

楢円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示：再訪

齋藤 洋介

yousukesaitou7@gmail.com

2026 年 7 月 6 日

はじめに

「楢円 Ruijsenaars 系」は 1987 年に Ruijsenaars によって導入された量子多体系である。この系は互いに可換な保存量を十分にたくさん持っており (従って, 楢円 Ruijsenaars 系は Liouville 可積分である), それら (を適当に書き換えたもの) は「楢円 Ruijsenaars 作用素」と呼ばれている。これらはテータ関数

$$\bullet \theta_p(z) := (z; p)_\infty (pz^{-1}; p)_\infty = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - zp^n)(1 - z^{-1}p^{n+1})$$

を係数に含む次のような格好をした q -差分作用素である: $T_{q,z}f(z) = f(qz)$ を q -シフト作用素とするとき, $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ 及び $r \in \{0, 1, \dots, N\}$ に対し

$$\bullet D_N^{(r)}(p) := t^{\frac{r(r-1)}{2}} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ \#I = r}} \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} \frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)} \prod_{k \in I} T_{q, x_k}.$$

実は, これら $D_N^{(0)}(p), D_N^{(1)}(p), \dots, D_N^{(N)}(p)$ は「自由場表示」することが可能である (ボソンの代数の言葉によって実現できるということ). 本文書では, 楢円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示によって何がどの程度わかるのか, なるべく初等的に解説していく.

謝辞

本研究は, 文部科学省による「特色ある共同研究拠点の整備の推進事業 JPMXP0723833165」, 及び「大阪公立大学戦略的研究推進事業 (国際研究拠点形成支援)」の助成を受けたものである.

2026 年 7 月 齋藤 洋介

目次

第 1 章	Introduction	6
1.1	背景について	6
1.2	楕円 Ruijsenaars 作用素について	17
1.3	本文書の内容	20
1.4	補足：楕円 Ruijsenaars 作用素が作用する空間	21
第 2 章	楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示	27
2.1	ウォーミングアップ：elliptic な vertex operator	27
2.2	1 階の楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示	37
2.3	高階の楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示	41
2.4	補足：正規順序積の脱着	44
第 3 章	楕円 Ruijsenaars 作用素たちの可換性と自由場表示	49
3.1	基本的アイディア	49
3.2	Ruijsenaars 恒等式	51
3.3	補足：証明が完了したこと	59
3.4	Feigin-Odesskii の楕円シャッフル代数との関係	60
第 4 章	楕円 Ruijsenaars 作用素の核関数の満たす恒等式	67
4.1	基本的アイディアと主結果	67
4.2	「三角の場合」には「お釣り」はない !!	72
4.3	楕円 Calogero-Moser 系との比較	73
第 5 章	三角の場合	77
5.1	準備 1：何が成り立つのか	77
5.2	準備 2：ある積分	81
5.3	Macdonald 作用素の自由場表示	90
第 6 章	付録	92
6.1	付録 1：Macdonald 多項式について	92
6.2	付録 2：「テータ関数とデルタ関数の関係」の要約	93
6.3	付録 3：楕円 Ruijsenaars 作用素が空間 $\Lambda_N(p)$ に作用すること	103
6.4	付録 4：楕円 Calogero-Moser 系に関する計算	108

予備知識と記号について

本文書では、共形場理論の入門書の序盤にて解説されるような内容、例えば Virasoro 代数の自由場表示やこれに関連した vertex operator の計算などの知識を、ある程度は仮定している。

- $|q| < 1$ なる複素数 q 及び $z \in \mathbb{C}$ に対し

$$\bullet (z; q)_\infty := \prod_{n=0}^{\infty} (1 - zq^n)$$

と定め、これを q -無限積と呼ぶ。これについて

$$\bullet (z; q)_\infty = (1 - z) \cdot (qz; q)_\infty$$

が成り立つ。また、 q, p を $|q| < 1, |p| < 1$ なる複素数とすると、 $z \in \mathbb{C}$ に対し

$$\bullet (z; q, p)_\infty := \prod_{m, n \geq 0} (1 - zq^m p^n)$$

とおき、これを 2 重無限積と呼ぶ。これについて次が成り立つ：

$$\bullet (qz; q, p)_\infty = \frac{(z; q, p)_\infty}{(z; p)_\infty}, \quad \bullet (pz; q, p)_\infty = \frac{(z; q, p)_\infty}{(z; q)_\infty}.$$

- $|p| < 1$ なる複素数 $p \in \mathbb{C}^\times$ に対し

$$\bullet \theta_p(z) := (z; p)_\infty (pz^{-1}; p)_\infty \quad (z \in \mathbb{C}^\times)$$

と定め、これをテータ関数と呼ぶ。これは次を満たす：

$$\bullet \theta_p(pz) = \theta_p(z^{-1}) = -z^{-1} \theta_p(z).$$

テータ関数のゼロ点の全体は $\{z \in \mathbb{C}^\times \mid \theta_p(z) = 0\} = p^{\mathbb{Z}} := \{p^n \in \mathbb{C}^\times \mid n \in \mathbb{Z}\}$ である。

- $|q| < 1, |p| < 1$ なる複素数 $q, p \in \mathbb{C}^\times$ に対し、 $\mathbb{C}^\times$ 上の有理型関数 $\Gamma_{q,p}(z)$ を

$$\bullet \Gamma_{q,p}(z) := \frac{(qpz^{-1}; q, p)_\infty}{(z; q, p)_\infty}$$

と定め、これを楕円ガンマ関数と呼ぶ。これは次を満たす：

$$\bullet \Gamma_{q,p}(qz) = \theta_p(z) \Gamma_{q,p}(z), \quad \bullet \Gamma_{q,p}(pz) = \theta_q(z) \Gamma_{q,p}(z).$$

- $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V の元を係数とする不定元 z の多項式の全体を

$$\bullet V[z] := \left\{ \sum_{k \geq 0} v_k z^k \text{ (有限和)} \mid v_k \in V \text{ (} k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{)} \right\}$$

と書く．また， $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V の元を係数とする形式べき級数の空間を

$$\bullet V[[z]] := \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k \mid v_k \in V \ (k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \right\}, \quad \bullet V[[z, z^{-1}]] := \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k z^k \mid v_k \in V \ (k \in \mathbb{Z}) \right\}$$

などと書く ($V[[z]]$ の元は z の 0 以上のべきのみを含み, $V[[z, z^{-1}]]$ の元は z の正べき, 負べきの両方をいくらでも含み得る).

• 0 以上の整数の列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$ で $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ ($i \geq 1$), 及び λ の 0 でない成分は有限個であるものを分割という.

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$ が分割であるとき, ある $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ がただ 1 つに決まって $\lambda_i \neq 0$ ($1 \leq i \leq \ell$), $\lambda_i = 0$ ($i \geq \ell+1$) であるが, この ℓ を分割 λ の長さといい $\ell(\lambda)$ と書く.

分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ に対し $|\lambda| := \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i$ を λ の大きさと呼ぶ. 分割の全体を $\mathcal{P}$ と書く. $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, $\ell(\lambda) \leq N$ である分割の全体を $\mathcal{P}_N$ と書き, $\mathcal{P}_N \subset (\mathbb{Z}_{\geq 0})^N$ とみなす.

• 形式べき級数 $\tilde{f}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n \in \mathbb{C}[[z, z^{-1}]]$ の定数項 c_0 をとる操作を

$$\bullet \text{CT}_z \left[\tilde{f}(z) \right] = c_0$$

と書く. 若干の記号の乱用であるが, 関数 $f(z)$ を積分路 C ($\leftarrow \mathbb{C}$ の原点を反時計回りに取り囲むもの) を適当にとって積分した $\oint_C \frac{dz}{2\pi iz} f(z)$ も

$$\bullet \text{CT}_z[f(z)] = \oint_C \frac{dz}{2\pi iz} f(z)$$

と書くことがある (6.2 「付録 2: 『テータ関数とデルタ関数の関係』の要約」も参考にしてほしい).

Introduction

本文書の目標は「楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示」を初等的に紹介することであるが、これそのものの内容に入っていく前に、なぜそのようなことを考えるのか、こういった内容なのかということを楽しみに説明する。

1.1 背景について

なぜ筆者が「楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示」について考えるようになったのか、その流れについてもある程度は説明したい気持ちがあるので、関連する事柄を述べておく。

2012 年 4 月頃、東北大学の博士課程の学生 (D1) であった筆者は、詳しい前後関係は覚えていないものの、「Feigin-Hashizume-Hoshino-Shiraishi-Yanagida」として知られる

- B. Feigin, K. Hashizume, A. Hoshino, J. Shiraishi, S. Yanagida “A commutative algebra on degenerate $\mathbb{CP}^1$ and Macdonald polynomials” (Journal of mathematical physics 50.9 (2009))

を読み始めた (↑これを以下では「FHHSY」と書く)。当時の筆者はこの論文で初めて「Macdonald 作用素の自由場表示」を知り (これについては後述する)、これと「Ding-Iohara 代数」 (最近は「Ding-Iohara-Miki 代数」とか「quantum toroidal gl_1 algebra」などと呼ばれる) が関係していることを知った。更に、Macdonald 作用素の楕円関数版である「楕円 Ruijsenaars 作用素」の存在もここで初めて目にし、その「自由場表示」も考えられているのを認めた。ただ、例の「FHHSY」の後半を見ればわかるように、この「楕円の場合」の計算はなかなか思うようには進まないということも見てとれた。

「FHHSY」について補足しておく。あくまでも筆者なりの理解であるが、この論文では「Macdonald 作用素の自由場表示」と『シャッフル代数』によってあるボソンの作用素の可換族が得られ、それは『Macdonald 作用素と可換な q -差分作用素たちの成す可換な代数』に対応している」ということが述べられている。更に、「FHHSY」ではこの「楕円化」も試みられている。すなわち、(quasi-Hopf twist と呼ばれる操作を経て作られた) 楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示と「楕円シャッフル代数」によって、あるボソンの作用素の可換族が構成されているのである。その様子を見た当時の筆者は「それでは、その可換族は『楕円 Ruijsenaars 作用素と可換な q -差分作用素たちの成す可換な代数』に実際に対応しているのだろうか？」という風な疑問を感じた。「では結局、『楕円の場合』はどうなっているのか？」という問いが、筆者の研究の原動力となった。

上に出てきた「シャッフル代数」や「楕円シャッフル代数」については、第 3 章の 3.4「Feigin-Odesskii の楕円シャッフル代数との関係」を参照されたい。

さて、当時の筆者はというと、「FHHSY」を読もうともがいているうちに 2012 年の夏休み直前になってしまい、「何か論文のネタを見つけなくては」と切羽詰まっていた筆者は

「楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示や Ding-Iohara 代数の楕円化を調べる」

ということをお願い始めた。何か新しいことを自分でやろうと思ったとき、未解決な事柄が存在する楕円 Ruijsenaars 作用素の方面に進むしかないと、当時の筆者は半ば思い込んでいたのである。

関連する事柄を少し整理しておく。Ruijsenaars は次の論文において「楕円 Ruijsenaars 系」と呼

ばれる量子多体系を導入した：

- S.N.M. Ruijsenaars “Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities” (Communications in Mathematical Physics 110.2 (1987): 191-213)

この論文で Ruijsenaars が導入したハミルトニアンは, q, t を $|q|<1, |t|<1$ なる複素数, $T_{q,z}$ によって $T_{q,z}f(z)=f(qz)$ と働く q -シフト作用素を表すとき

$$\bullet H_N^R(q, t, p) := \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \left\{ \frac{\theta_p(tx_i/x_j) \theta_p(qt^{-1}x_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j) \theta_p(qx_i/x_j)} \right\}^{1/2} T_{q, x_i}$$

というものである (記号は筆者なりに変えている).

