\theta_p(z).\end{aligned}$$

恥を忍んで, かつての筆者の間違いを紹介しておく. 2012 年頃の筆者は, デルタ関数について

$$\text{“}\,\delta(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}=\frac{1}{1-z}+\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\,\text{”}$$

などとできるのであるから (↑ これがいい加減. この最右辺は普通の感覚で計算すると 0 である. この正当化の方法は既に述べた通りである), テータ関数についても

$$\begin{aligned}\text{“}\,\frac{1}{\theta_p(z)}&=\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{(pz;p)_\infty(pz^{-1};p)_\infty}=\left\{\delta(z)-\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\right\}\frac{1}{(pz;p)_\infty(pz^{-1};p)_\infty}\\&=\frac{\delta(z)}{(p;p)_\infty{}^2}-\frac{z^{-1}}{\theta_p(z^{-1})}\,\text{”}\end{aligned}$$

などとやってもよいのではないか ? と考えていた. すなわち

$$\text{“}\,\frac{1}{\theta_p(z)}+\frac{z^{-1}}{\theta_p(z^{-1})}=\frac{\delta(z)}{(p;p)_\infty{}^2}\,\text{”}$$

ということであるが, これはこのままでは意味を成さないのである (↑ この左辺は, $\mathbb{C}^\times$ 上の有理型関数としては 0 である). それにも関わらず, これは使い方を間違わなければ, ある程度意味のある結果を出してくれる「使える公式」なのである. かと言って, ただ開き直っているわけにもいかない (今になって思い出してみると, かなりの長期間, 筆者は開き直ってしまっていたが ……). テータ関数とデルタ関数についての上のような内容を正当化するには, 何をどうしたらよいのであろう ?

2.1　アニュラスで正則な関数の扱いによる導出

$a, b{\in}\mathbb{C}^\times$ で $|a|{<}|b|$ なるものによってできる $\{z{\in}\mathbb{C}^\times \mid |a|{<}|z|{<}|b|\}{\subset}\mathbb{C}^\times$ というタイプの領域をアニュラスと呼ぶ．アニュラス $\{z{\in}\mathbb{C}^\times \mid |a|{<}|z|{<}|b|\}$ で正則な関数 $f(z)$ は次のような格好のベキ展開が可能であることに注意する (13 ページにおいても述べた)：

$$\bullet\ f(z){=}\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k z^k \quad (|a|{<}|z|{<}|b|).$$

以下では, 例えばアニュラス $\left\{z{\in}\mathbb{C}^\times \,\middle|\, |a|{<}|z|{<}|b|\right\}$ を単に「アニュラス $|a|{<}|z|{<}|b|$」とも書く．

この先, 記号「p」は $|p|{<}1$ を満たす楕円モジュラスを表すものとし, 基本的には $p{\neq}0$ とする．

命題 2.1. (1) 関数 $f(z)$ がアニュラス $|p|{<}|z|{<}|p|^{-1}$ で正則であるとき

$$\bullet\ [f(z)]_{|p|<|z|<1}{-}[f(z)]_{1<|z|<|p|^{-1}}{=}0.$$

(2) 複素数 $a{\in}\mathbb{C}^\times$ で定まるアニュラス $|p|{<}|a/z|{<}|p|^{-1}$ で正則な関数 $f(z)$ に対し

$$\bullet\ [f(z)]_{|p|<|a/z|<1}{-}[f(z)]_{1<|a/z|<|p|^{-1}}{=}0.$$

証明. (1) 仮定より, 関数 $f(z)$ は

$$\bullet\ f(z){=}\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k z^k \quad \left(|p|{<}|z|{<}|p|^{-1}\right)$$

なる格好に展開できる．これはアニュラス $|p|{<}|z|{<}1$ でも $1{<}|z|{<}|p|^{-1}$ でも使えるので

$$\bullet\ [f(z)]_{|p|<|z|<1}{-}[f(z)]_{1<|z|<|p|^{-1}}{=}\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k z^k{-}\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k z^k{=}0.$$

(2) アニュラス $|p|{<}|a/z|{<}|p|^{-1}$ がアニュラス $|p|{<}|a/z|{<}1$ 及び $1{<}|a/z|{<}|p|^{-1}$ を含むことから, (1) と同様にすることで示せる．　□

$1/\theta_p(z)$ の z についてのベキ展開とデルタ関数 $\delta(z)$ の間には次の関係がある：

命題 2.2 (テータ関数とデルタ関数の関係). テータ関数 $\theta_p(z){=}(z;p)_\infty\left(pz^{-1};p\right)_\infty$ とデルタ関数 $\delta(z){=}\sum_{n\in\mathbb{Z}}z^n$ について次が成り立つ：

$$\bullet\ \left[\frac{1}{\theta_p(z)}\right]_{|p|<|z|<1}{-}\left[\frac{1}{\theta_p(z)}\right]_{1<|z|<|p|^{-1}}{=}\frac{\delta(z)}{{(p;p)_\infty}^2}.$$

証明. $\mathbb{C}^\times$ 上の有理型関数 $\dfrac{1}{\theta_p(z)}$ はアニュラス $|p|{<}|z|{<}1$ 及び $1{<}|z|{<}|p|^{-1}$ で正則なので, $\left[\dfrac{1}{\theta_p(z)}\right]_{|p|<|z|<1}$ 及び $\left[\dfrac{1}{\theta_p(z)}\right]_{1<|z|<|p|^{-1}}$ がそれぞれ存在する (こういった文言は以下ではあまり

述べないことにする)．ここで

$$\bullet\ f(z):=\frac{1}{(pz;p)_\infty(pz^{-1};p)_\infty}$$

とおくと，これはアニュラス $|p|<|z|<|p|^{-1}$ において正則で

$$\bullet\ \frac{1}{\theta_p(z)}=\frac{1}{1-z}\cdot\underbrace{\frac{1}{(pz;p)_\infty(pz^{-1};p)_\infty}}_{f(z)}=\frac{f(z)-f(1)+f(1)}{1-z}=\frac{f(1)}{1-z}+\underbrace{\frac{f(z)-f(1)}{1-z}}_{g(z)\text{ とおく}}$$

とできる．ここで $f(1)=\dfrac{1}{{(p;p)_\infty}^2}$ である．$g(z):=\dfrac{f(z)-f(1)}{1-z}$ はアニュラス $|p|<|z|<|p|^{-1}$ において正則であるので (これまでと同様，$z=1$ では値 $\lim_{z\to1}\dfrac{f(z)-f(1)}{1-z}=-f^{(1)}(1)$ によって定義されていると理解する)，命題 2.1 の (1) から次が成り立つ：

$$\begin{aligned}\bullet\ &\left[\frac{1}{\theta_p(z)}\right]_{|p|<|z|<1}-\left[\frac{1}{\theta_p(z)}\right]_{1<|z|<|p|^{-1}}\\ =&\left[\frac{f(1)}{1-z}+g(z)\right]_{|p|<|z|<1}-\left[\frac{f(1)}{1-z}+g(z)\right]_{1<|z|<|p|^{-1}}\\ =&\left[\frac{f(1)}{1-z}\right]_{|p|<|z|<1}-\left[\frac{f(1)}{1-z}\right]_{1<|z|<|p|^{-1}}=f(1)\delta(z)=\frac{\delta(z)}{{(p;p)_\infty}^2}.\quad\square\end{aligned}$$

この文書で頻繁に使うことになるのは次の命題である．

命題 2.3. (1) 複素数 $a\in\mathbb{C}^\times$ によって定まるアニュラス $|p|<|a/z|<|p|^{-1}$ において正則な関数 $f(z)$ について次が成り立つ：

$$\bullet\ \left[\frac{f(z)}{\theta_p(a/z)}\right]_{|p|<|a/z|<1}-\left[\frac{f(z)}{\theta_p(a/z)}\right]_{1<|a/z|<|p|^{-1}}=\frac{f(a)}{{(p;p)_\infty}^2}\delta\left(\frac{a}{z}\right).$$

(2) アニュラス $|p|<|z|<|p|^{-1}$ で正則な関数 $f(z)$ について次が成り立つ：

$$\bullet\ \left[\frac{f(z)}{\theta_p(z)}\right]_{|p|<|z|<1}-\left[\frac{f(z)}{\theta_p(z)}\right]_{1<|z|<|p|^{-1}}=\frac{f(1)}{{(p;p)_\infty}^2}\delta(z).$$

証明． ここでは (1) の証明のみ述べる ((2) も同様にして示せる)．命題 2.2 の証明と同様，アニュラス $|p|<|a/z|<|p|^{-1}$ において正則な関数を $\dfrac{f(z)}{\theta_p(a/z)}$ からうまく分離すればよい．そこで

$$\bullet\ g(z):=\frac{f(z)}{(pa/z;p)_\infty(pz/a;p)_\infty}$$

とおくと，これはアニュラス $|p|<|a/z|<|p|^{-1}$ において正則で

$$\bullet\ \frac{f(z)}{\theta_p(a/z)}=\frac{1}{1-(a/z)}\cdot\underbrace{\frac{f(z)}{(pa/z;p)_\infty(pz/a;p)_\infty}}_{g(z)}=\frac{g(a)}{1-(a/z)}+\underbrace{\frac{g(z)-g(a)}{1-(a/z)}}_{h(z)\text{ とおく}}.$$

ここで更に $h(z):=\dfrac{g(z)-g(a)}{1-(a/z)}$ とおくと，これはアニュラス $|p|<|a/z|<|p|^{-1}$ で正則なので，命題 2.1 の (2) から次を得る：

- $$\left[\frac{f(z)}{\theta_p(a/z)}\right]_{|p|<|a/z|<1}-\left[\frac{f(z)}{\theta_p(a/z)}\right]_{1<|a/z|<|p|^{-1}}$$
$$=\left[\frac{g(a)}{1-(a/z)}+h(z)\right]_{|p|<|a/z|<1}-\left[\frac{g(a)}{1-(a/z)}+h(z)\right]_{1<|a/z|<|p|^{-1}}=\underbrace{g(a)}_{f(a)/(p;p)_\infty{}^2}\delta\Big(\frac{a}{z}\Big).\quad\square$$

2.2　より一般の場合 (テータ関数版)

第 1 章の 1.3「より一般の場合」として，デルタ関数が複数個出てくる場合や，ベキ展開を考える関数の分母が少し複雑な場合を考えた．そこでの内容の「テータ関数版」も存在する．

ここで「複数個のアニュラスたちの共通部分が空でないための条件」について述べておく．N 個の実数たち $c_1,\ldots,c_N$ のうち最も大きいものを $\max\{c_1,\ldots,c_N\}$，最も小さいものを $\min\{c_1,\ldots,c_N\}$ と書く．N 個の複素数たち $a_1,\ldots,a_N\in\mathbb{C}^\times$ から定まるアニュラスたち $\{z\in\mathbb{C}^\times\mid|a_ip|<|z|<|a_i|\}$ $(1\le i\le N)$ の共通部分が空でないとすると，ある $z\in\mathbb{C}^\times$ があって $|a_ip|<|z|<|a_i|$ が $1\le i\le N$ であるすべての i について成り立つわけであるが，これは

- $$\max\{|a_1|,\ldots,|a_N|\}|p|<|z|<\min\{|a_1|,\ldots,|a_N|\}$$

だということである．これより，このような $z\in\mathbb{C}^\times$ が存在するためには

- $$|p|<\frac{\min\{|a_1|,\ldots,|a_N|\}}{\max\{|a_1|,\ldots,|a_N|\}}$$

が必要である．逆に，楕円モジュラス p がこの条件を満たす場合，アニュラス

- $$\big\{z\in\mathbb{C}^\times\;\big|\;\max\{|a_1|,\ldots,|a_N|\}|p|<|z|<\min\{|a_1|,\ldots,|a_N|\}\big\}=\left\{z\in\mathbb{C}^\times\;\middle|\;\begin{matrix}|a_ip|<|z|<|a_i|\\(1\le i\le N)\end{matrix}\right\}$$

は空でない．更に，この場合には「より内側のアニュラスたち」，及び「より外側のアニュラスたち」も空でないことがわかる．すなわち，任意の $k\in\mathbb{Z}$ に対し次が成り立つ：

- $$\left\{z\in\mathbb{C}^\times\;\middle|\;\begin{matrix}|a_i|\cdot|p|^{k+1}<|z|<|a_i|\cdot|p|^k\\(1\le i\le N)\end{matrix}\right\}\neq\emptyset.$$

- 複素数 $a_1,\ldots,a_N\in\mathbb{C}^\times$ 及び楕円モジュラス p について
  - $$|p|<\frac{\min\{|a_1|,\ldots,|a_N|\}}{\max\{|a_1|,\ldots,|a_N|\}}$$

が成り立つことと，任意の $k\in\mathbb{Z}$ に対し

- $$\bigcap_{1\le i\le N}\{z\in\mathbb{C}^\times\mid|a_i|\cdot|p|^{k+1}<|z|<|a_i|\cdot|p|^k\}=\left\{z\in\mathbb{C}^\times\;\middle|\;\begin{matrix}|a_i|\cdot|p|^{k+1}<|z|<|a_i|\cdot|p|^k\\(1\le i\le N)\end{matrix}\right\}\neq\emptyset$$

が成り立つことは同値である．

命題 2.4. 複素数 $a_1,\dots,a_N\in\mathbb{C}^\times$ は条件 $a_i/a_j\notin p^{\mathbb{Z}}$ $(1\le i\neq j\le N)$ を満たし, これに加えて楕円モジュラス p とは

- $$|p|<\frac{\min\{|a_1|,\dots,|a_N|\}}{\max\{|a_1|,\dots,|a_N|\}}$$

なる関係にあるとする. 関数 $f(z)$ がアニュラス $|p|<|a_i/z|<|p|^{-1}$ $(1\le i\le N)$ において正則であるとき, 次が成り立つ：

- $$\left[f(z)\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\theta_p(a_i/z)}\right]_{\substack{|p|<|a_i/z|<1\\(1\le i\le N)}}-\left[f(z)\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\theta_p(a_i/z)}\right]_{\substack{1<|a_i/z|<|p|^{-1}\\(1\le i\le N)}}$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\frac{f(a_i)}{(p;p)_\infty{}^2}\prod_{j\neq i}\frac{1}{\theta_p(a_j/a_i)}\delta\left(\frac{a_i}{z}\right).$$

証明. 関数 $g(z)$ を

- $$g(z):=\prod_{i=1}^{N}\{1-(a_i/z)\}\times f(z)\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\theta_p(a_i/z)}=f(z)\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{(pa_i/z;p)_\infty(pz/a_i;p)_\infty}$$

と定める. これはアニュラス $|p|<|a_i/z|<|p|^{-1}$ $(1\le i\le N)$ で正則なので, 部分分数分解

- $$\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{1-(a_i/z)}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{1-(a_i/z)}\prod_{j\neq i}\frac{1}{1-(a_j/a_i)}$$

によって次のようにできる (仮定 $a_i/a_j\notin p^{\mathbb{Z}}$ $(1\le i\neq j\le N)$ によって特に $a_i\neq a_j$ $(1\le i\neq j\le N)$ である)：

- $$f(z)\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\theta_p(a_i/z)}=g(z)\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{1-(a_i/z)}$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\frac{g(a_i)}{1-(a_i/z)}\prod_{j\neq i}\frac{1}{1-(a_j/a_i)}+\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\frac{g(z)-g(a_i)}{1-(a_i/z)}\prod_{j\neq i}\frac{1}{1-(a_j/a_i)}}_{h(z)\text{ とおく}}.$$