楢円 Ruijsenaars 系は「楢円 Calogero-Moser 系」と呼ばれる量子多体系の q -変形 (q -差分化) として導入された. これに少し触れておく. $D_z = z \frac{\partial}{\partial z}$ とおき (Euler 微分), $E_k(z) := -D_z^k \log \theta_p(z)$ ($k \in \mathbb{Z}_{>0}$) を Eisenstein の楢円関数とする (ここでは $E_2(z)$ が出てくる). 楢円 Calogero-Moser 系のハミルトニアンとは, $\beta \in \mathbb{C}^\times$ を含む

$$\bullet H_N^{\text{CM}}(\beta, p) := \sum_{i=1}^N D_i^2 - \beta(\beta-1) \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} E_2(x_i/x_j)$$

なる $x_1, \dots, x_N$ の適当な関数に働く微分作用素のことである ($D_i = D_{x_i}$ とした). 結果のみ述べると, 楢円 Calogero-Moser 系のハミルトニアン $H_N^{\text{CM}}(\beta, p)$ は, 楢円 Ruijsenaars 系のハミルトニアン $H_N^R(q, t, p)$ において $q=e^h, t=q^\beta=e^{\beta h}$ とした上での「 $\hbar$ -展開」の 2 次の項として現れる: $T_{q,z}=q^{D_z}=e^{\hbar D_z}$ に注意すると

$$\begin{aligned} \bullet H_N^R(q, t, p) &= \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \left\{ \frac{\theta_p(tx_i/x_j) \theta_p(qt^{-1}x_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j) \theta_p(qx_i/x_j)} \right\}^{1/2} T_{q, x_i} \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ 1 - \frac{\beta(\beta-1)}{2} \sum_{j \neq i} E_2(x_i/x_j) \hbar^2 \right\} \times \left(1 + \hbar D_i + \frac{\hbar^2}{2} D_i^2 \right) + O(\hbar^3) \\ &= N + \sum_{i=1}^N D_i \hbar + \frac{1}{2} H_N^{\text{CM}}(\beta, p) \hbar^2 + O(\hbar^3). \end{aligned}$$

こういった背景については, 上に挙げた Ruijsenaars の論文や, 例えば次の論文やそこで引用されている文献を参照されたい：

- M. Hallnäs “Calogero-Moser-Sutherland systems” (arXiv:2312.12932 (2023))

そもそも「なぜ量子多体系のハミルトニアンとして q -差分作用素が現れるのか？」と感じている読者がいるかもしれない. これに対しては, 例えば「運動量が指数関数の肩に乗っているような (古典) ハミルトニアンで記述される系の正準量子化の結果として, q -差分作用素は現れ得る」ということは言える. そういった具体例としては「SIR モデルの正準量子化」がある (SIR モデルとは感染症の数理モデルの一種である. 今回の話とは直接は関係ない). これについては筆者による次の文書を参照してほしい：

- 齋藤 洋介「SIR モデルの量子力学」(OCAMI Preprint Series, 2025)

$H_N^R(q, t, p)$ において $p=0$ とおいたものを

$$\bullet H_N^{\Delta R}(q, t) := H_N^R(q, t, 0) = \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \left\{ \frac{(tx_i - x_j)(qt^{-1}x_i - x_j)}{(x_i - x_j)(qx_i - x_j)} \right\}^{1/2} T_{q, x_i}$$

と書く (ここで $\theta_p(z) \Big|_{p=0} = 1-z$ を使った). この $H_N^{\Delta R}(q, t)$ で記述される系を「三角 Ruijsenaars 系」と呼んでおく.

何かが「三角」なのかというと、テータ関数 $\theta_p(z) = (z; p)_\infty (pz^{-1}; p)_\infty$ について $\theta_p(z) \Big|_{p=0} = 1-z$ であるが、これを $z=e^{2\pi i u}$ として加法的な変数 u の関数と見ると、 $1-z=1-e^{2\pi i u}$ は u の三角関数である。この意味で、 $H_N^{\triangle R}(q, t) = H_N^R(q, t, 0)$ は、ポテンシャル関数が三角関数に退化していると思える。

ここで、楕円ガンマ関数

$$\bullet \Gamma_{q,p}(z) := \frac{(qpz^{-1}; q, p)_\infty}{(z; q, p)_\infty} = \prod_{m,n \geq 0} \frac{1-z^{-1}q^{m+1}p^{n+1}}{1-zq^m p^n}$$

によって書かれる関数 $\Psi_N(\mathbf{x}; q, t, p)$ を

$$\bullet \Psi_N(\mathbf{x}; q, t, p) := \prod_{1 \leq i \neq j \leq N} \left\{ \frac{\Gamma_{q,p}(tx_i/x_j)}{\Gamma_{q,p}(x_i/x_j)} \right\}^{1/2}$$

と定め、 $H_N^R(q, t, p)$ とかけ算作用素 $\Psi_N(\mathbf{x}; q, t, p) \times$ の積 $H_N^R(q, t, p) \circ \Psi_N(\mathbf{x}; q, t, p)$ を調べる。まず

$$\bullet H_N^R(q, t, p) \circ \Psi_N(\mathbf{x}; q, t, p) = \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \left\{ \frac{\theta_p(tx_i/x_j) \theta_p(qt^{-1}x_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j) \theta_p(qx_i/x_j)} \right\}^{1/2} \{T_{q,x_i} \Psi_N(\mathbf{x}; q, t, p)\} T_{q,x_i}$$

である。ここで $i \in \{1, \dots, N\}$ を 1 つとるとき

$$\bullet \Psi_N(\mathbf{x}; q, t, p) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \left\{ \frac{\Gamma_{q,p}(tx_i/x_j)}{\Gamma_{q,p}(x_i/x_j)} \cdot \frac{\Gamma_{q,p}(tx_j/x_i)}{\Gamma_{q,p}(x_j/x_i)} \right\}^{1/2} \times (x_i \text{ を含まない部分})$$

なので、楕円ガンマ関数について $\Gamma_{q,p}(qz) = \theta_p(z) \Gamma_{q,p}(z)$ であることによって

$$\begin{aligned} \bullet T_{q,x_i} \Psi_N(\mathbf{x}; q, t, p) &= \prod_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \left\{ \frac{\theta_p(tx_i/x_j) \theta_p(q^{-1}x_j/x_i)}{\theta_p(x_i/x_j) \theta_p(q^{-1}tx_j/x_i)} \right\}^{1/2} \times \Psi_N(\mathbf{x}; q, t, p) \\ &= t^{\frac{-N+1}{2}} \prod_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \left\{ \frac{\theta_p(tx_i/x_j) \theta_p(qx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j) \theta_p(qt^{-1}x_i/x_j)} \right\}^{1/2} \times \Psi_N(\mathbf{x}; q, t, p) \end{aligned}$$

がわかる。こうして

$$\bullet H_N^R(q, t, p) \circ \Psi_N(\mathbf{x}; q, t, p) = t^{\frac{-N+1}{2}} \Psi_N(\mathbf{x}; q, t, p) \circ \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)} T_{q,x_i}$$

が成り立つが、ここに現れた

$$\bullet D_N(p) := \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)} T_{q,x_i}$$

が「(1 階の) 楕円 Ruijsenaars 作用素」と呼ばれているものである。

また、上で得られた $H_N^R(q, t, p)$ と $D_N(p)$ の関係において $p=0$ とおくことを考える。楕円ガンマ関数 $\Gamma_{q,p}(z)$ について $\Gamma_{q,p}(z) \Big|_{p=0} = \frac{1}{(z; q)_\infty}$ であるので、 $\Psi_N^{\triangle}(\mathbf{x}; q, t) := \Psi_N(\mathbf{x}; q, t, 0)$ と書くと

$$\bullet \Psi_N^{\triangle}(\mathbf{x}; q, t) = \prod_{1 \leq i \neq j \leq N} \left\{ \frac{(x_i/x_j; q)_\infty}{(tx_i/x_j; q)_\infty} \right\}^{1/2}$$

である。こうするとき

$$\bullet H_N^{\Delta R}(q, t) \circ \Psi_N^{\Delta}(\mathbf{x}; q, t) = t^{\frac{-N+1}{2}} \Psi_N^{\Delta}(\mathbf{x}; q, t) \circ \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} T_{q, x_i}$$

であるが、ここに出ている

$$\bullet D_N := D_N(0) = \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} T_{q, x_i}$$

は「(1 階の) Macdonald 作用素」と呼ばれる。すなわち $D_N(p) \Big|_{p=0} = D_N$ ということであるが、これは「Macdonald 作用素 D_N は楕円 Ruijsenaars 作用素 $D_N(p)$ の三角極限をとったもの」と読めるし、逆向きに考えて「楕円 Ruijsenaars 作用素 $D_N(p)$ は Macdonald 作用素 D_N の楕円化である」とも見るができる。

以上のように、楕円 Ruijsenaars 系のハミルトニアン $H_N^R(q, t, p)$ と楕円 Ruijsenaars 作用素 $D_N(p)$ は

$$\bullet H_N^R(q, t, p) \circ \Psi_N(\mathbf{x}; q, t, p) = t^{\frac{-N+1}{2}} \Psi_N(\mathbf{x}; q, t, p) \circ D_N(p)$$

なる共役変換で結びついており、 $H_N^{\Delta R}(q, t)$ と Macdonald 作用素 D_N についても同様である。

ここで三角 Ruijsenaars 系のハミルトニアン $H_N^{\Delta R}(q, t)$ と Macdonald 作用素 D_N の固有関数について少し考える。もし仮に D_N の固有関数が何か見つかったとすれば、それに $\Psi_N^{\Delta}(\mathbf{x}; q, t)$ をかければ $H_N^{\Delta R}(q, t)$ の固有関数になる。実際、ある関数 $f(\mathbf{x})$ があって $D_N f(\mathbf{x}) = \varepsilon f(\mathbf{x})$ であったとすれば (ε は固有値である)

$$\bullet H_N^{\Delta R}(q, t) \Psi_N^{\Delta}(\mathbf{x}; q, t) f(\mathbf{x}) = t^{\frac{-N+1}{2}} \Psi_N^{\Delta}(\mathbf{x}; q, t) D_N f(\mathbf{x}) = t^{\frac{-N+1}{2}} \varepsilon \Psi_N^{\Delta}(\mathbf{x}; q, t) f(\mathbf{x})$$

が成り立つ。こういったわけで、三角 Ruijsenaars 系を解く代わりに、Macdonald 作用素の固有関数を探すことにしてもよい。Macdonald 作用素の固有関数としては「Macdonald 多項式」と呼ばれるものが存在している (第 6 章「付録」の 6.1「付録 1: Macdonald 多項式について」も適宜参照してほしい)。

以下、「楕円の場合」とか「三角の場合」などの言葉を使う。Macdonald 作用素や Macdonald 多項式と関連している対象について考えるのが「三角の場合」、楕円 Ruijsenaars 作用素などと関係している存在について考えるのが「楕円の場合」である。覚えておいてほしい。

三角 Ruijsenaars 系は、その固有関数が Macdonald 多項式を用いて書けるなどのことがあるので、よく理解されていると言ってよい。また、平たく述べると、Macdonald 作用素の自由場表示 (で用いられる vertex operator たち) が Ding-Iohara-Miki 代数の表現を与えるので、そういった事柄を通じて、Macdonald 多項式 (Macdonald 対称関数と言った方が正確である) は Ding-Iohara-Miki 代数の表現と結びつく (詳しいことは以下に挙げる文献などを参照してほしい)。このことが、後に Ding-Iohara-Miki 代数の表現論と色々な「解ける模型」たちとの間の関係として発展する。例えば、位相的弦理論において分配関数の計算などに用いられる「refined topological vertex」は、Ding-Iohara-Miki 代数のある intertwining operator によって書くことができる。これについては

• H. Awata, B. Feigin, J. Shiraishi “Quantum algebraic approach to refined topological vertex” (Journal of High Energy Physics 2012.3 (2012): 1-35)

を参照されたい. より最近の文献としては

- Y. Matsuo, S. Nawata, G. Noshita, R.D. Zhu “Quantum toroidal algebras and solvable structures in gauge/string theory” (Physics Reports 1055 (2024): 1-144)

がある. このように, 「三角の場合」にはいろいろなことがよくわかっている.

一方の「楕円の場合」はというと, 2012 年当時, 楕円 Ruijsenaars 系の固有関数はよくわからない (後述する予定であるが, 2020 年に Langmann-Noumi-Shiraishi によって進展があった), 楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示は「FHHSY」にて試みられてはいるものの不明な点が残る, (quasi-Hopf twist によって作られた) Ding-Iohara-Miki 代数の楕円化とその表現をどう使ったらよいのかはあまり明らかではない, という状況にあった. そこで当時の筆者は「楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示がうまくいけば, おのずと Ding-Iohara-Miki 代数のいい具合の楕円化の表現が得られるであろうし, 楕円 Ruijsenaars 系の固有関数についても少しずつでもわかっていくであろう」と期待したのであった.

「楕円の場合は難しい」というようなことを上で述べたが, このことを見せてくれる簡単な具体例がある. 楕円 Ruijsenaars 系のハミルトニアン $H_N^R(q, t, p)$ と先に見た関数 $\Psi_N(\mathbf{x}; q, t, p)$

$$\begin{aligned} \bullet \quad H_N^R(q, t, p) &= \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \left\{ \frac{\theta_p(tx_i/x_j) \theta_p(qt^{-1}x_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j) \theta_p(qx_i/x_j)} \right\}^{1/2} T_{q, x_i}, \\ \bullet \quad \Psi_N(\mathbf{x}; q, t, p) &= \prod_{1 \leq i \neq j \leq N} \left\{ \frac{\Gamma_{q, p}(tx_i/x_j)}{\Gamma_{q, p}(x_i/x_j)} \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

について, 任意の $i \in \{1, \dots, N\}$ に対し

$$\bullet \quad T_{q, x_i} \Psi_N(\mathbf{x}; q, t, p) = t^{-\frac{N+1}{2}} \prod_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \left\{ \frac{\theta_p(tx_i/x_j) \theta_p(qx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j) \theta_p(qt^{-1}x_i/x_j)} \right\}^{1/2} \times \Psi_N(\mathbf{x}; q, t, p)$$

であることによって次が成り立つ ($\downarrow$ 今度は $H_N^R(q, t, p)$ を $\Psi_N(\mathbf{x}; q, t, p)$ に普通に作用させる):

$$\begin{aligned} \bullet \quad H_N^R(q, t, p) \Psi_N(\mathbf{x}; q, t, p) &= \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \left\{ \frac{\theta_p(tx_i/x_j) \theta_p(qt^{-1}x_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j) \theta_p(qx_i/x_j)} \right\}^{1/2} T_{q, x_i} \Psi_N(\mathbf{x}; q, t, p) \\ &= t^{-\frac{N+1}{2}} \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)} \Psi_N(\mathbf{x}; q, t, p). \end{aligned}$$

ここに現れた $\sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)}$ は $x_1, \dots, x_N$ に依存しており, 明らかに定数でない. ここで $p=0$ とおくと

$$\bullet \quad H_N^{\triangle R}(q, t) \Psi_N^{\triangle}(\mathbf{x}; q, t) = t^{-\frac{N+1}{2}} \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \Psi_N^{\triangle}(\mathbf{x}; q, t)$$

を得る. ここで $\sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} = \frac{1-t^N}{1-t}$ が知られているので (この証明は第 6 章の 6.2 「付録 2: 『テータ関数とデルタ関数の関係』の要約」の例 6.12 を参照してほしい), $H_N^{\triangle R}(q, t)$ と $\Psi_N^{\triangle}(\mathbf{x}; q, t)$ については

$$\bullet \quad H_N^{\triangle R}(q, t) \Psi_N^{\triangle}(\mathbf{x}; q, t) = t^{-\frac{N+1}{2}} \frac{1-t^N}{1-t} \Psi_N^{\triangle}(\mathbf{x}; q, t)$$

が成り立つ. このように, 「三角の場合」にはハミルトニアンの固有関数が意外と簡単に見つかるのに対し, ここにある「 $\Psi_N^{\triangle}(\mathbf{x}; q, t)$ は $H_N^{\triangle R}(q, t)$ の固有関数である」という内容が, 「楕円の場合」には

$$\bullet \quad H_N^R(q, t, p) \Psi_N(\mathbf{x}; q, t, p) = t^{-\frac{N+1}{2}} \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)} \Psi_N(\mathbf{x}; q, t, p)$$

という、簡単には理解し難いものになってしまう。こういったところに「楕円の場合」の難しさがある。

以上のような状況であった 2012 年当時, 「Macdonald 作用素の自由場表示」として次のことが知られていた。

(1) 生成元 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ と関係式

$$\bullet [a_m, a_n] = m \frac{1-q^{|m|}}{1-t^{|m|}} \delta_{m+n,0} \quad (m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

で生成される $\mathbb{C}$ -代数 $\mathcal{B}$ を考える (ボソン Fock 空間 $\mathcal{F}$ や正規順序積は標準的な流儀で定める. 詳しくは後述する). vertex operator $\phi^\Delta(z): \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}[[z, z^{-1}]]$ 及び $\phi^{\dagger\Delta}(z): \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}[[z, z^{-1}]]$ を

$$\bullet \phi^\Delta(z) := \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{1-q^n} a_{-n} \frac{z^n}{n}\right), \quad \bullet \phi^{\dagger\Delta}(z) := \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{1-q^n} a_n \frac{z^n}{n}\right)$$

によって定める. このとき, 「Macdonald 作用素の核関数」と呼ばれる

$$\bullet \Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t) := \prod_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} \frac{(tx_i y_j; q)_\infty}{(x_i y_j; q)_\infty}$$

が次のように復元される: $\phi_N^\Delta(\mathbf{x}) := \prod_{j=1}^N \phi^\Delta(x_j)$ などと書くとき

$$\bullet \langle 0 | \phi_M^{\dagger\Delta}(\mathbf{x}) \phi_N^\Delta(\mathbf{y}) | 0 \rangle = \Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t).$$

(2) vertex operator $\eta^\Delta(z): \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}[[z, z^{-1}]]$ を

$$\bullet \eta^\Delta(z) := \exp\left(-\sum_{n \neq 0} (1-t^n) a_n \frac{z^{-n}}{n}\right):$$

によって定める. $\eta^\Delta(z) \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F})[[z, z^{-1}]]$ の定数項を $\underset{z}{\text{CT}}[\eta^\Delta(z)] \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F})$ と書くとき, これによって Macdonald 作用素 D_N が次のように実現される:

$$\bullet \underset{z}{\text{CT}}[\eta^\Delta(z)] \phi_N^\Delta(\mathbf{x}) | 0 \rangle = t^{-N} \{(t-1)D_N + 1\} \phi_N^\Delta(\mathbf{x}) | 0 \rangle.$$

「Macdonald 作用素の核関数 $\Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t)$ 」なるものが現れたが, これは「Macdonald 作用素の固有関数を別の固有関数に写す積分変換の核関数」なのである. このことに軽く触れておく. まず, 核関数 $\Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t)$ は次の恒等式を満たす: $x_1, \dots, x_M$ の関数に働く Macdonald 作用素を $D_{M,\mathbf{x}}$ などと書くとき

$$\bullet t^{-M} \{(t-1)D_{M,\mathbf{x}} + 1\} \Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t) = t^{-N} \{(t-1)D_{N,\mathbf{y}} + 1\} \Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t).$$

この両辺には

$$\bullet E_N^{(1)} := t^{-N} \{(t-1)D_N + 1\}$$

なる q -差分作用素が現れているのがわかる. この記法では

$$\bullet E_{M,\mathbf{x}}^{(1)} \Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t) = E_{N,\mathbf{y}}^{(1)} \Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t)$$

である. この q -差分作用素 $E_N^{(1)}$ が何なのかについては, 第 5 章「三角の場合」を参照してほしい.