ここに見える $h(z)$ もアニュラス $|p|<|a_i/z|<|p|^{-1}$ $(1\le i\le N)$ で正則なので次が成り立つ：

- $$\left[f(z)\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\theta_p(a_i/z)}\right]_{\substack{|p|<|a_i/z|<1\\(1\le i\le N)}}-\left[f(z)\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\theta_p(a_i/z)}\right]_{\substack{1<|a_i/z|<|p|^{-1}\\(1\le i\le N)}}$$
$$=\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{g(a_i)}{1-(a_i/z)}\prod_{j\neq i}\frac{1}{1-(a_j/a_i)}+h(z)\right]_{\substack{|p|<|a_i/z|<1\\(1\le i\le N)}}$$
$$-\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{g(a_i)}{1-(a_i/z)}\prod_{j\neq i}\frac{1}{1-(a_j/a_i)}+h(z)\right]_{\substack{1<|a_i/z|<|p|^{-1}\\(1\le i\le N)}}$$
$$=\sum_{i=1}^{N}g(a_i)\delta\left(\frac{a_i}{z}\right)\prod_{j\neq i}\frac{1}{1-(a_j/a_i)}=\sum_{i=1}^{N}\frac{f(a_i)}{(p;p)_\infty{}^2}\prod_{j\neq i}\frac{1}{\theta_p(a_j/a_i)}\delta\left(\frac{a_i}{z}\right).\quad\square$$

上で示した命題 2.4 は $z \to z^{-1}$ とした次の格好でも使う：

- 複素数たち $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{C}^\times$ は条件 $a_i/a_j \notin p^{\mathbb{Z}}$ $(1 \le i \ne j \le N)$ を満たすとし, 更に楕円モジュラス p とは $|p| < \dfrac{\min\{|a_1|^{-1}, \ldots, |a_N|^{-1}\}}{\max\{|a_1|^{-1}, \ldots, |a_N|^{-1}\}}$ なる関係にあるとする. アニュラス $|p| < |a_i z| < |p|^{-1}$ $(1 \le i \le N)$ において正則な関数 $f(z)$ について次が成り立つ：

$$\bullet \left[f(z) \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\theta_p(a_i z)} \right]_{\substack{|p|<|a_i z|<1 \\ (1 \le i \le N)}} - \left[f(z) \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\theta_p(a_i z)} \right]_{\substack{1<|a_i z|<|p|^{-1} \\ (1 \le i \le N)}}$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{f(a_i{}^{-1})}{(p;p)_\infty{}^2} \prod_{j \ne i} \frac{1}{\theta_p(a_j/a_i)} \delta(a_i z).$$

命題 1.6 によれば, 結果のみを書くと

$$\bullet \left[\frac{z^{-N} f(z)}{\{1-(a/z)\}^{N+1}} \right]_{\substack{z \in D \\ |a/z|<1}} - \left[\frac{z^{-N} f(z)}{\{1-(a/z)\}^{N+1}} \right]_{\substack{z \in D \\ |a/z|>1}} = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!(N-k)!} \partial_a{}^{N-k} \delta\left(\frac{a}{z}\right)$$

なのであったが, この「テータ関数版」があるとすれば, $a \in \mathbb{C}^\times$ 及び $N \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ をとって

$$\bullet \left[\frac{z^{-N} f(z)}{\theta_p(a/z)^{N+1}} \right]_{|p|<|a/z|<1} - \left[\frac{z^{-N} f(z)}{\theta_p(a/z)^{N+1}} \right]_{1<|a/z|<|p|^{-1}}$$

を見ればよいのであろうと予想できる. これについて次が成り立つことがわかる.

命題 2.5. (1) 複素数 $a \in \mathbb{C}^\times$ で定まるアニュラス $|p| < |a/z| < |p|^{-1}$ において正則な関数 $f(z)$ があるとする. $N \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ を任意にとり, 関数 $g(z)$ を

$$\bullet\ g(z) := \frac{f(z)}{\{(pa/z;p)_\infty (pz/a;p)_\infty\}^{N+1}}$$

と定めるとき ($g(z)$ もアニュラス $|p| < |a/z| < |p|^{-1}$ において正則である), 次が成り立つ：

$$\bullet \left[\frac{z^{-N} f(z)}{\theta_p(a/z)^{N+1}} \right]_{|p|<|a/z|<1} - \left[\frac{z^{-N} f(z)}{\theta_p(a/z)^{N+1}} \right]_{1<|a/z|<|p|^{-1}} = \sum_{k=0}^{N} \frac{g^{(k)}(a)}{k!(N-k)!} \partial_a{}^{N-k} \delta\left(\frac{a}{z}\right).$$

(2) 関数 $f(z)$ はアニュラス $|p| < |z| < |p|^{-1}$ において正則であるとする. $N \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ を任意にとり, 関数 $g(z)$ を

$$\bullet\ g(z) := \frac{f(z)}{\{(pz;p)_\infty (pz^{-1};p)_\infty\}^{N+1}}$$

と定めるとき ($g(z)$ もアニュラス $|p| < |z| < |p|^{-1}$ において正則である), 次が成り立つ：

$$\bullet \left[\frac{f(z)}{\theta_p(z)^{N+1}} \right]_{|p|<|z|<1} - \left[\frac{f(z)}{\theta_p(z)^{N+1}} \right]_{1<|z|<|p|^{-1}} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k g^{(k)}(1)}{k!(N-k)!} \partial_z{}^{N-k} \delta(z).$$

証明. (1) については, 関数 $\dfrac{z^{-N}f(z)}{\theta_p(a/z)^{N+1}}=\dfrac{zg(z)}{(z-a)^{N+1}}$ について

$$\bullet\ \frac{zg(z)}{(z-a)^{N+1}}=\frac{z\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k}{(z-a)^{N+1}}+z\frac{g(z)-\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k}{(z-a)^{N+1}}$$

とするときに現れる

$$\bullet\ z\frac{g(z)-\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k}{(z-a)^{N+1}}$$

がアニュラス $|p|<|a/z|<|p|^{-1}$ において正則であることから, あとは命題 1.6 と同様にすればわかる. (2) についても同様である.　□

2.3　Eisenstein の楕円関数

$\mathbb{C}^{\times}$ 上の有理型関数 $E_k(z;p)$ $(k\in\mathbb{Z}_{>0})$ を

$$\boxed{\bullet\ E_k(z;p):=-{D_z}^k\log\theta_p(z)}$$

と定め, これを「Eisenstein の楕円関数」と呼ぶ (本文書では単に「Eisenstein 関数」と呼んでいく). 以下では Eisenstein 関数について, 後に必要になる基本的な事柄を見ていく.

テータ関数の性質である $\theta_p(pz)=\theta_p(z^{-1})=-z^{-1}\theta_p(z)$ の log をとって微分することで次が確かめられる：

$$\bullet\ E_1(pz;p)=E_1(z;p)+1,\quad \bullet\ E_1(z^{-1};p)=-E_1(z;p)-1,$$
$$\bullet\ E_k(pz;p)=E_k(z;p),\quad \bullet\ E_k(z^{-1};p)=(-1)^kE_k(z;p)\quad (k\geq 2).$$

よって, $E_1(z;p)$ は通常の意味での「楕円関数」ではないが (z の p-シフト $z\mapsto pz$ で不変でないので), テータ関数を用いて書かれる (適当な意味での) 擬周期的な関数のことも以下では単に楕円関数と呼ぶことにする. Eisenstein 関数 $E_k(z;p)$ $(k\in\mathbb{Z}_{>0})$ の極の全体は $p^{\mathbb{Z}}$ であり, 各極の位数は k である.

実際, テータ関数の $\theta_p(z)=(z;p)_\infty(pz^{-1};p)_\infty$ という無限積表示から

$$\bullet\ E_1(z;p)=-D_z\log\theta_p(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{zp^n}{1-zp^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-1}p^{n+1}}{1-z^{-1}p^{n+1}}$$

を得る. これを z で繰り返し Euler 微分することで $E_k(z;p)$ $(k\geq 2)$ の極の現れ方もわかる.

また, テータ関数 $\theta_p(z)$ が $|p|<|z|<1$ において

$$\bullet\ \theta_p(z)=\exp\left[-\sum_{n\neq 0}\frac{1}{1-p^n}\cdot\frac{z^n}{n}\right]\quad (|p|<|z|<1)$$

と表せることから, Eisenstein 関数 $E_k(z;p)$ $(k\in\mathbb{Z}_{>0})$ はアニュラス $|p|<|z|<1$ において

$$\bullet\ E_k(z;p)=\sum_{n\neq0}\frac{n^{k-1}z^n}{1-p^n}\quad(|p|<|z|<1)$$

という具合にベキ展開される.

この先, 何度か使うことになるのであるが, Eisenstein 関数 $E_1(z;p)$, $E_2(z;p)$ の間には

$$\boxed{\bullet\ E_2(z;p)=E_1(z;p)^2+E_1(z;p)-2D_p\log\theta_p(z)-2D_p\log(p;p)_\infty}$$

なる関係がある. これを確かめるために, ここだけの記号として

$$\bullet\ \Theta_p(z):=(p;p)_\infty\theta_p(z)$$

とおく. これについては次の「Jacobi の三重積公式」と呼ばれる

$$\boxed{\bullet\ \Theta_p(z)=(p;p)_\infty(z;p)_\infty\left(pz^{-1};p\right)_\infty=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^nz^np^{\frac{n(n-1)}{2}}\quad\left(z\in\mathbb{C}^\times\right)}$$

が成り立ち, これによって, $\Theta_p(z)$ は次の「熱方程式」を満たすことがわかる :

$$\boxed{\bullet\ 2D_p\Theta_p(z)=\left(D_z{}^2-D_z\right)\Theta_p(z).}$$

実際, Jacobi の三重積公式を見つつ $\Theta_p(z)$ を微分してみると

$$\bullet\ 2D_p\Theta_p(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^nz^n\cdot n(n-1)p^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

$$\bullet\ \left(D_z{}^2-D_z\right)\Theta_p(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n\left(n^2-n\right)z^np^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

となり, 確かに $2D_p\Theta_p(z)=\left(D_z{}^2-D_z\right)\Theta_p(z)$ が成り立っている.

さて, Eisenstein 関数 $E_1(z;p)$ は $\Theta_p(z)$ を使って

$$\bullet\ E_1(z;p)=-D_z\log\Theta_p(z)=-\frac{D_z\Theta_p(z)}{\Theta_p(z)}$$

とも書けるので, これを更に z で Euler 微分すると次が成り立つ :

$$\begin{aligned}\bullet\ E_2(z;p)&=D_zE_1(z;p)=D_z\left\{-\frac{D_z\Theta_p(z)}{\Theta_p(z)}\right\}=\left\{\frac{D_z\Theta_p(z)}{\Theta_p(z)}\right\}^2-\frac{D_z{}^2\Theta_p(z)}{\Theta_p(z)}\\&=E_1(z;p)^2-\frac{D_z\Theta_p(z)+2D_p\Theta_p(z)}{\Theta_p(z)}=E_1(z;p)^2+E_1(z;p)-2D_p\log\Theta_p(z)\\&=E_1(z;p)^2+E_1(z;p)-2D_p\log\theta_p(z)-2D_p\log(p;p)_\infty.\end{aligned}$$

例 2.6. Eisenstein 関数 $E_1(z;p)$ からもデルタ関数が出てくる. すぐにわかるのは次のような導出であろう : 上に述べたことから

$$\bullet\ [E_1(z;p)]_{|p|<|z|<1}=\sum_{n\neq0}\frac{z^n}{1-p^n}\in\mathbb{C}[[z,z^{-1}]]$$

であるので, デルタ関数 $\delta(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n$ が現れるようにやると

$$\bullet\ [E_1(z;p)]_{|p|<|z|<1}=\sum_{n\neq 0}\frac{z^n}{1-p^n}=\sum_{n\neq 0}\frac{1-p^n+p^n}{1-p^n}z^n=\sum_{n\neq 0}z^n+\sum_{n\neq 0}\frac{(pz)^n}{1-p^n}$$
$$=\delta(z)-1+[E_1(pz;p)]_{|p|<|pz|<1}$$

となる. ここで $E_1(pz;p)=E_1(z;p)+1$ であったから

$$\bullet\ [E_1(z;p)]_{|p|<|z|<1}=\delta(z)-1+[E_1(z;p)+1]_{|p|<|pz|<1}=\delta(z)+[E_1(z;p)]_{1<|z|<|p|^{-1}}$$

となり, 最終的には次を得る：

$$\bullet\ [E_1(z;p)]_{|p|<|z|<1}-[E_1(z;p)]_{1<|z|<|p|^{-1}}=\delta(z).$$

次のようなやり方もある. Eisenstein 関数 $E_1(z;p)=-D_z\log\theta_p(z)=-\dfrac{D_z\theta_p(z)}{\theta_p(z)}$ の分子にある関数 $-D_z\theta_p(z)$ はアニュラス $|p|<|z|<|p|^{-1}$ において正則であることから, 命題 2.3 の (2) から

$$\bullet\ [E_1(z;p)]_{|p|<|z|<1}-[E_1(z;p)]_{1<|z|<|p|^{-1}}$$
$$=\left[-\frac{D_z\theta_p(z)}{\theta_p(z)}\right]_{|p|<|z|<1}-\left[-\frac{D_z\theta_p(z)}{\theta_p(z)}\right]_{1<|z|<|p|^{-1}}=-\frac{D_z\theta_p(z)}{(p;p)_\infty{}^2}\bigg|_{z=1}\delta(z)$$

が成り立つ. ここで $-D_z\theta_p(z)$ とは

$$\bullet\ -D_z\theta_p(z)=-D_z\left\{(1-z)(pz;p)_\infty\left(pz^{-1};p\right)_\infty\right\}$$
$$=z(pz;p)_\infty\left(pz^{-1};p\right)_\infty-(1-z)D_z\left\{(pz;p)_\infty\left(pz^{-1};p\right)_\infty\right\}$$

のことであるから, ここで $z=1$ とおくと

$$\bullet\ -D_z\theta_p(z)\Big|_{z=1}=(p;p)_\infty{}^2$$

がわかる. よって, 以上のようにすることでも

$$\bullet\ [E_1(z;p)]_{|p|<|z|<1}-[E_1(z;p)]_{1<|z|<|p|^{-1}}=\delta(z)$$

が成り立つことがわかる.