以下, $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{C}^\times)^N$ に対して $\mathbf{x}^{-1}:=(x_1^{-1}, \dots, x_N^{-1}) \in (\mathbb{C}^\times)^N$ とおき, q, t について $|q|<1, |t|<1$ であるとする. また, 重み関数 $W_N^\Delta(\mathbf{x}; q, t)$ を

$$\bullet W_N^\Delta(\mathbf{x}; q, t):= \prod_{1 \leq i \neq j \leq N} \frac{(x_i/x_j; q)_\infty}{(tx_i/x_j; q)_\infty}$$

と定める (先ほど見た $\Psi_N^\Delta(\mathbf{x}; q, t)$ と $W_N^\Delta(\mathbf{x}; q, t)=\Psi_N^\Delta(\mathbf{x}; q, t)^2$ の関係にある). ここで, N 次元トーラス

$$\bullet \mathbb{T}^N = \left\{ (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{C}^\times)^N \mid |x_i|=1 \ (1 \leq i \leq N) \right\}$$

の適当な近傍で正則な N 変数関数 $f(x_1, \dots, x_N)$ を

$$\bullet \left(I_{M,N}^\Delta f \right) (x_1, \dots, x_M) := \oint_{\mathbb{T}} \frac{dy_1}{2\pi i y_1} \cdots \oint_{\mathbb{T}} \frac{dy_N}{2\pi i y_N} \Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{-1}; q, t) W_N^\Delta(\mathbf{y}; q, t) f(y_1, \dots, y_N)$$

として M 変数関数 $\left(I_{M,N}^\Delta f \right) (x_1, \dots, x_M)$ に対応させる写像 $I_{M,N}^\Delta$ を考える. このとき, 写像 $I_{M,N}^\Delta$ について

$$\bullet E_M^{(1)} \circ I_{M,N}^\Delta = I_{M,N}^\Delta \circ E_N^{(1)}$$

が成り立つ. 実際, N 変数関数 $f(\mathbf{x})$ に対し, 核関数 $\Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t)$ の満たす恒等式によって

$$\begin{aligned} & \bullet E_M^{(1)} \left(I_{M,N}^\Delta f \right) (\mathbf{x}) \\ &= \oint_{\mathbb{T}} \frac{dy_1}{2\pi i y_1} \cdots \oint_{\mathbb{T}} \frac{dy_N}{2\pi i y_N} E_{M,\mathbf{x}}^{(1)} \Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t) \Big|_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}^{-1}} W_N^\Delta(\mathbf{y}; q, t) f(\mathbf{y}) \\ &= \oint_{\mathbb{T}} \frac{dy_1}{2\pi i y_1} \cdots \oint_{\mathbb{T}} \frac{dy_N}{2\pi i y_N} E_{N,\mathbf{y}}^{(1)} \Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t) \Big|_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}^{-1}} W_N^\Delta(\mathbf{y}; q, t) f(\mathbf{y}) \\ &= t^{-N} (t-1) \oint_{\mathbb{T}} \frac{dy_1}{2\pi i y_1} \cdots \oint_{\mathbb{T}} \frac{dy_N}{2\pi i y_N} \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{ty_i^{-1} - y_j^{-1}}{y_i^{-1} - y_j^{-1}} T_{q^{-1}, y_i} \Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{-1}; q, t) W_N^\Delta(\mathbf{y}; q, t) f(\mathbf{y}) \\ & \quad + t^{-N} \left(I_{M,N}^\Delta f \right) (\mathbf{x}) \end{aligned}$$

である ($T_{q,z} f(z) \Big|_{z \rightarrow z^{-1}} = f(qz^{-1}) = T_{q^{-1},z} f(z^{-1})$ などに注意). ここに出た積分について,

$$\bullet T_{q,y_i} W_N^\Delta(\mathbf{y}; q, t) = t^{-N+1} \prod_{j \neq i} \frac{ty_i - y_j}{y_i - y_j} \cdot \frac{qy_i - y_j}{qt^{-1}y_i - y_j} \times W_N^\Delta(\mathbf{y}; q, t) \quad (i \in \{1, \dots, N\})$$

を使うことで次のようにできる:

$$\begin{aligned} & \bullet \oint_{\mathbb{T}} \frac{dy_1}{2\pi i y_1} \cdots \oint_{\mathbb{T}} \frac{dy_N}{2\pi i y_N} \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{ty_i^{-1} - y_j^{-1}}{y_i^{-1} - y_j^{-1}} T_{q^{-1}, y_i} \Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{-1}; q, t) W_N^\Delta(\mathbf{y}; q, t) f(\mathbf{y}) \\ &= \sum_{i=1}^N \oint_{\mathbb{T}} \frac{dy_1}{2\pi i y_1} \cdots \oint_{\mathbb{T}} \frac{dy_N}{2\pi i y_N} t^{N-1} \prod_{j \neq i} \frac{t^{-1}y_i - y_j}{y_i - y_j} T_{q^{-1}, y_i} \Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{-1}; q, t) W_N^\Delta(\mathbf{y}; q, t) f(\mathbf{y}) \\ &= \sum_{i=1}^N \oint_{\mathbb{T}} \frac{dy_1}{2\pi i y_1} \cdots \oint_{\mathbb{T}} \frac{dy_N}{2\pi i y_N} t^{N-1} \prod_{j \neq i} \frac{qt^{-1}y_i - y_j}{qy_i - y_j} \Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{-1}; q, t) T_{q,y_i} \left\{ W_N^\Delta(\mathbf{y}; q, t) f(\mathbf{y}) \right\} \\ &= \oint_{\mathbb{T}} \frac{dy_1}{2\pi i y_1} \cdots \oint_{\mathbb{T}} \frac{dy_N}{2\pi i y_N} \Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{-1}; q, t) W_N^\Delta(\mathbf{y}; q, t) \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{ty_i - y_j}{y_i - y_j} T_{q,y_i} f(\mathbf{y}) = \left(I_{M,N}^\Delta D_N f \right) (\mathbf{x}). \end{aligned}$$

上のオレンジ色のものを出すために, i についての和の中で y_i を q -シフトしている. こうして

$$\bullet E_M^{(1)} \left(I_{M,N}^\Delta f \right) (\mathbf{x}) = \left(I_{M,N}^\Delta E_N^{(1)} f \right) (\mathbf{x})$$

がわかったので, 確かに $E_M^{(1)} \circ I_{M,N}^\Delta = I_{M,N}^\Delta \circ E_N^{(1)}$ である. よって, 関数 $f(\mathbf{x})$ が N 変数の q -差分作用素 $E_N^{(1)}$ の固有関数であるとき, M 変数関数 $\left(I_{M,N}^\Delta f \right) (\mathbf{x})$ は M 変数の q -差分作用素 $E_M^{(1)}$ の固有関数になっている.

一方の「楕円 Ruijsenaars 作用素」というのは

$$\bullet D_N(p) = \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)} T_{q, x_i}$$

のことであったが、この自由場表示についてはどうであろうか？ 少し触れた通り、「FHHSY」の後半では楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示が試みられていたが、いくつか不満足な点が残るのであった。「FHHSY」とはまた別の楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示で「しっくりくるもの」を作ろうと思ったら、何をどうすればよいのでであろうか？

こういったつもりで、筆者は試行錯誤を始めた (2012 年 8 月頃)。当然、Macdonald 作用素 D_N の自由場表示を参考にするしかないのであるが、その中で

「 D_N の自由場表示で使うボソンが核関数 $\Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t)$ から決まる」

ということに気がついた。よって、楕円 Ruijsenaars 作用素 $D_N(p)$ の自由場表示が可能であるのなら、「三角の場合」と同様に

「 $D_N(p)$ の自由場表示で使うボソンが “ $D_N(p)$ の核関数” から決まる」

のであらうと考えた。ところで “楕円 Ruijsenaars 作用素 $D_N(p)$ の核関数” なるものは存在するのであろうか？ 仮にそのようなものが存在するとすれば、楕円ガンマ関数 $\Gamma_{q,p}(z)$ によって書かれる

$$\bullet \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) := \prod_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} \frac{\Gamma_{q,p}(x_i y_j)}{\Gamma_{q,p}(t x_i y_j)}$$

が楕円 Ruijsenaars 作用素の核関数なのであらう、と当時の筆者は思った。実際、楕円ガンマ関数 $\Gamma_{q,p}(z) = \frac{(qpz^{-1}; q, p)_\infty}{(z; q, p)_\infty}$ について $\Gamma_{q,p}(z) \Big|_{p=0} = \frac{1}{(z; q)_\infty}$ であることから

$$\bullet \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) \Big|_{p=0} = \prod_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} \frac{\Gamma_{q,p}(x_i y_j)}{\Gamma_{q,p}(t x_i y_j)} \Big|_{p=0} = \prod_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} \frac{(t x_i y_j; q)_\infty}{(x_i y_j; q)_\infty} = \Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t)$$

なので、 $\Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p)$ は Macdonald 作用素の核関数 $\Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t)$ の楕円化であると思える。もちろん、それだけでは根拠としては不十分なのであるが、幸運なことに、そういう風に直感的に思っただけのことが実際に正しく、上に書いた核関数が Ruijsenaars の

• S.N.M. Ruijsenaars “Hilbert-Schmidt Operators vs. Integrable Systems of Elliptic Calogero-Moser Type I. The Eigenfunction Identities” (Communications in mathematical physics 286.2 (2009): 629-657)