例 **2.7.** Eisenstein 関数 $E_2(z;p)$ についてはどうであろうか？先に見たように

$$\bullet\ [E_2(z;p)]_{|p|<|z|<1}=\sum_{n\neq 0}\frac{nz^n}{1-p^n}\in\mathbb{C}[[z,z^{-1}]]$$

であることから, 先の $E_1(z;p)$ についての計算と同様にできる：

$$\bullet\ [E_2(z;p)]_{|p|<|z|<1}=\sum_{n\neq 0}\frac{1-p^n+p^n}{1-p^n}nz^n=\sum_{n\neq 0}nz^n+\sum_{n\neq 0}\frac{n(pz)^n}{1-p^n}$$
$$=\sum_{n\neq 0}nz^n+[E_2(pz;p)]_{|p|<|pz|<1}$$
$$=D_z\delta(z)+[E_2(z;p)]_{1<|z|<|p|^{-1}}.$$

ここで $E_2(z;p)$ について $E_2(pz;p){=}E_2(z;p)$ であることを用いた．こうして次を得る：

- $[E_2(z;p)]_{|p|<|z|<1}-[E_2(z;p)]_{1<|z|<|p|^{-1}}=D_z\delta(z).$

次のようにしてもよい．Eisenstein 関数 $E_1(z;p){=}-D_z\log\theta_p(z)$ について

- $$\begin{aligned}E_1(z;p)&=-D_z\log\left\{(1-z)(pz;p)_\infty\left(pz^{-1};p\right)_\infty\right\}\\&=-D_z\log(1-z)-D_z\log\left\{(pz;p)_\infty\left(pz^{-1};p\right)_\infty\right\}\\&=\frac{z}{1-z}-D_z\log\left\{(pz;p)_\infty\left(pz^{-1};p\right)_\infty\right\}\\&=\frac{1}{1-z}-1-D_z\log\left\{(pz;p)_\infty\left(pz^{-1};p\right)_\infty\right\}\end{aligned}$$

であることから，$E_2(z;p){=}D_zE_1(z;p)$ について

- $E_2(z;p)=D_z\left(\dfrac{1}{1-z}\right)-{D_z}^2\log\left\{(pz;p)_\infty\left(pz^{-1};p\right)_\infty\right\}$

が成り立つ．ここにある関数 $-{D_z}^2\log\left\{(pz;p)_\infty\left(pz^{-1};p\right)_\infty\right\}$ はアニュラス $|p|{<}|z|{<}|p|^{-1}$ において正則であるので，次が成り立つことがわかる：

- $$\begin{aligned}&[E_2(z;p)]_{|p|<|z|<1}-[E_2(z;p)]_{1<|z|<|p|^{-1}}\\&=\left[D_z\left(\frac{1}{1-z}\right)-{D_z}^2\log\left\{(pz;p)_\infty\left(pz^{-1};p\right)_\infty\right\}\right]_{|p|<|z|<1}\\&\quad-\left[D_z\left(\frac{1}{1-z}\right)-{D_z}^2\log\left\{(pz;p)_\infty\left(pz^{-1};p\right)_\infty\right\}\right]_{1<|z|<|p|^{-1}}\\&=\left[D_z\left(\frac{1}{1-z}\right)\right]_{|p|<|z|<1}-\left[D_z\left(\frac{1}{1-z}\right)\right]_{1<|z|<|p|^{-1}}=D_z\delta(z).\end{aligned}$$

今回は結果のみを述べるが，Eisenstein 関数について次が成り立つことが知られている：

- $c_k(p){\in}\mathbb{C}$ $(k{\in}\mathbb{Z}_{>0})$ を

  - $c_k(p):=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^kp^n}{1-p^n}$

  とおくとき，Weierstrass の $\wp$-関数 $\wp(u;\tau)$ と Eisenstein 関数 $E_2(z;p)$ の間には次の関係がある：τ を $\mathrm{Im}(\tau){>}0$ なる複素数とするとき

  - $\dfrac{1}{(2\pi i)^2}\wp(u;\tau)=E_2\left(e^{2\pi iu};e^{2\pi i\tau}\right)+\dfrac{1}{12}-2c_1\left(e^{2\pi i\tau}\right).$

- Eisenstein 関数 $E_2(z;p)$, $E_3(z;p){=}D_zE_2(z;p)$ について次が成り立つ：

  - $$\begin{aligned}&E_3(z;p)^2-4E_2(z;p)^3+\{24c_1(p)-1\}E_2(z;p)^2+24\{D_pc_1(p)\}E_2(z;p)\\&=\frac{10}{3}D_pc_3(p)+\frac{2}{3}D_pc_1(p)-8D_p\left\{c_1(p)^2\right\}-8{D_p}^2c_1(p).\end{aligned}$$

3 具体例

これまで見てきたことから「テータ関数からデルタ関数が出てくる」ということはわかったが, それでは, これには何かうまい使い道があるのであろうか？ここでは,「テータ関数とデルタ関数の関係」が楕円関数のベキ展開や恒等式を得るのをある程度簡単にしてくれる様子を紹介する.

3.1 テータ関数の積で書かれる関数のベキ展開, 分解

例 3.1. $a\in\mathbb{C}^\times\backslash p^{\mathbb{Z}}$ なる複素数 a をとり, $\mathbb{C}^\times$ 上の有理型関数 $f(z)$ を

$$\bullet\ f(z):=\frac{\theta_p(az)}{\theta_p(z)}$$

と定める (上で「$a\in\mathbb{C}^\times\backslash p^{\mathbb{Z}}$」としているのは, $a\in p^{\mathbb{Z}}$ の場合には, $f(z)$ は単なる z のベキ関数になってしまうからである). この $f(z)$ はアニュラス $|p|<|z|<1$ 及び $1<|z|<|p|^{-1}$ で正則であり, 分子にある $\theta_p(az)$ はアニュラス $|p|<|z|<|p|^{-1}$ で正則であることに注意すると, 命題 2.3 の (2) から

$$\bullet\ [f(z)]_{|p|<|z|<1}-[f(z)]_{1<|z|<|p|^{-1}}$$
$$=\left[\frac{\theta_p(az)}{\theta_p(z)}\right]_{|p|<|z|<1}-\left[\frac{\theta_p(az)}{\theta_p(z)}\right]_{1<|z|<|p|^{-1}}=\frac{\theta_p(a)}{{(p;p)_\infty}^2}\delta(z)$$

であることはわかる. そこで

$$\bullet\ \widetilde{f}(z):=[f(z)]_{|p|<|z|<1}=\left[\frac{\theta_p(az)}{\theta_p(z)}\right]_{|p|<|z|<1}\in\mathbb{C}[[z,z^{-1}]]$$

と書くと, テータ関数の性質である $\theta_p(pz)=\theta_p\left(z^{-1}\right)=-z^{-1}\theta_p(z)$ から

$$\bullet\ \left[\frac{\theta_p(az)}{\theta_p(z)}\right]_{1<|z|<|p|^{-1}}=\left[a\frac{\theta_p\left(a^{-1}z^{-1}\right)}{\theta_p(z^{-1})}\right]_{1<|z|<|p|^{-1}}=a\left[\frac{\theta_p(paz)}{\theta_p(pz)}\right]_{1<|z|<|p|^{-1}}$$
$$=a\left[\frac{\theta_p(paz)}{\theta_p(pz)}\right]_{|p|<|pz|<1}=a\widetilde{f}(pz)$$

なので, $\widetilde{f}(z)\in\mathbb{C}[[z,z^{-1}]]$ について

$$\bullet\ \widetilde{f}(z)-a\widetilde{f}(pz)=\frac{\theta_p(a)}{{(p;p)_\infty}^2}\delta(z)$$

が成り立つ. ここで $\widetilde{f}(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_kz^k$ なる展開を仮定すると, 係数 c_k $(k\in\mathbb{Z})$ は

$$\bullet\ c_k-ap^kc_k=\frac{\theta_p(a)}{{(p;p)_\infty}^2}\Leftrightarrow c_k=\frac{\theta_p(a)}{{(p;p)_\infty}^2}\cdot\frac{1}{1-ap^k}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

と求められる ($a\notin p^{\mathbb{Z}}$ なので $1-ap^k\neq0$ $(k\in\mathbb{Z})$ である). 以上によって

$$\bullet\ \widetilde{f}(z)=\left[\frac{\theta_p(az)}{\theta_p(z)}\right]_{|p|<|z|<1}=\frac{\theta_p(a)}{{(p;p)_\infty}^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{z^k}{1-ap^k}\in\mathbb{C}[[z,z^{-1}]]$$

がわかったが, これは

$$\bullet\ \frac{\theta_p(az)}{\theta_p(z)}=\frac{\theta_p(a)}{(p;p)_\infty{}^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{z^k}{1-ap^k}\quad(|p|<|z|<1)$$

という風な有理型関数の展開と理解するのが普通であると思う.

例 3.2. テータ関数の積の比で書かれた関数の分解について, 一般的な結果を先に述べておく. 複素数たち $a_1,\dots,a_N\in\mathbb{C}^\times$ 及び $b_1,\dots,b_N\in\mathbb{C}^\times$ は $a_i/a_j\notin p^{\mathbb{Z}}$ $(1\le i\ne j\le N)$, $a_i/b_j\notin p^{\mathbb{Z}}$ $(1\le i,j\le N)$ を満たすとする (「$a_i/b_j\notin p^{\mathbb{Z}}$ $(1\le i,j\le N)$」としているのは, こういった a_i/b_j $(1\le i,j\le N)$ という格好の元を Eisenstein 関数に代入できるようにしたいからである). 更に, $a_1,\dots,a_N$ と楕円モジュラス p は

$$\bullet\ |p|<\frac{\min\{|a_1|^{-1},\dots,|a_N|^{-1}\}}{\max\{|a_1|^{-1},\dots,|a_N|^{-1}\}}$$

を満たすように選ばれていると仮定する (「テータ関数とデルタ関数の関係」が使えるための条件である. 最後にはこの条件は外せる). このとき, 20 ページで述べたことから, 任意の $k\in\mathbb{Z}$ について

$$\bullet\ \left\{z\in\mathbb{C}^\times\ \middle|\ \begin{array}{c}|p|^{k+1}<|a_iz|<|p|^k\\(1\le i\le N)\end{array}\right\}\neq\emptyset$$

である. こういった状況の下で, $\mathbb{C}^\times$ 上の有理型関数 $f(z)$ を

$$\bullet\ f(z):=\prod_{i=1}^N\frac{\theta_p(b_iz)}{\theta_p(a_iz)}$$

によって定めると, まず命題 2.4 によって次が成り立つ：

$$\bullet\ [f(z)]_{\substack{|p|<|a_iz|<1\\(1\le i\le N)}}-[f(z)]_{\substack{1<|a_iz|<|p|^{-1}\\(1\le i\le N)}}=\sum_{i=1}^N\frac{\prod_{j=1}^N\theta_p(b_j/a_i)}{(p;p)_\infty{}^2\prod_{j\ne i}\theta_k(a_j/a_i)}\delta(a_iz).$$

ここで

$$\bullet\ \widetilde{f}(z):=[f(z)]_{\substack{|p|<|a_iz|<1\\(1\le i\le N)}}\in\mathbb{C}[[z,z^{-1}]],\quad\bullet\ c:=\frac{b_1\cdots b_N}{a_1\cdots a_N}$$

とおくと

$$\bullet\ [f(z)]_{\substack{1<|a_iz|<|p|^{-1}\\(1\le i\le N)}}=\frac{b_1\cdots b_N}{a_1\cdots a_N}\left[\prod_{i=1}^N\frac{\theta_p(pb_iz)}{\theta_p(pa_iz)}\right]_{\substack{|p|<|pa_iz|<1\\(1\le i\le N)}}=c\widetilde{f}(pz)$$

であることから

$$\bullet\ \widetilde{f}(z)-c\widetilde{f}(pz)=\sum_{i=1}^N\frac{\prod_{j=1}^N\theta_p(b_j/a_i)}{(p;p)_\infty{}^2\prod_{j\ne i}\theta_p(a_j/a_i)}\delta(a_iz)$$

がわかる．ここで c が $p^{\mathbb{Z}}$ に属するか否かで場合分けが生じる：

(i) $c\notin p^{\mathbb{Z}}$ の場合．$\widetilde{f}(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k z^k$ なる展開を仮定すると, 係数 c_k について

$$\bullet\ c_k-cp^k c_k=\sum_{i=1}^{N}\frac{\prod_{j=1}^{N}\theta_p(b_j/a_i)}{(p;p)_\infty{}^2\prod_{j\neq i}\theta_p(a_j/a_i)}a_i{}^k \Leftrightarrow c_k=\sum_{i=1}^{N}\frac{\prod_{j=1}^{N}\theta_p(b_j/a_i)}{(p;p)_\infty{}^2\prod_{j\neq i}\theta_p(a_j/a_i)}\cdot\frac{a_i{}^k}{1-cp^k}$$

がわかる．これより

$$\bullet\ \widetilde{f}(z)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\prod_{j=1}^{N}\theta_p(b_j/a_i)}{(p;p)_\infty{}^2\prod_{j\neq i}\theta_p(a_j/a_i)}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(a_i z)^k}{1-cp^k}$$

であるが, 例 3.1 で見た $\dfrac{\theta_p(az)}{\theta_p(z)}=\dfrac{\theta_p(a)}{(p;p)_\infty{}^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\dfrac{z^k}{1-ap^k}$ $(|p|<|z|<1)$ から次が成り立つ：

$$\bullet\ \prod_{i=1}^{N}\frac{\theta_p(b_i z)}{\theta_p(a_i z)}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\prod_{j=1}^{N}\theta_p(b_j/a_i)}{\theta_p(c)\prod_{j\neq i}\theta_p(a_j/a_i)}\cdot\frac{\theta_p(ca_i z)}{\theta_p(a_i z)}\quad\begin{pmatrix}|p|<|a_i z|<1\\(1\leq i\leq N)\end{pmatrix}.$$

これ自体はもちろん正しいのであるが, テータ関数の擬周期性と正則関数の性質によって条件「$|p|<|a_i z|<1\ (1\leq i\leq N)$」を外すことができるので (今後はこういった文言は省略する), 結局は次の $\mathbb{C}^\times$ 上の有理型関数の恒等式を得る：$c\notin p^{\mathbb{Z}}$ の場合,

$$\boxed{\bullet\ \prod_{i=1}^{N}\frac{\theta_p(b_i z)}{\theta_p(a_i z)}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\prod_{j=1}^{N}\theta_p(b_j/a_i)}{\theta_p(c)\prod_{j\neq i}\theta_p(a_j/a_i)}\cdot\frac{\theta_p(ca_i z)}{\theta_p(a_i z)}.}$$

ここまで来れば, 冒頭で仮定した $|p|<\dfrac{\min\{|a_1|^{-1},\ldots,|a_N|^{-1}\}}{\max\{|a_1|^{-1},\ldots,|a_N|^{-1}\}}$ は外せる (上の恒等式においては, 楕円モジュラス p は $|p|<1$ を満たしていれば何でもよいので).

(ii) $c\in p^{\mathbb{Z}}$ の場合．ある $k_0\in\mathbb{Z}$ があって $c=p^{k_0}$ であったとすると

$$\bullet\ \widetilde{f}(z)-p^{k_0}\widetilde{f}(pz)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\prod_{j=1}^{N}\theta_p(b_j/a_i)}{(p;p)_\infty{}^2\prod_{j\neq i}\theta_p(a_j/a_i)}\delta(a_i z)$$

であるが, ここで $\widetilde{F}(z):=z^{k_0}\widetilde{f}(z)\in\mathbb{C}[[z,z^{-1}]]$ とおくと

$$\bullet\ \widetilde{F}(z)-\widetilde{F}(pz)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{N}\theta_p(b_j/a_i)}{(p;p)_\infty{}^2\displaystyle\prod_{j\neq i}\theta_p(a_j/a_i)}a_i{}^{-k_0}\delta(a_iz)$$

が成り立つことがわかる．$\widetilde{F}(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}C_kz^k$ なる展開を仮定すると, C_0 を除く係数が

$$\bullet\ \left(1-p^k\right)C_k=\sum_{i=1}^{N}\frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{N}\theta_p(b_j/a_i)}{(p;p)_\infty{}^2\displaystyle\prod_{j\neq i}\theta_p(a_j/a_i)}a_i{}^{-k_0+k}\Leftrightarrow C_k=\sum_{i=1}^{N}\frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{N}\theta_p(b_j/a_i)}{(p;p)_\infty{}^2\displaystyle\prod_{j\neq i}\theta_p(a_j/a_i)}\cdot\frac{a_i{}^{-k_0+k}}{1-p^k}$$

と求まる (C_0 は最後に決める)．これより

$$\bullet\ \widetilde{F}(z)=C_0+\sum_{i=1}^{N}\frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{N}\theta_p(b_j/a_i)}{(p;p)_\infty{}^2\displaystyle\prod_{j\neq i}\theta_p(a_j/a_i)}a_i{}^{-k_0}\sum_{k\neq 0}\frac{(a_iz)^k}{1-p^k}$$

であるが, $E_1(z;p)=\sum_{k\neq 0}\dfrac{z^k}{1-p^k}$ $(|p|<|z|<1)$ であることから次の恒等式が得られる：

$$\bullet\ z^{k_0}\prod_{i=1}^{N}\frac{\theta_p(b_iz)}{\theta_p(a_iz)}=C_0+\sum_{i=1}^{N}\frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{N}\theta_p(b_j/a_i)}{(p;p)_\infty{}^2\displaystyle\prod_{j\neq i}\theta_p(a_j/a_i)}a_i{}^{-k_0}E_1(a_iz;p).$$

この時点で条件 $|p|<\dfrac{\min\{|a_1|^{-1},\ldots,|a_N|^{-1}\}}{\max\{|a_1|^{-1},\ldots,|a_N|^{-1}\}}$ は外せる．

あとは C_0 を決めればよいが, 例えば $z=b_1{}^{-1}$ とおくときに両辺が釣り合うように決めればよい．そうすると, 最終的に次の恒等式が得られる：$c=p^{k_0}$ の場合,

$$\boxed{\bullet\ z^{k_0}\prod_{i=1}^{N}\frac{\theta_p(b_iz)}{\theta_p(a_iz)}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{N}\theta_p(b_j/a_i)}{(p;p)_\infty{}^2\displaystyle\prod_{j\neq i}\theta_p(a_j/a_i)}a_i{}^{-k_0}\left\{E_1(a_iz;p)-E_1\left(\frac{a_i}{b_1};p\right)\right\}.}$$

上の恒等式の両辺を $F(z)$ とおくと, $F(z)$ が楕円関数であることは左辺を見れば明らかである ($F(pz)=F(z)$ が成り立つということ)．一方で, 右辺の表示において $z\mapsto pz$ と p-シフトすると

$$\bullet\ F(pz)=F(z)+\sum_{i=1}^{N}\frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{N}\theta_p(b_j/a_i)}{(p;p)_\infty{}^2\displaystyle\prod_{j\neq i}\theta_p(a_j/a_i)}a_i{}^{-k_0}$$

となる．$F(z)$ は楕円関数であるので, 次が成り立つはずである：$c=p^{k_0}$ ならば

$$\bullet\ \sum_{i=1}^{N}\frac{\prod_{j=1}^{N}\theta_p(b_j/a_i)}{(p;p)_\infty{}^2\prod_{j\neq i}\theta_p(a_j/a_i)}a_i{}^{-k_0}=0.$$

ただ, これはあまり明らかなことではないであろう. これについては例 3.7 で解説する.

先に紹介した

$$\bullet\ \prod_{i=1}^{N}\frac{\theta_p(b_iz)}{\theta_p(a_iz)}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\prod_{j=1}^{N}\theta_p(b_j/a_i)}{\theta_p(c)\prod_{j\neq i}\theta_p(a_j/a_i)}\cdot\frac{\theta_p(ca_iz)}{\theta_p(a_iz)}$$

であるが, これは次の形で「楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示」において使われる. 上の式において, $\mathbb{C}^\times$ の元 $x_1,\ldots,x_N$ 及び t によって $a_i\to tx_i$, $b_i\to x_i$ なる置き換えを行う. こうするとき $c\to t^{-N}$ である. 元々の $a_1,\ldots,a_N$, $b_1,\ldots,b_N$ 及び $c=b_1\cdots b_N/a_1\cdots a_N$ に対する仮定から, これら $x_1,\ldots,x_N$ 及び t は条件 $x_i/x_j\notin p^{\mathbb{Z}}$ $(1\le i\neq j\le N)$, $tx_i/x_j\notin p^{\mathbb{Z}}$ $(1\le i\neq j\le N)$, $t\notin p^{\mathbb{Z}}$ 及び $t^{-N}\notin p^{\mathbb{Z}}$ を満たすとする. 更に $z\to z^{-1}$ と置き換えることで

$$\begin{aligned}\bullet\ \prod_{i=1}^{N}\frac{\theta_p(x_i/z)}{\theta_p(tx_i/z)}&=\sum_{i=1}^{N}\frac{\prod_{j=1}^{N}\theta_p(x_j/tx_i)}{\theta_p\left(t^{-N}\right)\prod_{j\neq i}\theta_p(x_j/x_i)}\cdot\frac{\theta_p\left(t^{-N+1}x_i/z\right)}{\theta_p(tx_i/z)}\\&=\frac{\theta_p(t)}{\theta_p(t^N)}\sum_{i=1}^{N}\prod_{j\neq i}\frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)}\cdot\frac{\theta_p\left(t^{-N+1}x_i/z\right)}{\theta_p(tx_i/z)}\end{aligned}$$

を得る. 実は, これに至る一歩手前のデルタ関数を含む

$$\begin{aligned}&\bullet\ \left[\prod_{i=1}^{N}\frac{\theta_p(x_i/z)}{\theta_p(tx_i/z)}\right]_{\substack{|p|<|tx_i/z|<1\\(1\le i\le N)}}-\left[\prod_{i=1}^{N}\frac{\theta_p(x_i/z)}{\theta_p(tx_i/z)}\right]_{\substack{1<|tx_i/z|<|p|^{-1}\\(1\le i\le N)}}\\&=\frac{t^{-N+1}\theta_p\left(t^{-1}\right)}{(p;p)_\infty{}^2}\sum_{i=1}^{N}\prod_{j\neq i}\frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)}\delta\left(t\frac{x_i}{z}\right)\end{aligned}$$

も有用である (これは $|p|<\dfrac{\min\{|x_1|,\ldots,|x_N|\}}{\max\{|x_1|,\ldots,|x_N|\}}$ が満たされる場合にのみ成り立つことに注意).

q-シフト作用素を $T_{q,z}f(z)=f(qz)$ なる記号によって表すとき, 楕円 Ruijsenaars 作用素というのは,「楕円 Ruijsenaars 系」と呼ばれる量子多体系の Hamiltonian から得られる

$$\bullet\ D_N^{(1)}(p):=\sum_{i=1}^{N}\prod_{j\neq i}\frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)}T_{q,x_i}$$

なる q-差分作用素のことである. これには高階版があって, $1\le r\le N$ なる自然数 r に対し

$$\bullet\ D_N^{(r)}(p):=t^{\frac{r(r-1)}{2}}\sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,N\}\\\#I=r}}\prod_{\substack{i\in I\\j\notin I}}\frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)}\prod_{i\in I}T_{q,x_i}$$

と定められる. これらはボソンの作用素を適当に用意することでも実現できるのであるが, その際には上に述べたような恒等式が重要な働きをする. こういった話題については

- 齋藤 洋介「楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示：再訪」(準備中)

において述べる予定である.

例 3.3. 複素数 $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}^\times$ について $a_1/a_2 \notin p^{\mathbb{Z}}$, $a_i/b_j \notin p^{\mathbb{Z}}$ $(i,j=1,2)$ であるとする. $\mathbb{C}^\times$ 上の有理型関数である

$$\bullet\ \frac{\theta_p(b_1z)\theta_p(b_2z)}{\theta_p(a_1z)\theta_p(a_2z)}$$

を「テータ関数とデルタ関数の関係」を使って和に分解することを考える. 例 3.2 と同様に $c:=b_1b_2/a_1a_2$ とおくとき, $c\in p^{\mathbb{Z}}$ であるか否かに応じて次の 2 通りの場合分けが生じる：

(i) $c\notin p^{\mathbb{Z}}$ の場合. この場合には

$$\bullet\ \frac{\theta_p(b_1z)\theta_p(b_2z)}{\theta_p(a_1z)\theta_p(a_2z)}=\frac{\theta_p(b_1/a_1)\theta_p(b_2/a_1)}{\theta_p(a_2/a_1)\theta_p(c)}\cdot\frac{\theta_p(ca_1z)}{\theta_p(a_1z)}+\frac{\theta_p(b_1/a_2)\theta_p(b_2/a_2)}{\theta_p(a_1/a_2)\theta_p(c)}\cdot\frac{\theta_p(ca_2z)}{\theta_p(a_2z)}.$$

(ii) $c\in p^{\mathbb{Z}}$ の場合. ある $k_0\in\mathbb{Z}$ があって $c=p^{k_0}$ であったとすると

$$\begin{aligned}\bullet\ z^{k_0}\frac{\theta_p(b_1z)\theta_p(b_2z)}{\theta_p(a_1z)\theta_p(a_2z)}&=\frac{\theta_p(b_1/a_1)\theta_p(b_2/a_1)}{(p;p)_\infty{}^2\theta_p(a_2/a_1)}a_1{}^{-k_0}\left\{E_1(a_1z;p)-E_1\left(\frac{a_1}{b_1};p\right)\right\}\\&\quad+\frac{\theta_p(b_1/a_2)\theta_p(b_2/a_2)}{(p;p)_\infty{}^2\theta_p(a_1/a_2)}a_2{}^{-k_0}\left\{E_1(a_2z;p)-E_1\left(\frac{a_2}{b_1};p\right)\right\}.\end{aligned}$$

以上の結果には a_1, a_2 及び b_1, b_2 という 4 つの複素数が含まれているが, 特に (ii) の場合には次のようにできる. $a, b\in\mathbb{C}^\times\backslash p^{\mathbb{Z}}$ を $ab\notin p^{\mathbb{Z}}$ なる複素数とし, 上に述べた (ii) の場合で特に $k_0=0$ のもので $b_1\to a$, $b_2\to b$ 及び $a_1\to 1$, $a_2\to ab$ なる置き換えをしたものは

$$\begin{aligned}\bullet\ \frac{\theta_p(az)\theta_p(bz)}{\theta_p(z)\theta_p(abz)}&=\frac{\theta_p(a)\theta_p(b)}{(p;p)_\infty{}^2\theta_p(ab)}\left\{E_1(z;p)-E_1\left(a^{-1};p\right)\right\}\\&\quad+\frac{\theta_p\left(a^{-1}\right)\theta_p\left(b^{-1}\right)}{(p;p)_\infty{}^2\theta_p(a^{-1}b^{-1})}\{E_1(abz;p)-E_1(b;p)\}\\&=\frac{\theta_p(a)\theta_p(b)}{(p;p)_\infty{}^2\theta_p(ab)}\left\{E_1(z;p)-E_1(abz;p)-E_1\left(a^{-1};p\right)+E_1(b;p)\right\}\end{aligned}$$

である (上に述べた (ii) で特に $k_0=0$ の場合をカバーする式としての一般性を保持しつつ, 式が多少見やすくなった). ここで更に極限 $b\to a^{-1}$ をとるとき, Eisenstein 関数 $E_2(z;p)=D_zE_1(z;p)$ が

$$\bullet\ \lim_{b\to a^{-1}}\frac{E_1(abz;p)-E_1(z;p)}{ab-1}=z\lim_{b\to a^{-1}}\frac{E_1(abz;p)-E_1(z;p)}{abz-z}=E_2(z;p),$$

$$\bullet\ \lim_{b\to a^{-1}}\frac{E_1\left(a^{-1};p\right)-E_1(b;p)}{ab-1}=-E_2\left(a^{-1};p\right)=-E_2(a;p)$$

として現れるので, 次が成り立つことがわかる：

$$\bullet\ \frac{\theta_p(az)\theta_p\left(a^{-1}z\right)}{\theta_p(z)^2}=\frac{\theta_p(a)\theta_p\left(a^{-1}\right)}{(p;p)_\infty{}^4}\{E_2(z;p)-E_2(a;p)\}.$$

楕円関数の文献にてよく見かける恒等式とは多少格好が違うかもしれないが, これはいわゆる「Weierstrass の $\wp$-関数とテータ関数の関係」に対応するものである. また, 上で得た

- $\dfrac{\theta_p(az)\theta_p(bz)}{\theta_p(z)\theta_p(abz)}=\dfrac{\theta_p(a)\theta_p(b)}{(p;p)_\infty{}^2\theta_p(ab)}\left\{E_1(z;p)-E_1(abz;p)-E_1\left(a^{-1};p\right)+E_1(b;p)\right\}$

において $z\to a^{-1}z$ とすると

- $\dfrac{\theta_p(z)\theta_p\left(a^{-1}bz\right)}{\theta_p(a^{-1}z)\theta_p(bz)}=\dfrac{\theta_p(a)\theta_p(b)}{(p;p)_\infty{}^2\theta_p(ab)}\left\{E_1\left(a^{-1}z;p\right)-E_1(bz;p)-E_1\left(a^{-1};p\right)+E_1(b;p)\right\}$

であるが, ここで $b=a$ とすると次が得られる：

- $\dfrac{\theta_p(z)^2}{\theta_p(az)\theta_p(a^{-1}z)}=\dfrac{\theta_p(a)^2}{(p;p)_\infty{}^2\theta_p(a^2)}\left\{E_1\left(a^{-1}z;p\right)-E_1(az;p)-E_1\left(a^{-1};p\right)+E_1(a;p)\right\}.$

例 3.4. 先の例 3.3 の中で見た

- $\dfrac{\theta_p(az)\theta_p\left(a^{-1}z\right)}{\theta_p(z)^2}=\dfrac{\theta_p(a)\theta_p\left(a^{-1}\right)}{(p;p)_\infty{}^4}\{E_2(z;p)-E_2(a;p)\}.$

を命題 2.5 の (2) を使って導いてみる. まず $f(z):=\theta_p(az)\theta_p\left(a^{-1}z\right)$ 及び

- $g(z):=\dfrac{f(z)}{\left\{(pz;p)_\infty(pz^{-1};p)_\infty\right\}^2}$

とおくと, 命題 2.5 の (2) によって次が成り立つ：

- $\left[\dfrac{f(z)}{\theta_p(z)^2}\right]_{|p|<|z|<1}-\left[\dfrac{f(z)}{\theta_p(z)^2}\right]_{1<|z|<|p|^{-1}}=\displaystyle\sum_{k=0}^{1}\frac{(-1)^k g^{(k)}(1)}{k!(1-k)!}\partial_z{}^{1-k}\delta(z).$

先にやったのと同様に

- $\widetilde{F}(z):=\left[\dfrac{f(z)}{\theta_p(z)^2}\right]_{|p|<|z|<1}\in\mathbb{C}[[z,z^{-1}]]$

とおくと

- $\left[\dfrac{f(z)}{\theta_p(z)^2}\right]_{1<|z|<|p|^{-1}}=\left[\dfrac{f(pz)}{\theta_p(pz)^2}\right]_{|p|<|pz|<1}=\widetilde{F}(pz)$

である. よって

- $\widetilde{F}(z)-\widetilde{F}(pz)=\displaystyle\sum_{k=0}^{1}\frac{(-1)^k g^{(k)}(1)}{k!(1-k)!}\partial_z{}^{1-k}\delta(z)=g(1)\partial_z\delta(z)-g^{(1)}(1)\delta(z)$

なので, あとは $g(1)$, $g^{(1)}(1)$ が求められればよい. $g(1)=\dfrac{\theta_p(a)\theta_p\left(a^{-1}\right)}{(p;p)_\infty{}^4}$ は何の困難もなくわかる. 一方の $g^{(1)}(1)$ は

- $g^{(1)}(z)=\dfrac{f^{(1)}(z)}{\left\{(pz;p)_\infty(pz^{-1};p)_\infty\right\}^2}-2f(z)\dfrac{\partial_z\left\{(pz;p)_\infty\left(pz^{-1};p\right)_\infty\right\}}{\left\{(pz;p)_\infty(pz^{-1};p)_\infty\right\}^3}$

を見ねばならず, 多少面倒に思うかもしれない. 実際は, 次が成り立つことから計算はそれほど難しくはならない：

- $\mathbb{C}^\times$ で正則な関数 $A(z)$ で $A(z^{-1}){=}A(z)$ $(z{\in}\mathbb{C}^\times)$ を満たすものについて

$$\bullet\ \partial_z A(z)\Big|_{z=1}{=}0.$$

この事実によって $\partial_z\{(pz;p)_\infty(pz^{-1};p)_\infty\}\Big|_{z=1}{=}0$ であるので

$$\bullet\ g^{(1)}(1){=}\frac{f^{(1)}(1)}{(p;p)_\infty{}^4}$$

である．あとは $f^{(1)}(1)$ がわかればよい．そこで次のようにする：$f(z)$ を

$$\bullet\ f(z){=}\theta_p(az)\theta_p(a^{-1}z){=}{-}a^{-1}z\theta_p(az)\theta_p(az^{-1})$$

と変形しておけば, 上に述べた事実から

$$\bullet\ f^{(1)}(1){=}\partial_z f(z)\Big|_{z=1}{=}{-}a^{-1}\theta_p(az)\theta_p(az^{-1})\Big|_{z=1}{-}a^{-1}z\partial_z\{\theta_p(az)\theta_p(az^{-1})\}\Big|_{z=1}$$
$$={-}a^{-1}\theta_p(a)^2{=}\theta_p(a)\theta_p(a^{-1})$$