や、Komori-Noumi-Shiraishi による

• Y. Komori, M. Noumi, J. Shiraishi “Kernel functions for difference operators of Ruijsenaars type and their applications” (SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications 5 (2009): 054)

に載っていることに気がついた。吉兆である。

楢円 Ruijsenaars 作用素の核関数を見つけたのはよかったが、ここでまた別の問題が生じた。上の $\Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p)$ であるが、これは「これまで使ってきたような vertex operator」の OPE を計算するのみでは復元できないのである。

ここにも筆者がラッキーだった点がある。トーラス上の共形場理論についていろいろと知っている読者は「いや、『 p^{L_0} (vertex operator の積)』のような格好の作用素のトレースをとればよいのでは……?」などと言いかけるかもしれない。実は、当時の筆者はそのような話を全く知らなかったのである !! 知らなかったからこそ、筆者なりにいろいろと考えることができた。

軽く述べると次のような具合である。Macdonald 作用素の核関数 $\Pi_{M,N}^{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t)$ を vertex operator によって復元したければ

$$\bullet \frac{(txy; q)_{\infty}}{(xy; q)_{\infty}} = \exp \left(\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{1-q^n} \cdot \frac{(xy)^n}{n} \right) \quad (|xy| < 1)$$

を何とかできればよい。これは

$$\bullet \phi^{\dagger \Delta}(x) \phi^{\Delta}(y) = \frac{(txy; q)_{\infty}}{(xy; q)_{\infty}} \phi^{\Delta}(y) \phi^{\dagger \Delta}(x) \quad (|xy| < 1)$$

とすれば出せる。これによって

$$\bullet \langle 0 | \phi_M^{\dagger \Delta}(\mathbf{x}) \phi_N^{\Delta}(\mathbf{y}) | 0 \rangle = \Pi_{M,N}^{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t)$$

が成り立つことがわかる。

一方の楢円 Ruijsenaars 作用素の核関数 $\Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p)$ については、 q, t, p が $|qt^{-1}p| < 1$ を満たし、 $x, y \in \mathbb{C}^{\times}$ について $|qt^{-1}p| < |xy| < 1$ であるならば

$$\bullet \frac{\Gamma_{q,p}(xy)}{\Gamma_{q,p}(txy)} = \exp \left(\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{(1-q^n)(1-p^n)} \cdot \frac{(xy)^n}{n} \right) \exp \left(\sum_{n>0} \frac{(qt^{-1}p)^n(1-t^n)}{(1-q^n)(1-p^n)} \cdot \frac{(xy)^{-n}}{n} \right)$$

とできるので、これを vertex operator によって出せればよい。ただ、ここで困ったことになる。↑このうち

$$\bullet \exp \left(\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{(1-q^n)(1-p^n)} \cdot \frac{(xy)^n}{n} \right)$$

はこれまで通りのやり方でも出せるが、もう一方の

$$\bullet \exp \left(\sum_{n>0} \frac{(qt^{-1}p)^n(1-t^n)}{(1-q^n)(1-p^n)} \cdot \frac{(xy)^{-n}}{n} \right)$$

はそういうわけにはいかない (xy の負ベキを含むので)。楢円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示を考える上で、筆者が最初に直面した問題がこれである。

こういったわけで、楢円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示にて使う vertex operator について何かしらの工夫を要するらしいということがわかった。何をどうしたら……と過ごすうちに、筆者は次のようなことを思いついた (2012 年 8 月中旬頃)。先に述べた通り、 $|qt^{-1}p| < 1$ かつ $|qt^{-1}p| < |xy| < 1$ ならば

$$\bullet \frac{\Gamma_{q,p}(xy)}{\Gamma_{q,p}(txy)} = \exp \left(\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{(1-q^n)(1-p^n)} \cdot \frac{(xy)^n}{n} \right) \exp \left(\sum_{n>0} \frac{(qt^{-1}p)^n(1-t^n)}{(1-q^n)(1-p^n)} \cdot \frac{(xy)^{-n}}{n} \right)$$

なのであるから、 $\{a_n^{\dagger}\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ 及び $\{b_n^{\dagger}\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ という 2 組の生成元で

$$\begin{aligned}
& \bullet \left[\overset{\text{red}}{a}_m^{\dagger}, \overset{\text{red}}{a}_n^{\dagger} \right] = m \frac{(1-q^{|m|})(1-p^{|m|})}{1-t^{|m|}} \delta_{m+n,0} \quad (m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}), \\
& \bullet \left[\overset{\text{blue}}{b}_m^{\dagger}, \overset{\text{blue}}{b}_n^{\dagger} \right] = m \frac{(1-q^{|m|})(1-p^{|m|})}{(qt^{-1}p)^{|m|}(1-t^{|m|})} \delta_{m+n,0} \quad (m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})
\end{aligned}$$

を満たすもので生成されるボソンの代数を使えばよいのではないか？ これらを用いて

$$\begin{aligned}
& \bullet \phi^{\dagger}(z; p) := \exp \left(\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{(1-q^n)(1-p^n)} \overset{\text{red}}{a}_{-n}^{\dagger} \frac{z^n}{n} \right) \exp \left(\sum_{n>0} \frac{(qt^{-1}p)^n (1-t^n)}{(1-q^n)(1-p^n)} \overset{\text{blue}}{b}_{-n}^{\dagger} \frac{z^{-n}}{n} \right), \\
& \bullet \phi^{\dagger}(z; p) := \exp \left(\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{(1-q^n)(1-p^n)} \overset{\text{red}}{a}_n^{\dagger} \frac{z^n}{n} \right) \exp \left(\sum_{n>0} \frac{(qt^{-1}p)^n (1-t^n)}{(1-q^n)(1-p^n)} \overset{\text{blue}}{b}_n^{\dagger} \frac{z^{-n}}{n} \right)
\end{aligned}$$

とし, 更に $\phi_N^{\dagger}(\mathbf{x}; p) := \prod_{j=1}^N \phi^{\dagger}(x_j; p)$ などとすれば

$$\bullet \langle 0 | \phi_M^{\dagger}(\mathbf{x}; p) \phi_N^{\dagger}(\mathbf{y}; p) | 0 \rangle = \prod_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} \frac{\Gamma_{q,p}(x_i y_j)}{\Gamma_{q,p}(t x_i y_j)} = \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p)$$

である, としてよいであろう (ボソン Fock 空間や正規順序積は標準的な流儀で定めるとする).

更に, 形式的には次のこともわかった. Macdonald 作用素の自由場表示において使われた

$$\bullet \eta^{\Delta}(z) = \exp \left(- \sum_{n \neq 0} (1-t^n) a_n \frac{z^{-n}}{n} \right) :$$

を参考にして

$$\bullet \eta^{\dagger}(z; p) := \exp \left(- \sum_{n \neq 0} \frac{1-t^n}{1-p^{|n|}} \overset{\text{red}}{a}_n^{\dagger} \frac{z^{-n}}{n} \right) \exp \left(- \sum_{n \neq 0} \frac{1-t^{-n}}{1-p^{|n|}} p^{|n|} \overset{\text{blue}}{b}_n^{\dagger} \frac{z^n}{n} \right) :$$

と定めるとき, これによって楕円 Ruijsenaars 作用素が次のようにして出せる: $\eta_{\pm}^{\dagger}(z; p)$ を

$$\bullet \eta_{\pm}^{\dagger}(z; p) := \exp \left(- \sum_{\pm n > 0} \frac{1-t^n}{1-p^{|n|}} \overset{\text{red}}{a}_n^{\dagger} \frac{z^{-n}}{n} \right) \exp \left(- \sum_{\pm n > 0} \frac{1-t^{-n}}{1-p^{|n|}} p^{|n|} \overset{\text{blue}}{b}_n^{\dagger} \frac{z^n}{n} \right)$$

とおくとき (この記法では $\eta^{\dagger}(z; p) = \eta_{-}^{\dagger}(z; p) \eta_{+}^{\dagger}(z; p)$ である)

$$\begin{aligned}
& \bullet \text{CT}_z \left[\eta^{\dagger}(z; p) - t^{-N} \eta_{-}^{\dagger}(z; p) \eta_{+}^{\dagger}(p^{-1}z; p) \right] \phi_N^{\dagger}(\mathbf{x}; p) | 0 \rangle \\
& = \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_{\infty}^2} D_N(p) \phi_N^{\dagger}(\mathbf{x}; p) | 0 \rangle.
\end{aligned}$$

以上で何をしたいのかというと, 楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示のために, vertex operator を楕円化したのである. 以下, そのようなタイプの vertex operator を「elliptic な vertex operator」と呼ぶ.

ただ、ここで使った「elliptic な vertex operator」 $\eta^{\pm}(z; p)$ などは、実は well-defined でないのである。大雑把に述べると、 z の形式べき級数

$$\bullet \tilde{f}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n z^n \in \mathbb{C}[[z, z^{-1}]], \quad \bullet \tilde{g}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} B_n z^n \in \mathbb{C}[[z, z^{-1}]]$$

に対して、これらの積 “ $\tilde{f}(z)\tilde{g}(z)$ ” は一般には定義されない。実際、形式的には

$$“\tilde{f}(z)\tilde{g}(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k z^k \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} B_{\ell} z^{\ell} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n \sum_{\substack{k, \ell \in \mathbb{Z} \\ k+\ell=n}} A_k B_{\ell}”$$

とできるように思われるが、ここに見える

$$“\sum_{\substack{k, \ell \in \mathbb{Z} \\ k+\ell=n}} A_k B_{\ell}”$$

は一般には収束しない。これと同様の状況が $\eta^{\pm}(z; p)$ においても生じているのである。この問題をどうやって解決するのかについては後述する。

「elliptic な vertex operator の well-definedness」は後述することとして、筆者が経験した出来事の記述に戻る。今回はあまり細かなことに触れるのは止めにするが、上の $\eta^{\pm}(z; p)$ などを用いることで「Ding-Iohara-Miki 代数のある楕円化の表現」とみなせるものが出てくることがわかった。そこで、「筆者のやり方で表現が得られるような Ding-Iohara-Miki 代数の楕円化も考えられるであろう」というつもりで

「楕円 Ding-Iohara-Miki 代数」

なるものを提唱した（正直、提唱はしたものの……という感じである）。ここまで述べた楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示や楕円 Ding-Iohara-Miki 代数についての内容をまとめたものを 2013 年 1 月に arXiv にアップした（これが筆者の初めての論文である）。雑誌に載ったのは次のものである：

- Yosuke Saito “Elliptic Ding-Iohara Algebra and the Free Field Realization of the Elliptic Macdonald Operator” (Publ. Res. Inst. Math. Sci. 50 (2014), no.3, pp.411-455)

楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示において特徴的だったのは「使うボソンの生成元を 2 組に増やし、vertex operator を楕円関数的に変形する」ということであったが、これと本質的に同じアイデアを Langmann が次の論文に書いていたのである：

- E. Langmann “Second quantization of the elliptic Calogero-Sutherland model” (Communications in mathematical physics 247.2 (2004): 321-351)

Langmann がこの論文で考えたのは楕円 Calogero-Moser 系のハミルトニアンの自由場表示であった。この論文が出たのが 2004 年、筆者が楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示について考え始めたのが 2012 年である。そういうわけで、『vertex operator の楕円化』というアイデア自体は Langmann が先に思いついていた」ということは言っておきたい。

筆者が楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示について考え始めた 2012 年頃からはだいぶ時間が経ってしまったが、今回、先に少し触れた「elliptic な vertex operator の well-definedness」もある程度は無難にいえるようになり、1 階のみならず高階の楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示も可能になった（第 2 章「楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示」を参照）。そういったわけで、本文書のタイトルを「楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示：再訪」とした。

1.2 楕円 Ruijsenaars 作用素について

これまで $D_N(p)$ を「楕円 Ruijsenaars 作用素」と呼んできたが, Ruijsenaars は更に

$$\bullet D_N^{(r)}(p) := t^{\frac{r(r-1)}{2}} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ \#I=r}} \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} \frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)} \prod_{k \in I} T_{q, x_k}$$

なる q -差分作用素たち $D_N^{(0)}(p), D_N^{(1)}(p), \dots, D_N^{(N)}(p)$ も導入した ($D_N^{(0)}(p)=1, D_N^{(1)}(p)=D_N(p)$ である). $D_N^{(r)}(p)$ は「 r 階の楕円 Ruijsenaars 作用素」と呼ばれる ($D_N^{(r)}(p)$ は q -差分作用素としては r 階である).

「 r 階の楕円 Ruijsenaars 作用素 $D_N^{(r)}(p)$ 」 ($r \in \{0, 1, \dots, N\}$) の「三角極限」である

$$\bullet D_N^{(r)} := D_N^{(r)}(0) = t^{\frac{r(r-1)}{2}} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ \#I=r}} \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \prod_{k \in I} T_{q, x_k} \quad (r \in \{0, 1, \dots, N\})$$

を「 r 階の Macdonald 作用素」と呼ぶ.

$r \in \{0, 1, \dots, N\}$ 及び $\#I=r$ なる $I \subset \{1, \dots, N\}$ に対し

$$\bullet A_I^{(r)}(\mathbf{x}; p) := t^{\frac{r(r-1)}{2}} \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} \frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)}$$

とおき (1 元集合 $\{i\} \subset \{1, \dots, N\}$ に対する $A_{\{i\}}^{(1)}(\mathbf{x}; p)$ は単に $A_i(\mathbf{x}; p)$ と書く), 今後は楕円 Ruijsenaars 作用素 $D_N^{(r)}(p)$ ($r \in \{0, 1, \dots, N\}$) を次のように表記する:

$$\bullet D_N^{(r)}(p) = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ \#I=r}} A_I^{(r)}(\mathbf{x}; p) \prod_{i \in I} T_{q, x_i}.$$

以下, 楕円 Ruijsenaars 作用素についてわかっていることを軽く述べる.

命題 1.1 (楕円 Ruijsenaars 作用素たちの可換性). 楕円 Ruijsenaars 作用素たちは互いに可換である: 任意の $k, \ell \in \{0, 1, \dots, N\}$ に対し $[D_N^{(k)}(p), D_N^{(\ell)}(p)] = 0$.

これは, 楕円 Ruijsenaars 系の「Liouville 可積分性」を意味する. これは次の「Ruijsenaars 恒等式」から従う (第 3 章「楕円 Ruijsenaars 作用素たちの可換性の自由場表示による導出」を参照).

• $\mathbb{C}^\times$ 上の有理型関数 $\gamma_p(z)$ を

$$\bullet \gamma_p(z) := \frac{\theta_p(tz)\theta_p(qt^{-1}z)}{\theta_p(z)\theta_p(qz)}$$

と定めるとき, 次が成り立つ: 任意の $k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$\bullet \text{Sym}_{k+\ell} \left\{ \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} \gamma_p\left(\frac{z_b}{z_a}\right) \right\} = \text{Sym}_{k+\ell} \left\{ \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} \gamma_p\left(\frac{z_a}{z_b}\right) \right\}.$$

楕円 Ruijsenaars 作用素たち $D_N^{(0)}(p), D_N^{(1)}(p), \dots, D_N^{(N)}(p)$ は非自明な (多項式的) 関係式を満たさないという意味で「独立である」ことが知られている.

命題 1.2 (楕円 Ruijsenaars 作用素たちの独立性). 楕円 Ruijsenaars 作用素たちは非自明な関係式を満たさない. すなわち, $(N+1)$ 変数多項式 $f(X_0, X_1, \dots, X_N)$ で

$$\bullet f\left(D_N^{(0)}(p), D_N^{(1)}(p), \dots, D_N^{(N)}(p)\right) = 0$$

となるものは $f=0$ (ゼロ多項式) しか存在しない (多項式への楕円 Ruijsenaars 作用素たちの代入を素朴に考えられるのは, これらが互いに可換だからである).

この性質は, 楕円 Ruijsenaars 作用素たち $D_N^{(0)}(p), D_N^{(1)}(p), \dots, D_N^{(N)}(p)$ が十分にたくさんの同時固有関数を持つことによって理解できる. Langmann-Noumi-Shiraishi は

• E. Langmann, M. Noumi, J. Shiraishi “Construction of eigenfunctions for the elliptic Ruijsenaars difference operators” (Communications in Mathematical Physics 391.3 (2022): 901-950)

において, 楕円 Ruijsenaars 作用素たちの同時固有関数の存在を証明した. Ruijsenaars が 1987 年に楕円 Ruijsenaars 系を導入して以来, 楕円 Ruijsenaars 作用素の固有関数の存在については長らく未知の状態であったので, この Langmann-Noumi-Shiraishi によって大きな進展がもたらされたと言える. ここでこの論文の結果を拝借すると, 分割によってラベルづけされる関数 $\psi_\lambda = \psi_\lambda(\mathbf{x}; p)$ ($\lambda \in \mathcal{P}$) で (これは Macdonald 多項式の楕円化とみなせる), 各 $\lambda \in \mathcal{P}$ に対し

$$\bullet D_N^{(r)}(p)\psi_\lambda = \varepsilon_\lambda^{(r)}\psi_\lambda \quad (r \in \{0, 1, \dots, N\})$$

が成り立つものが存在する ($\varepsilon_\lambda^{(r)}$ は固有値である). ここで仮に

$$\bullet f\left(D_N^{(0)}(p), D_N^{(1)}(p), \dots, D_N^{(N)}(p)\right) = 0$$

を満たすような $(N+1)$ 変数多項式 $f(X_0, X_1, \dots, X_N)$ が存在したとすると, これを ψ_λ に当ててことで

$$\bullet 0 = f\left(D_N^{(0)}(p), D_N^{(1)}(p), \dots, D_N^{(N)}(p)\right)\psi_\lambda = f\left(\varepsilon_\lambda^{(0)}, \varepsilon_\lambda^{(1)}, \dots, \varepsilon_\lambda^{(N)}\right)\psi_\lambda$$

であるが, $\psi_\lambda \neq 0$ なので $f\left(\varepsilon_\lambda^{(0)}, \varepsilon_\lambda^{(1)}, \dots, \varepsilon_\lambda^{(N)}\right) = 0$ を得る. ここで分割 $\lambda \in \mathcal{P}$ は何でもよいので, これは多項式 $f(X_0, X_1, \dots, X_N)$ が無限個のゼロ点を持つことを意味するが, そのような多項式はゼロ多項式しかない.

「三角の場合」に「Macdonald 作用素の核関数」というのがあったが, 「楕円の場合」にも核関数自体は存在する.

命題 1.3 (楕円 Ruijsenaars 作用素の核関数). M 個の x -変数 $x_1, \dots, x_M$ と N 個の y -変数 $y_1, \dots, y_N$ の関数 $\Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p)$ を

$$\bullet \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) := \prod_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} \frac{\Gamma_{q,p}(x_i y_j)}{\Gamma_{q,p}(t x_i y_j)}$$

によって定めるとき, $M=N$ の場合には

$$\bullet D_N^{(r)}(p)_{\mathbf{x}} \Pi_{N,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) = D_N^{(r)}(p)_{\mathbf{y}} \Pi_{N,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) \quad (r \in \{0, 1, \dots, N\})$$

が成り立つ ($D_N^{(r)}(p)_{\mathbf{x}}$ は $x_1, \dots, x_N$ の関数に作用する楕円 Ruijsenaars 作用素を表す).

「核関数 $\Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p)$ それ自体は M 個の $x_1, \dots, x_M$, 及び N 個の $y_1, \dots, y_N$ に対して定義されているのに, なぜこれの満たす恒等式は『 $M=N$ 』の場合にしか述べられていないのか」と気になった読者がいるかもしれない. この条件「 $M=N$ 」は「balancing condition」と呼ばれるものの一種で, これが満たされない場

合には, 楕円 Ruijsenaars 作用素とその核関数の満たす恒等式は ↑ 上のようすっきりした格好にならないのである (一般の場合の恒等式は第 4 章「楕円 Ruijsenaars 作用素の核関数の満たす恒等式」にて導く). 楕円 Ruijsenaars 作用素の核関数, 及び balancing condition 「 $M=N$ 」 がどのようにして現れるのかについては

- Y. Komori, M. Noumi, J. Shiraishi “Kernel functions for difference operators of Ruijsenaars type and their applications” (SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications 5 (2009): 054)

を参照してほしい.