がわかる．こうして $g^{(1)}(1){=}\dfrac{\theta_p(a)\theta_p(a^{-1})}{(p;p)_\infty{}^4}$ がわかったので

$$\bullet\ \widetilde{F}(z){-}\widetilde{F}(pz){=}g(1)\partial_z\delta(z){-}g^{(1)}(1)\delta(z){=}\frac{\theta_p(a)\theta_p(a^{-1})}{(p;p)_\infty{}^4}\{\partial_z\delta(z){-}\delta(z)\}$$

となる．ここで $\partial_z\delta(z)$ を見ると

$$\bullet\ \partial_z\delta(z){=}\sum_{k\in\mathbb{Z}}kz^{k-1}\xlongequal{k\to k+1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(k{+}1)z^k{=}D_z\delta(z){+}\delta(z)$$

であるので, 結局次が成り立つ：

$$\bullet\ \widetilde{F}(z){-}\widetilde{F}(pz){=}\frac{\theta_p(a)\theta_p(a^{-1})}{(p;p)_\infty{}^4}D_z\delta(z){=}\frac{\theta_p(a)\theta_p(a^{-1})}{(p;p)_\infty{}^4}\sum_{k\in\mathbb{Z}}kz^k.$$

$\widetilde{F}(z){=}\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_kz^k$ なる展開を仮定すると, c_0 以外の係数が

$$\bullet\ c_k{-}p^kc_k{=}\frac{\theta_p(a)\theta_p(a^{-1})}{(p;p)_\infty{}^4}k\Leftrightarrow c_k{=}\frac{\theta_p(a)\theta_p(a^{-1})}{(p;p)_\infty{}^4}\cdot\frac{k}{1{-}p^k}\quad(k{\in}\mathbb{Z}\backslash\{0\})$$

と求められる．こうして

$$\bullet\ \widetilde{F}(z){=}c_0{+}\frac{\theta_p(a)\theta_p(a^{-1})}{(p;p)_\infty{}^4}\sum_{k\neq0}\frac{kz^k}{1{-}p^k}$$

であるが, Eisenstein 関数 $E_2(z;p)$ について $E_2(z;p){=}\displaystyle\sum_{k\neq0}\frac{kz^k}{1{-}p^k}$ $(|p|{<}|z|{<}1)$ であることから, 次の $\mathbb{C}^\times$ 上の有理型関数の恒等式が得られる：

$$\bullet\ \frac{\theta_p(az)\theta_p(a^{-1}z)}{\theta_p(z)^2}{=}c_0{+}\frac{\theta_p(a)\theta_p(a^{-1})}{(p;p)_\infty{}^4}E_2(z;p).$$

残った c_0 を $z{=}a$ とおくときに両辺が釣り合うように決めると

$$\bullet\ \frac{\theta_p(az)\theta_p\big(a^{-1}z\big)}{\theta_p(z)^2}{=}\frac{\theta_p(a)\theta_p\big(a^{-1}\big)}{(p;p)_\infty{}^4}\{E_2(z;p){-}E_2(a;p)\}$$

を得る. これは先の例 3.3 で見たものと同一である.

例 3.5 (**テータ関数の Riemann relation**)**.** 「テータ関数の Riemann relation」と呼ばれる恒等式があり, これは次のようにして導ける. 先の例 3.3 の (i) の場合である

$$\bullet\ \frac{\theta_p(b_1z)\theta_p(b_2z)}{\theta_p(a_1z)\theta_p(a_2z)}{=}\frac{\theta_p(b_1/a_1)\theta_p(b_2/a_1)}{\theta_p(a_2/a_1)\theta_p(c)}\cdot\frac{\theta_p(ca_1z)}{\theta_p(a_1z)}{+}\frac{\theta_p(b_1/a_2)\theta_p(b_2/a_2)}{\theta_p(a_1/a_2)\theta_p(c)}\cdot\frac{\theta_p(ca_2z)}{\theta_p(a_2z)}$$

の分母を払うと

$$\begin{aligned}&\bullet\ \theta_p(b_1z)\theta_p(b_2z)\theta_p(a_2/a_1)\theta_p(c)\\&{=}\theta_p(b_1/a_1)\theta_p(b_2/a_1)\theta_p(ca_1z)\theta_p(a_2z){-}\frac{a_2}{a_1}\theta_p(b_1/a_2)\theta_p(b_2/a_2)\theta_p(ca_2z)\theta_p(a_1z)\end{aligned}$$

である. これを

$$\begin{aligned}&\bullet\ \theta_p(b_1z)\theta_p(b_2z)\theta_p(a_2/a_1)\theta_p(c){-}\theta_p(ca_1z)\theta_p(a_2z)\theta_p(b_1/a_1)\theta_p(b_2/a_1)\\&{=}{-}\frac{a_2}{a_1}\theta_p(ca_2z)\theta_p(a_1z)\theta_p(b_1/a_2)\theta_p(b_2/a_2)\end{aligned}$$

と書き換えおいて, 次のようなことを考える. 若干唐突ではあるが, X, Y, Z, $W{\in}\mathbb{C}^\times$ で

$$\bullet\ XZ{=}b_1z,\quad \bullet\ X/Z{=}b_2z,\quad \bullet\ YW{=}a_2/a_1,\quad \bullet\ Y/W{=}c{=}b_1b_2/a_1a_2$$

を満たすものをとる. 例えば

$$\bullet\ X{=}(b_1b_2)^{1/2}z,\quad \bullet\ Y{=}(b_1b_2)^{1/2}/a_1,\quad \bullet\ Z{=}(b_1/b_2)^{1/2},\quad \bullet\ W{=}a_2/(b_1b_2)^{1/2}$$

などとすればよい. こうするとき,

$$\begin{aligned}&\bullet\ XW{=}a_2z,\quad \bullet\ X/W{=}b_1b_2z/a_2{=}ca_1z,\quad \bullet\ YZ{=}b_1/a_1,\quad \bullet\ Y/Z{=}b_2/a_1,\\&\bullet\ XY{=}b_1b_2z/a_1{=}ca_2z,\quad \bullet\ X/Y{=}a_1z,\quad \bullet\ ZW{=}a_2/b_2,\quad \bullet\ Z/W{=}b_1/a_2\end{aligned}$$

であることがわかるので, 上に書いた恒等式は X, Y, Z, W によって

$$\begin{aligned}&\bullet\ \theta_p(XZ)\theta_p(X/Z)\theta_p(YW)\theta_p(Y/W){-}\theta_p(X/W)\theta_p(XW)\theta_p(YZ)\theta_p(Y/Z)\\&{=}{-}YW\theta_p(XY)\theta_p(X/Y)\theta_p(Z/W)\theta_p(1/ZW)\end{aligned}$$

と書かれる. これは整理すると次のようになる：

$$\boxed{\begin{aligned}&\bullet\ \theta_p(XZ)\theta_p(X/Z)\theta_p(YW)\theta_p(Y/W){-}\theta_p(XW)\theta_p(X/W)\theta_p(YZ)\theta_p(Y/Z)\\&{=}\frac{Y}{Z}\theta_p(XY)\theta_p(X/Y)\theta_p(ZW)\theta_p(Z/W).\end{aligned}}$$

これは「テータ関数の Reimann relation」(のうちの 1 つ) として知られているものである.

例 3.6. 複素数 $a, b\in\mathbb{C}^\times\backslash p^{\mathbb{Z}}$ で $a/b\notin p^{\mathbb{Z}}$ なるものをとり, $\mathbb{C}^\times$ 上の有理型関数

$$\bullet\ \frac{\theta_p\left(a^{-1}z\right)\theta_p(bz)\theta_p\left(ab^{-1}z\right)}{\theta_p(z)^3}$$

を命題 2.5 の (2) を使って分解する. $f(z){:=}\theta_p\left(a^{-1}z\right)\theta_p(bz)\theta_p\left(ab^{-1}z\right)$ 及び

$$\bullet\ g(z){:=}\frac{f(z)}{\left\{(pz;p)_\infty(pz^{-1};p)_\infty\right\}^3}$$

とおくとき, 命題 2.5 の (2) によって

$$\bullet\ \left[\frac{f(z)}{\theta_p(z)^3}\right]_{|p|<|z|<1}-\left[\frac{f(z)}{\theta_p(z)^3}\right]_{1<|z|<|p|^{-1}}=\sum_{k=0}^{2}\frac{(-1)^k g^{(k)}(1)}{k!(2-k)!}{\partial_z}^{2-k}\delta(z)$$

が成り立つ. よって $g(1)$, $g^{(1)}(1)$, $g^{(2)}(1)$ を求める必要がある. $g(1)$ が

$$\bullet\ g(1)=\frac{f(1)}{{(p;p)_\infty}^6}=\frac{\theta_p\left(a^{-1}\right)\theta_p(b)\theta_p\left(ab^{-1}\right)}{{(p;p)_\infty}^6}$$

であるのはすぐにわかるが, $g^{(1)}(1)$, $g^{(2)}(1)$ を求めるのには工夫を要する. そこで

$$\bullet\ h(z){:=}(pz;p)_\infty\left(pz^{-1};p\right)_\infty$$

とおくと, 例 3.4 で述べたことから $h^{(1)}(1)=0$ なのであった. これによって

$$\bullet\ g^{(1)}(1)=\partial_z\left\{\frac{f(z)}{h(z)^3}\right\}\bigg|_{z=1}=\frac{f^{(1)}(z)}{h(z)^3}-3\frac{f(z)}{h(z)^4}h^{(1)}(z)\bigg|_{z=1}=\frac{f^{(1)}(1)}{{(p;p)_\infty}^6}$$

である. $f^{(1)}(1)$ にはいろいろと表示の仕方があるのであろうが, ここでは次のようにしておく. 以下, スペースの節約のため, Eisenstein 関数を $E_1(z)=E_1(z;p)$, $E_2(z)=E_2(z;p)$ という具合に書く. $D_z=z\partial_z$ を Euler 微分とし, log 微分について一般に

$$\bullet\ D_zA(z)=\{D_z\log A(z)\}A(z)$$

であることから次を得る :

$$\begin{aligned}\bullet\ f^{(1)}(1)&=D_zf(z)\Big|_{z=1}=\{D_z\log f(z)\}f(z)\Big|_{z=1}\\&=\left\{D_z\log\theta_p\left(a^{-1}z\right)+D_z\log\theta_p(bz)+D_z\log\theta_p\left(ab^{-1}z\right)\right\}f(z)\Big|_{z=1}\\&=-\left\{E_1\left(a^{-1}\right)+E_1(b)+E_1\left(ab^{-1}\right)\right\}f(1).\end{aligned}$$

こうして $g^{(1)}(1)$ が

$$\bullet\ g^{(1)}(1)=-\left\{E_1\left(a^{-1}\right)+E_1(b)+E_1\left(ab^{-1}\right)\right\}\frac{f(1)}{{(p;p)_\infty}^6}$$

と求まった. 次は $g^{(2)}(1)$ であるが, 途中で見た

$$\bullet\ g^{(1)}(z)=\frac{f^{(1)}(z)}{h(z)^3}-3\frac{f(z)}{h(z)^4}h^{(1)}(z)$$

及び $h^{(1)}(1)=0$ に注意すると, $g^{(2)}(1)$ は

$$\bullet\ g^{(2)}(1)=\frac{f^{(2)}(1)}{h(1)^3}-3\frac{f(1)}{h(1)^4}h^{(2)}(1)=\frac{f^{(2)}(1)}{{(p;p)_\infty}^6}-3\frac{f(1)}{{(p;p)_\infty}^8}h^{(2)}(1)$$

である ($h^{(1)}(z)$ がかかる項は $z=1$ とおくと 0 になる). あとは $f^{(2)}(1)$ と $h^{(2)}(1)$ を求めればよい. 先に $h^{(2)}(1)$ を求めることにすると, 一般に ${D_z}^2A(z)=D_zA(z)+z^2{\partial_z}^2A(z)$ 及び

$$\bullet\ {D_z}^2A(z)=\Big[{D_z}^2\log A(z)+\{D_z\log A(z)\}^2\Big]A(z)$$

であるので次がわかる : $D_z\log h(z)\Big|_{z=1}=0$ に注意すると

$$\begin{aligned}\bullet\ {D_z}^2h(z)\Big|_{z=1}&=D_zh(z)+z^2{\partial_z}^2h(z)\Big|_{z=1}=h^{(2)}(1)\\&=\Big[{D_z}^2\log h(z)+\{D_z\log h(z)\}^2\Big]h(z)\Big|_{z=1}\\&={D_z}^2\log h(z)\Big|_{z=1}\times{(p;p)_\infty}^2.\end{aligned}$$

ここで $\log h(z)$ はアニュラス $|p|<|z|<|p|^{-1}$ において

$$\bullet\ \log h(z)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^k}{1-p^k}\cdot\frac{z^k}{k}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^k}{1-p^k}\cdot\frac{z^{-k}}{k}\quad\big(|p|<|z|<|p|^{-1}\big)$$

と展開できるので, $h^{(2)}(1)$ は次のようになる : この $\log h(z)=\cdots$ を z について 2 回 Euler 微分したものに $z=1$ を代入してよいので

$$\bullet\ h^{(2)}(1)={D_z}^2\log h(z)\Big|_{z=1}\times{(p;p)_\infty}^2=-2{(p;p)_\infty}^2\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{kp^k}{1-p^k}}_{c_1(p)}=-2{(p;p)_\infty}^2c_1(p).$$

ここで, $c_1(p)$ には次のような表示もあることに注意する :

$$\bullet\ c_1(p)=-D_p\log(p;p)_\infty=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^k}{(1-p^k)^2}.$$

実際, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}z^k=\frac{1}{1-z}$ $(|z|<1)$ を z で Euler 微分することでわかる

$$\bullet\ \sum_{k=1}^{\infty}kz^k=\frac{z}{(1-z)^2}\quad(|z|<1)$$

を使うと

$$\bullet\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^k}{(1-p^k)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty}\ell\Big(p^k\Big)^\ell=\sum_{\ell=1}^{\infty}\ell\sum_{k=1}^{\infty}\Big(p^\ell\Big)^k=\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\ell p^\ell}{1-p^\ell}=c_1(p)$$

が成り立つ．これを後で用いる．

一方の $f^{(2)}(1)$ は次のようにして求められる．上に述べた log 微分の性質から

- $D_z{}^2 f(z)\Big|_{z=1}=f^{(1)}(1)+f^{(2)}(1)$
$=\Big[-E_2\big(a^{-1}z\big)-E_2(bz)-E_2\big(ab^{-1}z\big)+\big\{E_1\big(a^{-1}z\big)+E_1(bz)+E_1\big(ab^{-1}z\big)\big\}^2\Big]f(z)\Big|_{z=1}$
$=\Big[-E_2\big(a^{-1}\big)-E_2(b)-E_2\big(ab^{-1}\big)+\big\{E_1\big(a^{-1}\big)+E_1(b)+E_1\big(ab^{-1}\big)\big\}^2\Big]f(1)$

であるが，ここで次の事実がある：

- $x,\ y,\ z\in\mathbb{C}^\times\backslash p^{\mathbb{Z}}$ で $xyz=1$ なるものについて
  - $E_1(x)E_1(y)+E_1(y)E_1(z)+E_1(z)E_1(x)+E_1(x)+E_1(y)+E_1(z)$
  $=-D_p\log\theta_p(x)\theta_p(y)\theta_p(z)-1.$

この証明は例 3.9 にて行う．これを使うと次が成り立つ：まず

- $-E_2\big(a^{-1}\big)-E_2(b)-E_2\big(ab^{-1}\big)+\big\{E_1\big(a^{-1}\big)+E_1(b)+E_1\big(ab^{-1}\big)\big\}^2$
$=-E_2\big(a^{-1}\big)-E_2(b)-E_2\big(ab^{-1}\big)+E_1\big(a^{-1}\big)^2+E_1(b)^2+E_1\big(ab^{-1}\big)^2$
$\quad+2\big\{E_1\big(a^{-1}\big)E_1(b)+E_1(b)E_1\big(ab^{-1}\big)+E_1\big(ab^{-1}\big)E_1\big(a^{-1}\big)\big\}$
$=-E_2\big(a^{-1}\big)-E_2(b)-E_2\big(ab^{-1}\big)+E_1\big(a^{-1}\big)^2+E_1(b)^2+E_1\big(ab^{-1}\big)^2$
$\quad-2\big\{E_1\big(a^{-1}\big)+E_1(b)+E_1\big(ab^{-1}\big)\big\}-2D_p\log\theta_p\big(a^{-1}\big)\theta_p(b)\theta_p\big(ab^{-1}\big)-2$

であるが，Eisenstein 関数 $E_2(z)$ について

- $E_2(z)=E_1(z)^2+E_1(z)-2D_p\log\theta_p(z)-2D_p\log(p;p)_\infty$

であったので次を得る：

- $-E_2\big(a^{-1}\big)-E_2(b)-E_2\big(ab^{-1}\big)+\big\{E_1\big(a^{-1}\big)+E_1(b)+E_1\big(ab^{-1}\big)\big\}^2$
$=-3\big\{E_1\big(a^{-1}\big)+E_1(b)+E_1\big(ab^{-1}\big)\big\}+6D_p\log(p;p)_\infty-2.$

これによって $f^{(2)}(1)$ が求められる：$f^{(1)}(1)=-\big\{E_1\big(a^{-1}\big)+E_1(b)+E_1\big(ab^{-1}\big)\big\}f(1)$ から

- $f^{(2)}(1)=\big[-2\big\{E_1\big(a^{-1}\big)+E_1(b)+E_1\big(ab^{-1}\big)\big\}+6D_p\log(p;p)_\infty-2\big]f(1).$

以上より，$g^{(2)}(1)$ は次のようであることがわかる：$c_1(p)=-D_p\log(p;p)_\infty$ に注意すると

- $g^{(2)}(1)=\dfrac{f^{(2)}(1)}{(p;p)_\infty{}^6}-3\dfrac{f(1)}{(p;p)_\infty{}^8}h^{(2)}(1)$
$=\big[-2\big\{E_1\big(a^{-1}\big)+E_1(b)+E_1\big(ab^{-1}\big)\big\}+6D_p\log(p;p)_\infty-2\big]\dfrac{f(1)}{(p;p)_\infty{}^6}+\dfrac{6c_1(p)f(1)}{(p;p)_\infty{}^6}$
$=\big[-2\big\{E_1\big(a^{-1}\big)+E_1(b)+E_1\big(ab^{-1}\big)\big\}-2\big]\dfrac{f(1)}{(p;p)_\infty{}^6}$
$=2g^{(1)}(1)-2g(1).$

これまでやってきたように

$$\bullet\ \widetilde{F}(z){:=}\left[\frac{f(z)}{\theta_p(z)^3}\right]_{|p|<|z|<1}\in\mathbb{C}[[z,z^{-1}]]$$

とおくと

$$\bullet\ \left[\frac{f(z)}{\theta_p(z)^3}\right]_{1<|z|<|p|^{-1}}=\left[\frac{f(pz)}{\theta_p(pz)^3}\right]_{|p|<|pz|<1}=\widetilde{F}(pz)$$

なので, $\widetilde{F}(z)$ について

$$\begin{aligned}\bullet\ \widetilde{F}(z)-\widetilde{F}(pz)&=\sum_{k=0}^{2}\frac{(-1)^k g^{(k)}(1)}{k!(2-k)!}\partial_z{}^{2-k}\delta(z)\\&=\frac{g(1)}{2}\partial_z{}^2\delta(z)-g^{(1)}(1)\partial_z\delta(z)+\frac{g^{(2)}(1)}{2}\delta(z)\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $\partial_z\delta(z)=D_z\delta(z)+\delta(z)$ 及び

$$\begin{aligned}\bullet\ \partial_z{}^2\delta(z)&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}k(k-1)z^{k-2}\overset{k\to k+2}{=\!=\!=}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(k+2)(k+1)z^k=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(k^2+3k+2\right)z^k\\&=D_z{}^2\delta(z)+3D_z\delta(z)+2\delta(z)\end{aligned}$$

であること, 更に $g^{(2)}(1)=2g^{(1)}(1)-2g(1)$ を用いると

$$\begin{aligned}\bullet\ &\widetilde{F}(z)-\widetilde{F}(pz)\\&=\frac{g(1)}{2}D_z{}^2\delta(z)+\frac{1}{2}\left\{3g(1)-2g^{(1)}(1)\right\}D_z\delta(z)+\frac{1}{2}\left\{2g(1)-2g^{(1)}(1)+g^{(2)}(1)\right\}\delta(z)\\&=\frac{g(1)}{2}D_z{}^2\delta(z)+\frac{1}{2}\left\{3g(1)-2g^{(1)}(1)\right\}D_z\delta(z)\end{aligned}$$

がわかる. $\widetilde{F}(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_kz^k$ なる展開を仮定すると, c_0 以外の係数が

$$\begin{aligned}\bullet\ &\left(1-p^k\right)c_k=\frac{g(1)}{2}k^2+\frac{1}{2}\left\{3g(1)-2g^{(1)}(1)\right\}k\\&\Leftrightarrow c_k=\frac{g(1)}{2}\cdot\frac{k^2}{1-p^k}+\frac{1}{2}\left\{3g(1)-2g^{(1)}(1)\right\}\frac{k}{1-p^k}\quad(k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\})\end{aligned}$$

と求まる. こうして

$$\bullet\ \widetilde{F}(z)=c_0+\frac{g(1)}{2}\sum_{k\neq0}\frac{k^2z^k}{1-p^k}+\frac{1}{2}\left\{3g(1)-2g^{(1)}(1)\right\}\sum_{k\neq0}\frac{kz^k}{1-p^k}$$

がわかったが, ここで Eisenstein 関数 $E_3(z;p)$ について $E_3(z;p)=\sum_{k\neq0}\frac{k^2z^k}{1-p^k}\quad(|p|<|z|<1)$

であるので, $\mathbb{C}^\times$ 上の有理型関数の恒等式として

$$\bullet\ \frac{\theta_p\left(a^{-1}z\right)\theta_p(bz)\theta_p\left(ab^{-1}z\right)}{\theta_p(z)^3}=c_0+\frac{g(1)}{2}E_3(z)+\frac{1}{2}\left\{3g(1)-2g^{(1)}(1)\right\}E_2(z)$$

を得る．c_0 を $z=a$ とおくときに両辺が釣り合うように決めると，次が得られる：

$$\bullet\ \frac{\theta_p(a^{-1}z)\theta_p(bz)\theta_p(ab^{-1}z)}{\theta_p(z)^3}$$
$$=\frac{\theta_p(a^{-1})\theta_p(b)\theta_p(ab^{-1})}{2(p;p)_\infty{}^6}\{E_3(z)-E_3(a)\}$$
$$+\frac{\theta_p(a^{-1})\theta_p(b)\theta_p(ab^{-1})}{2(p;p)_\infty{}^6}\left[3+2\left\{E_1(a^{-1})+E_1(b)+E_1(ab^{-1})\right\}\right]\{E_2(z)-E_2(a)\}.$$

例 3.7. 例 3.2 で，$\widetilde{f}(z):=\left[\prod_{i=1}^{N}\frac{\theta_p(b_iz)}{\theta_p(a_iz)}\right]_{\substack{|p|<|a_iz|<1\\(1\le i\le N)}}\in\mathbb{C}[[z,z^{-1}]]$ 及び $c=\frac{b_1\cdots b_N}{a_1\cdots a_N}$ について

$$\bullet\ \widetilde{f}(z)-c\widetilde{f}(pz)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\prod_{j=1}^{N}\theta_p(b_j/a_i)}{(p;p)_\infty{}^2\prod_{j\neq i}\theta_p(a_j/a_i)}\delta(a_iz)$$

であることを述べた．ここでは $|p|<\frac{\min\{|a_1|^{-1},\dots,|a_N|^{-1}\}}{\max\{|a_1|^{-1},\dots,|a_N|^{-1}\}}$ が満たされると仮定していたのであった．この両辺の z に関する定数項を拾うことで次のことがわかる．

(i) $c\notin p^{\mathbb{Z}}$ の場合．一般に，形式ベキ級数 $\widetilde{g}(z)\in\mathbb{C}[[z,z^{-1}]]$ 及び $\lambda\in\mathbb{C}^\times$ に対し

$$\bullet\ \underset{z}{\mathrm{CT}}[\widetilde{g}(\lambda z)]=\underset{z}{\mathrm{CT}}[\widetilde{g}(z)]$$

であることから (「形式ベキ級数の定数項は，不定元のスケール倍で不変である」ということ)

$$\bullet\ \underset{z}{\mathrm{CT}}\left[\widetilde{f}(z)-c\widetilde{f}(pz)\right]=(1-c)\underset{z}{\mathrm{CT}}\left[\widetilde{f}(z)\right]=\sum_{i=1}^{N}\frac{\prod_{j=1}^{N}\theta_p(b_j/a_i)}{(p;p)_\infty{}^2\prod_{j\neq i}\theta_p(a_j/a_i)}.$$

更に，形式ベキ級数の定数項を拾う操作と積分の対応から次を得る：$c\notin p^{\mathbb{Z}}$ の場合，

$$\boxed{\bullet\ (1-c)\oint_{\substack{|p|<|a_iz|<1\\(1\le i\le N)}}\frac{dz}{2\pi iz}\prod_{i=1}^{N}\frac{\theta_p(b_iz)}{\theta_p(a_iz)}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\prod_{j=1}^{N}\theta_p(b_j/a_i)}{(p;p)_\infty{}^2\prod_{j\neq i}\theta_p(a_j/a_i)}.}$$

ここでは条件 $|p|<\frac{\min\{|a_1|^{-1},\dots,|a_N|^{-1}\}}{\max\{|a_1|^{-1},\dots,|a_N|^{-1}\}}$ を外すことはできないことに注意する (アニュラス $|p|<|a_iz|<1$ $(1\le i\le N)$ で積分を行っているので).

(ii) $c\in p^{\mathbb{Z}}$ の場合．ある $k_0\in\mathbb{Z}$ があって $c=p^{k_0}$ であったとすると，例 3.2 で見たように，$\widetilde{F}(z):=z^{k_0}\widetilde{f}(z)\in\mathbb{C}[[z,z^{-1}]]$ について次が成り立つのであった：

$$\bullet\ \widetilde{F}(z)-\widetilde{F}(pz)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{N}\theta_p(b_j/a_i)}{(p;p)_\infty{}^2\displaystyle\prod_{j\neq i}\theta_p(a_j/a_i)}a_i{}^{-k_0}\delta(a_iz).$$

ここで $\underset{z}{\mathrm{CT}}\Big[\widetilde{F}(z)-\widetilde{F}(pz)\Big]=0$ なので次を得る：$c=p^{k_0}$ の場合,

$$\boxed{\bullet\ \sum_{i=1}^{N}\frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{N}\theta_p(b_j/a_i)}{(p;p)_\infty{}^2\displaystyle\prod_{j\neq i}\theta_p(a_j/a_i)}a_i{}^{-k_0}=0.}$$

これが, 例 3.2 の (ii) において見た

$$\bullet\ z^{k_0}\prod_{i=1}^{N}\frac{\theta_p(b_iz)}{\theta_p(a_iz)}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{N}\theta_p(b_j/a_i)}{(p;p)_\infty{}^2\displaystyle\prod_{j\neq i}\theta_p(a_j/a_i)}a_i{}^{-k_0}\left\{E_1(a_iz;p)-E_1\left(\frac{a_i}{b_1};p\right)\right\}$$

の右辺も楕円関数であることを保証する.

例 3.2 の後半で述べた

$$\bullet\ \left[\prod_{i=1}^{N}\frac{\theta_p(x_i/z)}{\theta_p(tx_i/z)}\right]_{\substack{|p|<|tx_i/z|<1\\(1\leq i\leq N)}}-\left[\prod_{i=1}^{N}\frac{\theta_p(x_i/z)}{\theta_p(tx_i/z)}\right]_{\substack{1<|tx_i/z|<|p|^{-1}\\(1\leq i\leq N)}}$$
$$=\frac{t^{-N+1}\theta_p\big(t^{-1}\big)}{(p;p)_\infty{}^2}\sum_{i=1}^{N}\prod_{j\neq i}\frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)}\delta\Big(t\frac{x_i}{z}\Big)$$

の左辺の第 2 項について

$$\bullet\ \left[\prod_{i=1}^{N}\frac{\theta_p(x_i/z)}{\theta_p(tx_i/z)}\right]_{\substack{1<|tx_i/z|<|p|^{-1}\\(1\leq i\leq N)}}=t^{-N}\left[\prod_{i=1}^{N}\frac{\theta_p(px_i/z)}{\theta_p(ptx_i/z)}\right]_{\substack{|p|<|ptx_i/z|<1\\(1\leq i\leq N)}}$$

なので, $\widetilde{f}(z):=\left[\displaystyle\prod_{i=1}^{N}\frac{\theta_p(x_i/z)}{\theta_p(tx_i/z)}\right]_{\substack{|p|<|tx_i/z|<1\\(1\leq i\leq N)}}\in\mathbb{C}[[z,z^{-1}]]$ とおくとき

$$\bullet\ \widetilde{f}(z)-t^{-N}\widetilde{f}\big(p^{-1}z\big)=\frac{t^{-N+1}\theta_p\big(t^{-1}\big)}{(p;p)_\infty{}^2}\sum_{i=1}^{N}\prod_{j\neq i}\frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)}\delta\Big(t\frac{x_i}{z}\Big)$$

が成り立つ. この両辺の z についての定数項を拾うことで

$$\bullet\ \Big(1-t^{-N}\Big)\underset{z}{\mathrm{CT}}\Big[\widetilde{f}(z)\Big]=\frac{t^{-N+1}\theta_p\big(t^{-1}\big)}{(p;p)_\infty{}^2}\sum_{i=1}^{N}\prod_{j\neq i}\frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)}$$

を得るが, 形式ベキ級数の定数項を拾う操作と積分の対応から次が成り立つ：

$$\bullet\ \left(1-t^{-N}\right)\oint_{\substack{|p|<|tx_i/z|<1\\(1\leq i\leq N)}}\frac{dz}{2\pi iz}\prod_{i=1}^{N}\frac{\theta_p(x_i/z)}{\theta_p(tx_i/z)}=\frac{t^{-N+1}\theta_p\left(t^{-1}\right)}{(p;p)_\infty{}^2}\sum_{i=1}^{N}\prod_{j\neq i}\frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)}.$$

ここでは $|p|<\dfrac{\min\{|x_1|,\ldots,|x_N|\}}{\max\{|x_1|,\ldots,|x_N|\}}$ が満たされると仮定している.

$x_1,\ldots,x_N$ 及び t が p と無関係にとられているとすると, 上で $p=0$ とおくことで

$$\bullet\ \left(1-t^{-N}\right)\oint_{\substack{|tx_i/z|<1\\(1\leq i\leq N)}}\frac{dz}{2\pi iz}\prod_{i=1}^{N}\frac{1-(x_i/z)}{1-t(x_i/z)}=t^{-N+1}\left(1-t^{-1}\right)\sum_{i=1}^{N}\prod_{j\neq i}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}$$

が得られる. ここで

$$\begin{aligned}\bullet\ \left[\prod_{i=1}^{N}\frac{1-(x_i/z)}{1-t(x_i/z)}\right]_{\substack{|tx_i/z|<1\\(1\leq i\leq N)}}&=\prod_{i=1}^{N}\left(1-\frac{x_i}{z}\right)\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(t\frac{x_1}{z}\right)^{k_1}\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(t\frac{x_2}{z}\right)^{k_2}\cdots\sum_{k_N=0}^{\infty}\left(t\frac{x_N}{z}\right)^{k_N}\\&=1+\left(\frac{x_1}{z},\ldots,\frac{x_N}{z}\ \text{について 1 次以上の項}\right)\end{aligned}$$

に注意すると

$$\bullet\ \oint_{\substack{|tx_i/z|<1\\(1\leq i\leq N)}}\frac{dz}{2\pi iz}\prod_{i=1}^{N}\frac{1-(x_i/z)}{1-t(x_i/z)}=\operatorname*{CT}_{z}\left[\left[\prod_{i=1}^{N}\frac{1-(x_i/z)}{1-t(x_i/z)}\right]_{\substack{|tx_i/z|<1\\(1\leq i\leq N)}}\right]=1$$

であるので, 最終的には次が得られる：

$$\bullet\ \sum_{i=1}^{N}\prod_{j\neq i}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}=\frac{1-t^N}{1-t}.$$

これは Macdonald 多項式の理論において重要な働きをする恒等式である.