先ほど「Langmann-Noumi-Shiraishi」として少し触れた

- E. Langmann, M. Noumi, J. Shiraishi “Construction of eigenfunctions for the elliptic Ruijsenaars difference operators” (Communications in Mathematical Physics 391.3 (2022): 901-950)

であるが, この論文において, 核関数 $\Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p)$ と重み関数

$$\bullet W_N(\mathbf{x}; q, t, p) := \prod_{1 \leq i \neq j \leq N} \frac{\Gamma_{q,p}(tx_i/x_j)}{\Gamma_{q,p}(x_i/x_j)}$$

によって定まる

$$\bullet (I_{N,N}f)(x_1, \dots, x_N) := \oint_{C_1} \frac{dy_1}{2\pi i y_1} \cdots \oint_{C_N} \frac{dy_N}{2\pi i y_N} \Pi_{N,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{-1}; q, t, p) W_N(\mathbf{y}; q, t, p) f(y_1, \dots, y_N)$$

なる積分変換が (積分路 $C_1, \dots, C_N$ は適当にとる), 「 N 変数の」楕円 Ruijsenaars 作用素の固有関数を「 N 変数の」別の固有関数に写すことが述べられている (正確な主張の内容は ↑ 上の Langmann-Noumi-Shiraishi を参照してほしい). ここでは 1 階の楕円 Ruijsenaars 作用素 $D_N^{(1)}(p) = D_N(p)$ に限って述べる. まず, 楕円 Ruijsenaars 作用素の核関数の恒等式によって

$$\begin{aligned} & \bullet D_N(p)(I_{N,N}f)(\mathbf{x}) \\ &= \oint_{C_1} \frac{dy_1}{2\pi i y_1} \cdots \oint_{C_N} \frac{dy_N}{2\pi i y_N} D_N(p)_{\mathbf{x}} \Pi_{N,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) \Big|_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}^{-1}} W_N(\mathbf{y}; q, t, p) f(\mathbf{y}) \\ &= \oint_{C_1} \frac{dy_1}{2\pi i y_1} \cdots \oint_{C_N} \frac{dy_N}{2\pi i y_N} D_N(p)_{\mathbf{y}} \Pi_{N,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) \Big|_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}^{-1}} W_N(\mathbf{y}; q, t, p) f(\mathbf{y}) \\ &= \sum_{i=1}^N \oint_{C_1} \frac{dy_1}{2\pi i y_1} \cdots \oint_{C_N} \frac{dy_N}{2\pi i y_N} t^{N-1} \prod_{j \neq i} \frac{\theta_p(t^{-1}y_i/y_j)}{\theta_p(y_i/y_j)} T_{q,y_i}^{-1} \Pi_{N,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{-1}; q, t, p) \times W_N(\mathbf{y}; q, t, p) f(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

である. ここで重み関数 $W_N(\mathbf{x}; q, t, p)$ について

$$\bullet T_{q,y_i} W_N(\mathbf{y}; q, t, p) = t^{-N+1} \prod_{j \neq i} \frac{\theta_p(ty_i/y_j)}{\theta_p(y_i/y_j)} \cdot \frac{\theta_p(qy_i/y_j)}{\theta_p(qt^{-1}y_i/y_j)} \times W_N(\mathbf{y}; q, t, p) \quad (i \in \{1, \dots, N\})$$

であるので次が成り立つ:

$$\begin{aligned} & \bullet D_N(p)(I_{N,N}f)(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{i=1}^N \oint_{C_1} \frac{dy_1}{2\pi i y_1} \cdots \oint_{C_N} \frac{dy_N}{2\pi i y_N} t^{N-1} \prod_{j \neq i} \frac{\theta_p(qt^{-1}y_i/y_j)}{\theta_p(qy_i/y_j)} \Pi_{N,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{-1}; q, t, p) T_{q,y_i} \{W_N(\mathbf{y}; q, t, p) f(\mathbf{y})\} \\ &= \oint_{C_1} \frac{dy_1}{2\pi i y_1} \cdots \oint_{C_N} \frac{dy_N}{2\pi i y_N} \Pi_{N,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{-1}; q, t, p) W_N(\mathbf{y}; q, t, p) \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{\theta_p(ty_i/y_j)}{\theta_p(y_i/y_j)} T_{q,y_i} f(\mathbf{y}) \\ &= (I_{N,N} D_N(p)f)(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

↑ 上の青色のものを出すために, 和 $\sum_{i=1}^N$ の中で y_i のみを q -シフトしている (積分路 $C_1, \dots, C_N$ はこういうことが可能であるようにとられているとする. 詳しいことは Langmann-Noumi-Shiraishi を参照). こうして

$$\bullet D_N(p) \circ I_{N,N} = I_{N,N} \circ D_N(p)$$

を得るが, これより, 関数 $f(x_1, \dots, x_N)$ が $D_N(p)$ の固有関数ならば $(I_{N,N}f)(x_1, \dots, x_N)$ もそうである.

1.3 本文書の内容

ここで各章の内容に軽く触れていく．第 2 章では「elliptic な vertex operator」に意味をつけることから始め、これによって楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示がなされる様子を解説する．細かな定義などは後回しにすると、楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示とは次のような内容である：

- $|q| < 1$, $|t| < 1$ 及び $|t| < |q|$ であるとする．生成元 $\{a_{n,d}\}_{d \geq 0}^{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, $\{b_{n,d}\}_{d \geq 0}^{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ と次の関係式で生成される $\mathbb{C}$ -代数を用意する：

$$\bullet [a_{m,d}, a_{n,d'}] = m \frac{1-q^{|m|}}{1-t^{|m|}} \delta_{m+n,0} \delta_{d,d'}, \quad \bullet [b_{m,d}, b_{n,d'}] = m \frac{1-q^{-|m|}}{1-t^{-|m|}} \delta_{m+n,0} \delta_{d,d'}.$$

vertex operator $\phi(z; p)$ を

$$\bullet \phi(z; p) := \exp \left(\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{1-q^n} \cdot \frac{z^n}{n} \sum_{d \geq 0} a_{-n,d} p^{\frac{nd}{2}} + \sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{1-q^{-n}} \cdot \frac{z^{-n}}{n} \sum_{d \geq 0} b_{-n,d} p^{\frac{n(d+1)}{2}} \right)$$

とおき、vertex operator $\eta(z; p)$ を

$$\bullet \eta_{\pm}(z; p) := \exp \left(- \sum_{\pm n > 0} (1-t^n) \frac{z^{-n}}{n} \sum_{d \geq 0} a_{n,d} p^{\frac{|n|d}{2}} - \sum_{\pm n > 0} (1-t^{-n}) \frac{z^n}{n} \sum_{d \geq 0} b_{n,d} p^{\frac{|n|(d+1)}{2}} \right)$$

によって $\eta(z; p) := \eta_{-}(z; p) \eta_{+}(z; p)$ と定める．更に

$$\bullet X(z) := \eta_{-}(z) \{ \eta_{+}(z) - t^{-N} \eta_{+}(p^{-1}z) \}$$

とおく．これに加え、 $\mathbb{C}^{\times}$ 上の有理型関数 $f_p(z)$ 及び r 変数の楕円関数 $f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)$ を

$$\bullet f_p(z) := \frac{\theta_p(z)^2}{\theta_p(tz)\theta_p(t^{-1}z)}, \quad \bullet f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) := \prod_{1 \leq a < b \leq r} f_p(z_b/z_a)$$

と定める．このとき、楕円 Ruijsenaars 作用素 $D_N^{(r)}(p)$ ($r \in \{0, 1, \dots, N\}$) は次のように自由

場表示される： $\phi_N(\mathbf{x}; p) := \prod_{j=1}^N \phi(x_j; p)$ とおくと

$$\begin{aligned} & \bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet X(z_1) \cdots X(z_r) \bullet \right] \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\ &= r! \left\{ \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_{\infty}^2} \right\}^r D_N^{(r)}(p) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \quad (r \in \{0, 1, \dots, N\}). \end{aligned}$$

本質的には、楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示は「テータ関数とデルタ関数の関係」からわかる

$$\begin{aligned} & \bullet \left[\prod_{i=1}^N \frac{\theta_p(x_i/z)}{\theta_p(tx_i/z)} \right]_{|t|^{-1}|p| < |x_i/z| < 1 \atop (1 \leq i \leq N)} - \left[\prod_{i=1}^N \frac{\theta_p(x_i/z)}{\theta_p(tx_i/z)} \right]_{|t|^{-1} < |x_i/z| < |p|^{-1} \atop (1 \leq i \leq N)} \\ &= \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_{\infty}^2} \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)} \delta\left(t \frac{x_i}{z}\right) \end{aligned}$$

によって可能である (↑ これしか使っていないと言ってもいいくらいである)．ここに見えている “ $[f(z)]_{(*)}$ ” の

ような記号については、筆者による

- 齋藤 洋介「テータ関数とデルタ関数の関係」(OCAMI Preprint Series, 2025)

や、第 6 章「付録」の 6.2「付録 2：『テータ関数とデルタ関数の関係』の要約」を参照してほしい。

第 3 章では、楕円 Ruijsenaars 作用素たちが互いに可換であることを自由場表示を使う立場で導出することを試みる。その中で、ある多変数の楕円関数についての「Ruijsenaars 恒等式」と呼ばれるものが現れる。この第 3 章のほとんどは Ruijsenaars 恒等式の証明に費やされる（そこで用いる楕円関数の分解については、6.2「付録 2：『テータ関数とデルタ関数の関係』の要約」を参照してほしい）。また、Ruijsenaars 恒等式を適当に読み換えることで「Feigin-Odesskii の楕円シャッフル代数」と呼ばれるものの存在に気がつく。第 3 章の後半では、楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示と楕円シャッフル代数の関係について触れた。

第 4 章では、楕円 Ruijsenaars 作用素の核関数の満たす恒等式を自由場表示によって導く。先に述べておくと、楕円 Ruijsenaars 作用素の核関数についてのある恒等式が得られはするが、これをどう思ったらよいのか、正直なところ、筆者はまだ理解できていない（2026 年 7 月の発言）。「おそらくはこういうことなのであろう」という筆者なりの予想を、Macdonald 作用素の自由場表示からわかることや「楕円 Calogero-Moser 系」に関する結果と共に述べる。