3.2 Eisenstein の楕円関数の恒等式の具体例

ここでは, Eisenstein 関数の恒等式のうち「テータ関数とデルタ関数の関係」によって比較的簡単に導くことが可能であるものの具体例を紹介する.

例 3.8. a, $b\in\mathbb{C}^\times\backslash p^{\mathbb{Z}}$ で $a/b\notin p^{\mathbb{Z}}$ なるものをとり, 更に a, b と楕円モジュラス p について

$$\bullet\ |p|<\frac{\min\{|a|,|b|\}}{\max\{|a|,|b|\}}$$

が満たされると仮定する (「テータ関数とデルタ関数の関係」を使えるようにするために必要な条件である. 例によって, この条件は最終的には外せる). ここでは $\mathbb{C}^\times$ 上の有理型関数

$$\bullet\ f(z):=E_1\left(\frac{a}{z};p\right)E_1\left(\frac{b}{z};p\right)=\frac{(D_z\theta_p)(a/z)(D_z\theta_p)(b/z)}{\theta_p(a/z)\theta_p(b/z)}$$

を和に分解する (ここで $(D_z\theta_p)(\bullet)=D_z\theta_p(z)\Big|_{z=\bullet}$ とした). まず関数 $(D_z\theta_p)(a/z)(D_z\theta_p)(b/z)$ がアニュラス $\left\{z\in\mathbb{C}^\times \;\middle|\; \begin{array}{l}|p|<|a/z|<|p|^{-1},\\ |p|<|b/z|<|p|^{-1}\end{array}\right\}\neq\emptyset$ で正則であるので, 命題 2.4 が使えて次が成り立つ：

- $[f(z)]_{\substack{|p|<|a/z|<1\\|p|<|b/z|<1}}-[f(z)]_{\substack{1<|a/z|<|p|^{-1}\\1<|b/z|<|p|^{-1}}}$

$$=\left[\frac{(D_z\theta_p)(a/z)(D_z\theta_p)(b/z)}{\theta_p(a/z)\theta_p(b/z)}\right]_{\substack{|p|<|a/z|<1\\|p|<|b/z|<1}}-\left[\frac{(D_z\theta_p)(a/z)(D_z\theta_p)(b/z)}{\theta_p(a/z)\theta_p(b/z)}\right]_{\substack{1<|a/z|<|p|^{-1}\\1<|b/z|<|p|^{-1}}}$$
$$=\frac{(D_z\theta_p)(1)(D_z\theta_p)(b/a)}{(p;p)_\infty{}^2\theta_p(b/a)}\delta\left(\frac{a}{z}\right)+\frac{(D_z\theta_p)(1)(D_z\theta_p)(a/b)}{(p;p)_\infty{}^2\theta_p(a/b)}\delta\left(\frac{b}{z}\right).$$

ここで $(D_z\theta_p)(1)=-(p;p)_\infty{}^2$ であったので

- $\dfrac{(D_z\theta_p)(1)(D_z\theta_p)(b/a)}{(p;p)_\infty{}^2\theta_p(b/a)}=-\dfrac{(D_z\theta_p)(b/a)}{\theta_p(b/a)}=E_1\left(\dfrac{b}{a};p\right),$
- $\dfrac{(D_z\theta_p)(1)(D_z\theta_p)(a/b)}{(p;p)_\infty{}^2\theta_p(a/b)}=E_1\left(\dfrac{a}{b};p\right)$

がわかり, まずは次が成り立つ：

- $[f(z)]_{\substack{|p|<|a/z|<1\\|p|<|b/z|<1}}-[f(z)]_{\substack{1<|a/z|<|p|^{-1}\\1<|b/z|<|p|^{-1}}}=E_1\left(\dfrac{b}{a};p\right)\delta\left(\dfrac{a}{z}\right)+E_1\left(\dfrac{a}{b};p\right)\delta\left(\dfrac{b}{z}\right).$

ここから先の計算が, これまで見てきたようなただのテータ関数の積の比の分解よりも, 少しだけ面倒である. これまでと同様に

- $\widetilde{f}(z):=[f(z)]_{\substack{|p|<|a/z|<1\\|p|<|b/z|<1}}\in\mathbb{C}[[z,z^{-1}]]$

とおくと, Eisenstein 関数 $E_1(z;p)$ の擬周期性である $E_1(pz;p)=E_1(z;p)+1$ から

- $[f(z)]_{\substack{1<|a/z|<|p|^{-1}\\1<|b/z|<|p|^{-1}}}$

$$=\left[E_1\left(\frac{a}{z};p\right)E_1\left(\frac{b}{z};p\right)\right]_{\substack{1<|a/z|<|p|^{-1}\\1<|b/z|<|p|^{-1}}}$$
$$=\left[\left\{E_1\left(p\frac{a}{z};p\right)-1\right\}\left\{E_1\left(p\frac{b}{z};p\right)-1\right\}\right]_{\substack{|p|<|pa/z|<1\\|p|<|pb/z|<1}}$$
$$=\underbrace{\left[E_1\left(p\frac{a}{z};p\right)E_1\left(p\frac{b}{z};p\right)\right]_{\substack{|p|<|pa/z|<1\\|p|<|pb/z|<1}}}_{\widetilde{f}(p^{-1}z)}-\left[E_1\left(p\frac{a}{z};p\right)+E_1\left(p\frac{b}{z};p\right)\right]_{\substack{|p|<|pa/z|<1\\|p|<|pb/z|<1}}+1$$

であるが, $[E_1(z;p)]_{|p|<|z|<1}=\displaystyle\sum_{n\neq0}\frac{z^n}{1-p^n}$ であったことに注意すると

- $[f(z)]_{\substack{1<|a/z|<|p|^{-1}\\1<|b/z|<|p|^{-1}}}=\widetilde{f}(p^{-1}z)-\displaystyle\sum_{n\neq0}\frac{(pa/z)^n}{1-p^n}-\sum_{n\neq0}\frac{(pb/z)^n}{1-p^n}+1$

がわかる．こうして次が成り立つ：

- $[f(z)]_{\substack{|p|<|a/z|<1\\|p|<|b/z|<1}}-[f(z)]_{\substack{1<|a/z|<|p|^{-1}\\1<|b/z|<|p|^{-1}}}$

$$=\widetilde{f}(z)-\widetilde{f}(p^{-1}z)+\sum_{n\neq 0}\frac{(pa/z)^n}{1-p^n}+\sum_{n\neq 0}\frac{(pb/z)^n}{1-p^n}-1=E_1\left(\frac{b}{a};p\right)\delta\left(\frac{a}{z}\right)+E_1\left(\frac{a}{b};p\right)\delta\left(\frac{b}{z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \widetilde{f}(z)-\widetilde{f}(p^{-1}z)=-\sum_{n\neq 0}\frac{(pa/z)^n}{1-p^n}-\sum_{n\neq 0}\frac{(pb/z)^n}{1-p^n}+1+E_1\left(\frac{b}{a};p\right)\delta\left(\frac{a}{z}\right)+E_1\left(\frac{a}{b};p\right)\delta\left(\frac{b}{z}\right).$$

z 依存性を見て $\widetilde{f}(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_kz^{-k}$ なる展開を仮定すると, この条件から, c_0 以外の係数が

- $(1-p^k)c_k=-\dfrac{(pa)^k}{1-p^k}-\dfrac{(pb)^k}{1-p^k}+E_1\left(\dfrac{b}{a};p\right)a^k+E_1\left(\dfrac{a}{b};p\right)b^k$

$$\Leftrightarrow c_k=-\frac{(pa)^k}{(1-p^k)^2}-\frac{(pb)^k}{(1-p^k)^2}+E_1\left(\frac{b}{a};p\right)\frac{a^k}{1-p^k}+E_1\left(\frac{a}{b};p\right)\frac{b^k}{1-p^k}\quad (k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\})$$

と決まる．こうして $\widetilde{f}(z)$ が

- $\widetilde{f}(z)=c_0-\sum_{k\neq 0}\dfrac{p^k(a/z)^k}{(1-p^k)^2}-\sum_{k\neq 0}\dfrac{p^k(b/z)^k}{(1-p^k)^2}+E_1\left(\dfrac{b}{a};p\right)\sum_{k\neq 0}\dfrac{(a/z)^k}{1-p^k}+E_1\left(\dfrac{a}{b};p\right)\sum_{k\neq 0}\dfrac{(b/z)^k}{1-p^k}$

と求まった．この後ろ 2 つの和から $E_1(a/z;p)$, $E_1(b/z;p)$ が出ることはわかるが, 例えば

- $-\sum_{k\neq 0}\dfrac{p^k(a/z)^k}{(1-p^k)^2}$

はこれまで見たことがないものである．この正体は次のようにしてわかる：$\log\theta_p(z)$ が

- $\log\theta_p(z)=-\sum_{k\neq 0}\dfrac{1}{1-p^k}\cdot\dfrac{z^k}{k}\quad (|p|<|z|<1)$

と書けることから, これを p について Euler 微分したものは $(D_p=p\partial_p)$

- $D_p\log\theta_p(z)=-\sum_{k\neq 0}\dfrac{kp^k}{(1-p^k)^2}\cdot\dfrac{z^k}{k}=-\sum_{k\neq 0}\dfrac{p^kz^k}{(1-p^k)^2}\quad (|p|<|z|<1)$

となる．以上によって, $\mathbb{C}^\times$ 上の有理型関数の恒等式として

- $E_1\left(\dfrac{a}{z};p\right)E_1\left(\dfrac{b}{z};p\right)$

$$=c_0+E_1\left(\frac{b}{a};p\right)E_1\left(\frac{a}{z};p\right)+E_1\left(\frac{a}{b};p\right)E_1\left(\frac{b}{z};p\right)+D_p\log\theta_p(a/z)+D_p\log\theta_p(b/z)$$

が成り立つ (この時点で条件 $|p|<\dfrac{\min\{|a|,|b|\}}{\max\{|a|,|b|\}}$ が外せる)．残っている c_0 は極限 $z\to a$ を調べて決める．まず

- $c_0=E_1\left(\dfrac{a}{z};p\right)\left\{E_1\left(\dfrac{b}{z};p\right)-E_1\left(\dfrac{b}{a};p\right)\right\}$

$$-E_1\left(\frac{a}{b};p\right)E_1\left(\frac{b}{z};p\right)-D_p\log\theta_p(a/z)-D_p\log\theta_p(b/z)$$

としておき, Eisenstein 関数 $E_1(z;p)$ について

$$\bullet\ E_1(z;p) = \frac{z}{1-z} + (z=1 \text{ で正則な関数})$$

であることに注意すると次が成り立つ：

$$\begin{aligned}
\bullet\ c_0 &= \lim_{z\to a} E_1\left(\frac{a}{z};p\right)\left\{E_1\left(\frac{b}{z};p\right) - E_1\left(\frac{b}{a};p\right)\right\} \\
&\quad - \lim_{z\to a}\left\{E_1\left(\frac{a}{b};p\right)E_1\left(\frac{b}{z};p\right) + D_p\log\theta_p(a/z) + D_p\log\theta_p(b/z)\right\} \\
&= \lim_{z\to a}\left(1-\frac{a}{z}\right)E_1\left(\frac{a}{z};p\right)z\cdot\frac{E_1\left(\frac{b}{z};p\right) - E_1\left(\frac{b}{a};p\right)}{z-a} \\
&\quad - \left\{E_1\left(\frac{a}{b};p\right)E_1\left(\frac{b}{a};p\right) + 2D_p\log(p;p)_\infty + D_p\log\theta_p(b/a)\right\} \\
&= a\frac{\partial}{\partial z}E_1\left(\frac{b}{z};p\right)\bigg|_{z=a} - \left\{E_1\left(\frac{a}{b};p\right)E_1\left(\frac{b}{a};p\right) + 2D_p\log(p;p)_\infty + D_p\log\theta_p(b/a)\right\} \\
&= -\frac{b}{a}E_1{}^{(1)}\left(\frac{b}{a};p\right) + \left\{E_1\left(\frac{b}{a};p\right) + 1\right\}E_1\left(\frac{b}{a};p\right) - 2D_p\log(p;p)_\infty - D_p\log\theta_p(b/a) \\
&= -E_2\left(\frac{b}{a};p\right) + E_1\left(\frac{b}{a};p\right)^2 + E_1\left(\frac{b}{a};p\right) - 2D_p\log(p;p)_\infty - D_p\log\theta_p(b/a).
\end{aligned}$$

ここで, Eisenstein 関数 $E_1(z;p)$, $E_2(z;p)$ について

$$\bullet\ E_2(z;p) = E_1(z;p)^2 + E_1(z;p) - 2D_p\log\theta_p(z) - 2D_p\log(p;p)_\infty$$

が成り立つことから, c_0 は結局 $c_0 = D_p\log\theta_p(b/a)$ であることがわかる. 以上によって次の恒等式が得られた：

> • $a,\ b \in \mathbb{C}^\times \setminus p^{\mathbb{Z}}$ について $a/b \notin p^{\mathbb{Z}}$ であるとき, 次の $\mathbb{C}^\times$ 上の有理型関数の恒等式が成り立つ：
>
> $$\begin{aligned}
> \bullet\ & E_1\left(\frac{a}{z};p\right)E_1\left(\frac{b}{z};p\right) - D_p\log\theta_p(b/a) \\
> &= E_1\left(\frac{b}{a};p\right)E_1\left(\frac{a}{z};p\right) + E_1\left(\frac{a}{b};p\right)E_1\left(\frac{b}{z};p\right) + D_p\log\theta_p(a/z) + D_p\log\theta_p(b/z).
> \end{aligned}$$

Eisenstein 関数 $E_1(z;p) = -D_z\log\theta_p(z)$ と $D_p\log\theta_p(z)$ について

$$\bullet\ E_1(z;p)\Big|_{p=0} = \frac{z}{1-z}, \qquad \bullet\ D_p\log\theta_p(z)\Big|_{p=0} = 0$$

であることから, a, b が p と無関係にとられている場合, 上の結果において $p=0$ とおくと次が出る：

$$\bullet\ \frac{(a/z)}{1-(a/z)}\cdot\frac{(b/z)}{1-(b/z)} = \frac{ab}{(z-a)(z-b)} = \frac{ab}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right).$$

よって, 今回示した恒等式というのは, 最も簡単な有理関数の部分分数分解の楕円関数版であると理解できる.

例 3.9. ここでは次の恒等式を示すことを考える：

- x, y, $z \in \mathbb{C}^\times \backslash p^{\mathbb{Z}}$ で $xyz=1$ なるものに対し次が成り立つ：

$$\begin{aligned}&E_1(x;p)E_1(y;p)+E_1(y;p)E_1(z;p)+E_1(z;p)E_1(x;p)\\&\quad+E_1(x;p)+E_1(y;p)+E_1(z;p)\\&=-D_p\log\theta_p(x)-D_p\log\theta_p(y)-D_p\log\theta_p(z)-1.\end{aligned}$$

以下では $y \in \mathbb{C}^\times \backslash p^{\mathbb{Z}}$ で楕円モジュラス p と共に

$$|p|<\frac{\min\{1,|y|^{-1}\}}{\max\{1,|y|^{-1}\}}$$

を満たすものを 1 つとって固定し (「テータ関数とデルタ関数の関係」の使用を可能にするための条件である．目的の恒等式が得られたら外してもよい), x を $x \notin p^{\mathbb{Z}}$ かつ $xy \notin p^{\mathbb{Z}}$ を満たす $\mathbb{C}^\times$ の変数として扱って $z=1/xy$ と見る．以下, スペースの節約のため, Eisenstein 関数を $E_1(x)=E_1(x;p)$, $E_2(x)=E_2(x;p)$ などと書く．今回扱うのは

$$\begin{aligned}&f(x)\\&:=E_1(x)E_1(y)+E_1(y)E_1(1/xy)+E_1(1/xy)E_1(x)+E_1(x)+E_1(y)+E_1(1/xy)\\&=E_1(x)E_1(y)+E_1(y)\{-E_1(xy)-1\}+\{-E_1(xy)-1\}E_1(x)+E_1(x)+E_1(y)-E_1(xy)-1\\&=E_1(x)E_1(y)-E_1(y)E_1(xy)-E_1(x)E_1(xy)-E_1(xy)-1\end{aligned}$$

である (Eisenstein 関数 $E_1(z)$ の性質である $E_1(z)+E_1(z^{-1})=-1$ を使った)．この $f(x)$ について

$$[f(x)]_{\substack{|p|<|x|<1\\|p|<|xy|<1}}-[f(x)]_{\substack{1<|x|<|p|^{-1}\\1<|xy|<|p|^{-1}}}$$

を計算する．このとき

$$[E_1(x)E_1(xy)]_{\substack{|p|<|x|<1\\|p|<|xy|<1}}-[E_1(x)E_1(xy)]_{\substack{1<|x|<|p|^{-1}\\1<|xy|<|p|^{-1}}}$$

が現れるが, これには例 3.8 の中で述べたことが使える．そこでは, a, $b \in \mathbb{C}^\times \backslash p^{\mathbb{Z}}$ で $a/b \notin p^{\mathbb{Z}}$ なるものについて

$$\begin{aligned}&\left[E_1\left(\frac{a}{z}\right)E_1\left(\frac{b}{z}\right)\right]_{\substack{|p|<|a/z|<1\\|p|<|b/z|<1}}-\left[E_1\left(\frac{a}{z}\right)E_1\left(\frac{b}{z}\right)\right]_{\substack{1<|a/z|<|p|^{-1}\\1<|b/z|<|p|^{-1}}}\\&=E_1\left(\frac{b}{a}\right)\delta\left(\frac{a}{z}\right)+E_1\left(\frac{a}{b}\right)\delta\left(\frac{b}{z}\right)\end{aligned}$$

が成り立つことを見たが, ここで $z \to x^{-1}$ として $a=1$, $b=y$ とおくと

$$\begin{aligned}&[E_1(x)E_1(xy)]_{\substack{|p|<|x|<1\\|p|<|xy|<1}}-[E_1(x)E_1(xy)]_{\substack{1<|x|<|p|^{-1}\\1<|xy|<|p|^{-1}}}\\&=E_1(y)\delta(x)+E_1\left(y^{-1}\right)\delta(xy)\end{aligned}$$

がわかる．これと

$$\bullet\ [E_1(z)]_{|p|<|z|<1} - [E_1(z)]_{1<|z|<|p|^{-1}} = \delta(z)$$

によって次が成り立つ：

$$\begin{aligned}&\bullet\ [f(x)]_{\substack{|p|<|x|<1\\|p|<|xy|<1}} - [f(x)]_{\substack{1<|x|<|p|^{-1}\\1<|xy|<|p|^{-1}}}\\&=E_1(y)\delta(x)-E_1(y)\delta(xy)-E_1(y)\delta(x)-E_1\big(y^{-1}\big)\delta(xy)-\delta(xy)\\&=-\big\{E_1(y)+E_1\big(y^{-1}\big)+1\big\}\delta(xy)=0.\end{aligned}$$

ここから先はこれまでと同様にやればよい．$\widetilde{f}(x)\in\mathbb{C}[[x,x^{-1}]]$ を

$$\bullet\ \widetilde{f}(x)=[f(x)]_{\substack{|p|<|x|<1\\|p|<|xy|<1}}\in\mathbb{C}[[x,x^{-1}]]$$

とおくとき，$[f(x)]_{\substack{1<|x|<|p|^{-1}\\1<|xy|<|p|^{-1}}}$ について次のようにできる：$E_1(z)=E_1(pz)-1$ によって

$$\begin{aligned}&\bullet\ f(x)\\&=E_1(x)E_1(y)-E_1(y)E_1(xy)-E_1(x)E_1(xy)-E_1(xy)-1\\&=\{E_1(px)-1\}E_1(y)-E_1(y)\{E_1(pxy)-1\}-\{E_1(px)-1\}\{E_1(pxy)-1\}-E_1(pxy)\\&=\underbrace{E_1(px)E_1(y)-E_1(y)E_1(pxy)-E_1(px)E_1(pxy)-E_1(pxy)-1}_{f(px)}+E_1(px)+E_1(pxy)\\&=f(px)+E_1(px)+E_1(pxy)\end{aligned}$$

であることを使うと

$$\begin{aligned}\bullet\ [f(x)]_{\substack{1<|x|<|p|^{-1}\\1<|xy|<|p|^{-1}}}&=[f(px)+E_1(px)+E_1(pxy)]_{\substack{|p|<|px|<1\\|p|<|pxy|<1}}\\&=\widetilde{f}(px)+\sum_{n\neq0}\frac{(px)^n}{1-p^n}+\sum_{n\neq0}\frac{(pxy)^n}{1-p^n}.\end{aligned}$$

こうして，$\widetilde{f}(x)$ について次が成り立つ：

$$\bullet\ \widetilde{f}(x)-\widetilde{f}(px)-\sum_{n\neq0}\frac{(px)^n}{1-p^n}-\sum_{n\neq0}\frac{(pxy)^n}{1-p^n}=0\Leftrightarrow\widetilde{f}(x)-\widetilde{f}(px)=\sum_{n\neq0}\frac{(px)^n}{1-p^n}+\sum_{n\neq0}\frac{(pxy)^n}{1-p^n}.$$

例によって $\widetilde{f}(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_kx^k$ なる展開を仮定すると，c_0 以外の係数が

$$\bullet\ \big(1-p^k\big)c_k=\frac{p^k}{1-p^k}+\frac{(py)^k}{1-p^k}\Leftrightarrow c_k=\frac{p^k}{(1-p^k)^2}+\frac{(py)^k}{(1-p^k)^2}\quad(k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\})$$

と決まる．こうして

$$\bullet\ \widetilde{f}(x)=c_0+\sum_{k\neq0}\frac{p^kx^k}{(1-p^k)^2}+\sum_{k\neq0}\frac{p^k(xy)^k}{(1-p^k)^2}$$

がわかったが, 先の例 3.8 の中で見た

$$\bullet\ D_p \log\theta_p(z) = -\sum_{k\neq 0}\frac{p^k z^k}{(1-p^k)^2} \quad (|p|<|z|<1)$$

を使うと, $\mathbb{C}^\times$ 上の有理型関数の恒等式として

$$\begin{aligned}\bullet\ f(x) &= E_1(x)E_1(y) - E_1(y)E_1(xy) - E_1(x)E_1(xy) - E_1(xy) - 1\\ &= c_0 - D_p\log\theta_p(x) - D_p\log\theta_p(xy)\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる (この時点で条件 $|p|<\frac{\min\{1,|y|^{-1}\}}{\max\{1,|y|^{-1}\}}$ が外せる). あとは c_0 を決めればよいが, そのために $\lim_{x\to 1} f(x)$ を調べる. $E_1(z)$, $E_2(z)=D_zE_1(z)$ について

$$\bullet\ E_2(z) = E_1(z)^2 + E_1(z) - 2D_p\log\theta_p(z) - 2D_p\log(p;p)_\infty$$

であったこと, 及び $E_1(z)$ について

$$\bullet\ E_1(z) = \frac{z}{1-z} + (z=1 \text{ で正則な関数})$$

であることから次がわかる：

$$\begin{aligned}\bullet\ f(x) &= (1-x)E_1(x)\frac{E_1(y)-E_1(xy)}{1-x} - E_1(y)E_1(xy) - E_1(xy) - 1\\ &\xrightarrow[x\to 1]{} \left.\frac{\partial}{\partial x}E_1(xy)\right|_{x=1} - E_1(y)^2 - E_1(y) - 1\\ &= y\frac{\partial}{\partial y}E_1(y) - E_1(y)^2 - E_1(y) - 1\\ &= E_2(y) - E_2(y)^2 - E_1(y) - 1\\ &= -2D_p\log\theta_p(y) - 2D_p\log(p;p)_\infty - 1.\end{aligned}$$

これによって c_0 は次のように決まる：

$$\begin{aligned}\bullet\ c_0 &= -2D_p\log\theta_p(y) - 2D_p\log(p;p)_\infty - 1 + 2D_p\log(p;p)_\infty + D_p\log\theta_p(y)\\ &= -D_p\log\theta_p(y) - 1.\end{aligned}$$

以上によって

$$\begin{aligned}\bullet\ f(x) &= E_1(x)E_1(y) - E_1(y)E_1(xy) - E_1(x)E_1(xy) - E_1(xy) - 1\\ &= -D_p\log\theta_p(x) - D_p\log\theta_p(xy) - D_p\log\theta_p(y) - 1\end{aligned}$$

であることがわかったが, $f(x)$ は元々

$$\bullet\ E_1(x)E_1(y) + E_1(y)E_1(z) + E_1(z)E_1(x) + E_1(x) + E_1(y) + E_1(z)$$

であったこと, 及び $z=1/xy$ から

$$\begin{aligned}\bullet\ D_p\log\theta_p(xy) &= D_p\log\theta_p\left(z^{-1}\right) = D_p\log\left[-z^{-1}\theta_p(z)\right]\\ &= D_p\log\theta_p(z)\end{aligned}$$

なので, 以上によって次がわかったことになる：

- $x,\ y,\ z\in\mathbb{C}^\times\backslash p^{\mathbb{Z}}$ で $xyz=1$ を満たすものについて

$$\bullet\ E_1(x)E_1(y)+E_1(y)E_1(z)+E_1(z)E_1(x)+E_1(x)+E_1(y)+E_1(z)$$
$$=-D_p\log\theta_p(x)-D_p\log\theta_p(y)-D_p\log\theta_p(z)-1.$$

この恒等式をうまく使えば,「Weierstrass の $\wp$-関数の加法定理」に対応する Eisenstein 関数の恒等式も得られる ($\wp$-関数の加法定理自体も得られる). 先ほど, $y\in\mathbb{C}^\times\backslash p^{\mathbb{Z}}$ を固定し, x を $x\notin p^{\mathbb{Z}}$ 及び $xy\notin p^{\mathbb{Z}}$ を満たしつつ $\mathbb{C}^\times$ を動く変数とみなして

$$\bullet\ E_1(x)E_1(y)-E_1(y)E_1(xy)-E_1(x)E_1(xy)-E_1(xy)+D_p\log\theta_p(x)\theta_p(y)\theta_p(xy)=0$$

を示した (スペースの節約のため $D_p\log\theta_p(x)\theta_p(y)\theta_p(xy)$ と書いた). ここからは y も変数であるとみなす. すなわち, $x,\ y$ を条件 $x\notin p^{\mathbb{Z}},\ y\notin p^{\mathbb{Z}}$ 及び $xy\notin p^{\mathbb{Z}}$ を満たす $\mathbb{C}^\times$ の変数とすると, 上の恒等式から

$$\begin{aligned}\bullet\ 0&=D_xD_y\{E_1(x)E_1(y)-E_1(y)E_1(xy)-E_1(x)E_1(xy)-E_1(xy)+D_p\log\theta_p(x)\theta_p(y)\theta_p(xy)\}\\&=E_2(x)E_2(y)-D_y\{E_1(y)E_2(xy)\}-D_x\{E_1(x)E_2(xy)\}-E_3(xy)-D_pE_2(xy)\\&=E_2(x)E_2(y)-E_2(y)E_2(xy)-E_1(y)E_3(xy)-E_2(x)E_2(xy)-E_1(x)E_3(xy)\\&\quad-E_3(xy)-D_pE_2(xy)\end{aligned}$$

である. これを更に x で Euler 微分すると

$$\begin{aligned}\bullet\ 0&=E_3(x)E_2(y)-E_2(y)E_3(xy)-E_1(y)E_4(xy)-E_3(x)E_2(xy)-E_2(x)E_3(xy)\\&\quad-E_2(x)E_3(xy)-E_1(x)E_4(xy)-E_4(xy)-D_pE_3(xy)\\&=E_3(x)E_2(y)-E_2(y)E_3(xy)-E_3(x)E_2(xy)-2E_2(x)E_3(xy)\\&\quad-E_1(x)E_4(xy)-E_1(y)E_4(xy)-E_4(xy)-D_pE_3(xy)\end{aligned}$$

を得る. ここで x と y を入れ換えると

$$\begin{aligned}\bullet\ 0&=E_3(y)E_2(x)-E_2(x)E_3(xy)-E_3(y)E_2(xy)-2E_2(y)E_3(xy)\\&\quad-E_1(y)E_4(xy)-E_1(x)E_4(xy)-E_4(xy)-D_pE_3(xy)\end{aligned}$$

であるが, これらの差をとることで次を得る：

$$\bullet\ E_3(x)E_2(y)-E_3(y)E_2(x)+E_3(y)E_2(xy)+E_3(xy)E_2(y)-E_3(xy)E_2(x)-E_3(x)E_2(xy)=0.$$

ここで $z=1/xy$ と書くと, $E_2\big(z^{-1}\big)=E_2(z)$ 及び $E_3\big(z^{-1}\big)=-E_3(z)$ から

$$\bullet\ E_3(x)E_2(y)-E_3(y)E_2(x)+E_3(y)E_2(z)-E_3(z)E_2(y)+E_3(z)E_2(x)-E_3(x)E_2(z)=0$$

であるが, これは行列式によって次のように表すことができる：

- $x,\ y,\ z\in\mathbb{C}^\times\backslash p^{\mathbb{Z}}$ で $xyz=1$ なるものについて次が成り立つ：

$$\bullet\ \begin{vmatrix}E_3(x;p) & E_2(x;p) & 1\\ E_3(y;p) & E_2(y;p) & 1\\ E_3(z;p) & E_2(z;p) & 1\end{vmatrix}=0.$$

ここで, Weierstrass の $\wp$-関数 $\wp(u;\tau)$ と Eisenstein 関数の間の関係である

$$\bullet\ \frac{1}{(2\pi i)^2}\wp(u;\tau)=E_2\Big(e^{2\pi iu};e^{2\pi i\tau}\Big)+\frac{1}{12}-2c_1\Big(e^{2\pi i\tau}\Big),\quad \bullet\ \frac{1}{(2\pi i)^3}\wp'(u;\tau)=E_3\Big(e^{2\pi iu};e^{2\pi i\tau}\Big)$$

を認めると (τ は $\mathrm{Im}(\tau)>0$ なる複素数), 次が成り立つことがわかる：

- $\mathrm{Im}(\tau)>0$ なる τ に対し $L_\tau:=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau=\{m+n\tau\in\mathbb{C}\mid m,n\in\mathbb{Z}\}$ とおく. u_1, u_2, $u_3\in\mathbb{C}\backslash L_\tau$ で $u_1+u_2+u_3=0$ なるものについて次が成り立つ：

$$\bullet\ \begin{vmatrix} \wp'(u_1;\tau) & \wp(u_1;\tau) & 1 \\ \wp'(u_2;\tau) & \wp(u_2;\tau) & 1 \\ \wp'(u_3;\tau) & \wp(u_3;\tau) & 1 \end{vmatrix}=0.$$

これが Weierstrass の $\wp$-関数の加法定理として知られているものである.