第 5 章では、楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示の中の楕円モジュラスを（適当に）0 にすることで、Macdonald 作用素の自由場表示が得られる様子を解説する。「Macdonald 作用素は楕円 Ruijsenaars 作用素の三角極限なのであるから、そんなのは簡単であろう」と読者は思うかもしれないが、計算の途中にてある積分が現れ、少し面倒が生じる。そういったような事柄に気がつけば、楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示は「三角の場合」において既に知られた結果を確かに再現する。

第 6 章は付録である。Macdonald 多項式に関する簡単なまとめ、「テータ関数とデルタ関数の関係」についての要約、楕円 Ruijsenaars 作用素がある多変数関数の空間に作用することの証明、「楕円 Calogero-Moser 系」に関する計算を収録した。必要に応じて適宜参照されたい。

1.4 補足：楕円 Ruijsenaars 作用素が作用する空間

これまで

「楕円 Ruijsenaars 作用素はどういった関数の空間に作用するのか？」

ということを気にせずに話を進めてきた。Macdonald 作用素 $D_N^{(r)}$ ($r \in \{0, 1, \dots, N\}$) は対称多項式の空間 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^{\mathfrak{S}_N}$ に作用することが知られているので、楕円 Ruijsenaars 作用素 $D_N^{(r)}(p)$ ($r \in \{0, 1, \dots, N\}$) は「対称多項式の空間 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^{\mathfrak{S}_N}$ の適当な楕円化」に作用することが期待される。実際、このことについては次が成り立つ。

ベキ和対称関数 (power sum) を

$$\bullet \quad p_k(\mathbf{x}) = p_k(x_1, \dots, x_N) := \sum_{i=1}^N x_i^k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

と定め、以下ではこれを

$$\bullet \quad (\mathbb{C}^\times)^N \ni \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \mapsto p_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N x_i^k \in \mathbb{C}$$

なる N 変数関数として理解する. また, 分割 λ に対し $p_\lambda(\mathbf{x})$, $p_{-\lambda}(\mathbf{x})$ を次で定める:

$$\bullet p_\lambda(\mathbf{x}) := \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} p_{\lambda_i}(\mathbf{x}), \quad \bullet p_{-\lambda}(\mathbf{x}) := \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} p_{-\lambda_i}(\mathbf{x}).$$

命題 1.4. $|p| < 1$ なる $p \in \mathbb{C}^\times$ 及び

$$\bullet x_i/x_j \notin p^{\mathbb{Z}} \quad (1 \leq i \neq j \leq N)$$

である $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{C}^\times)^N$ の組 $(\mathbf{x}, p) \in (\mathbb{C}^\times)^{N+1}$ の全体で定義された $(N+1)$ 変数関数 $f(\mathbf{x}; p)$ のうち, ある $0 < \delta \leq 1$ がとれて,

$$\bullet |p| < \delta, \quad \bullet \delta \leq \frac{\min\{|x_1|, \dots, |x_N|\}}{\max\{|x_1|, \dots, |x_N|\}}$$

なる条件を満たす点 $(\mathbf{x}, p) \in (\mathbb{C}^\times)^{N+1}$ においては

$$\begin{aligned} \bullet f(\mathbf{x}; p) &= \sum_{d \geq 0} p^d \sum_{\substack{\lambda, \mu \in \mathcal{P} \\ |\mu| \leq d}} c_{\lambda, \mu}^d p_\lambda(\mathbf{x}) p_{-\mu}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{d \geq 0} p^d \sum_{\substack{\mu \in \mathcal{P} \\ |\mu| \leq d}} p_{-\mu}(\mathbf{x}) \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} c_{\lambda, \mu}^d p_\lambda(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

なる展開が可能で, かつ, 各 $d \geq 0$, $\mu \in \mathcal{P}$ に対し

$$\bullet \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} c_{\lambda, \mu}^d p_\lambda(\mathbf{x})$$

が有限和になるようなものの全体を $\Lambda_N(p)$ と書く (これは「各 $d \geq 0$, $\mu \in \mathcal{P}$ に対し $c_{\lambda, \mu}^d \neq 0$ である $\lambda \in \mathcal{P}$ は有限個」ということである). 楕円 Ruijsenaars 作用素 $D_N^{(r)}(p)$ ($r \in \{0, 1, \dots, N\}$) はこの $\Lambda_N(p)$ に作用する.

ここでは 1 階の楕円 Ruijsenaars 作用素 $D_N^{(1)}(p) = D_N(p)$ が $\Lambda_N(p)$ に作用することの証明のみ述べることにし, 一般の場合の証明は第 6 章の 6.3 「付録 3: 楕円 Ruijsenaars 作用素が空間 $\Lambda_N(p)$ に作用すること」において述べる.

証明. 先に述べた通り, 楕円 Ruijsenaars 作用素 $D_N(p)$ を

$$\bullet D_N(p) = \sum_{i=1}^N A_i(\mathbf{x}; p) T_{q, x_i}, \quad \bullet A_i(\mathbf{x}; p) = \prod_{j \neq i} \frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)}$$

と書く. また

$$\bullet q_k(\mathbf{x}) := p^{\max\{0, -k\}} p_k(\mathbf{x}) \in \Lambda_N(p) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

とおく. 楕円 Ruijsenaars 作用素 $D_N(p)$ が $\Lambda_N(p)$ に作用することをいうには

$$\bullet D_N(p) \Lambda_N(p) \subset \Lambda_N(p)$$

を示せばよいが, そのためには, 任意の $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\bullet D_N(p) q_{k_1}(\mathbf{x}) \cdots q_{k_m}(\mathbf{x}) \in \Lambda_N(p)$$

が成り立つことをいえば十分である (これについては証明の最後で補足する). ここで

$$\begin{aligned} & \bullet D_N(p)q_{k_1}(\mathbf{x}) \cdots q_{k_m}(\mathbf{x}) \\ &= p^{\sum_{i=1}^m \max\{0, -k_i\}} \sum_{i=1}^N A_i(\mathbf{x}; p) \{(q^{k_1}-1)x_i^{k_1} + p_{k_1}(\mathbf{x})\} \cdots \{(q^{k_m}-1)x_i^{k_m} + p_{k_m}(\mathbf{x})\} \end{aligned}$$

であるが, この右辺を更に見ると次のようになる:

$$\begin{aligned} & \bullet p^{\sum_{i=1}^m \max\{0, -k_i\}} \sum_{i=1}^N A_i(\mathbf{x}; p) \{(q^{k_1}-1)x_i^{k_1} + p_{k_1}(\mathbf{x})\} \cdots \{(q^{k_m}-1)x_i^{k_m} + p_{k_m}(\mathbf{x})\} \\ &= \sum_{i=1}^N A_i(\mathbf{x}; p) \prod_{a=1}^m \{(q^{k_a}-1)p^{\max\{0, -k_a\}} x_i^{k_a} + q_{k_a}(\mathbf{x})\} \\ &= \sum_{i=1}^N A_i(\mathbf{x}; p) \sum_{j=0}^m \sum_{J \subset \{1, \dots, m\} \atop \#J=j} \prod_{a \in J} (q^{k_a}-1) p^{\max\{0, -k_a\}} x_i^{k_a} \prod_{b \notin J} q_{k_b}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{j=0}^m \sum_{J \subset \{1, \dots, m\} \atop \#J=j} \prod_{a \in J} (q^{k_a}-1) \prod_{b \notin J} q_{k_b}(\mathbf{x}) \times p^{\sum_{c \in J} \max\{0, -k_c\}} \sum_{i=1}^N A_i(\mathbf{x}; p) x_i^{\sum_{c \in J} k_c}. \end{aligned}$$

ここで一般に $\max\{0, -y\} = \frac{|y| - y}{2}$ ($y \in \mathbb{R}$) であることから, $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ に対し

$$\bullet \max\left\{0, -\sum_{i=1}^n y_i\right\} = \frac{1}{2} \left\{ \left| \sum_{i=1}^n y_i \right| - \sum_{i=1}^n y_i \right\} \leq \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n |y_i| - \sum_{i=1}^n y_i \right\} = \sum_{i=1}^n \max\{0, -y_i\}$$

が成り立つので (途中で「三角不等式」を使った), 上に見えている

$$\bullet p^{\sum_{c \in J} \max\{0, -k_c\}} \sum_{i=1}^N A_i(\mathbf{x}; p) x_i^{\sum_{c \in J} k_c}$$

は, 少なくとも次数が

$$\bullet \max\left\{0, -\sum_{a \in J} k_a\right\}$$

の p ベキを伴っている. このことから, 目的のためには

$$\bullet p^{\max\{0, -k\}} \sum_{i=1}^N A_i(\mathbf{x}; p) x_i^k \in \Lambda_N(p) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

を示せば十分であるということを思いつく.

次の段階に進む. 複素数 $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{C}^\times$ 及び楕円モジュラス $p \in \mathbb{C}^\times$ を

$$\bullet x_i/x_j \notin p^{\mathbb{Z}} \quad (1 \leq i \neq j \leq N), \quad \bullet |p| < \frac{\min\{|x_1|, \dots, |x_N|\}}{\max\{|x_1|, \dots, |x_N|\}}$$

を満たすようにとり, 形式ベキ級数 $\tilde{f}(z) \in \mathbb{C}[[z, z^{-1}]]$ を

$$\bullet \tilde{f}(z) := \left[\prod_{i=1}^N \frac{\theta_p(x_i/z)}{\theta_p(tx_i/z)} \right]_{|p| < |tx_i/z| < 1 \atop (1 \leq i \leq N)}$$

とおくとき, これについて

$$\bullet \tilde{f}(z) - t^{-N} \tilde{f}(p^{-1}z) = \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \sum_{i=1}^N A_i(\mathbf{x}; p) \delta\left(t \frac{x_i}{z}\right)$$

が成り立つ (6.2 「付録 2 : 『テータ関数とデルタ関数の関係』の要約」を参照). これに z^k ($k \in \mathbb{Z}$) をかけると

$$\bullet z^k \tilde{f}(z) - t^{-N} z^k \tilde{f}(p^{-1}z) = \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \sum_{i=1}^N A_i(\mathbf{x}; p) \cdot (tx_i)^k \delta\left(t \frac{x_i}{z}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

であるが, この z についての定数項を拾うことで

$$\bullet (1 - t^{-N} p^k) \text{CT}_z \left[z^k \tilde{f}(z) \right] = \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} t^k \sum_{i=1}^N A_i(\mathbf{x}; p) x_i^k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

を得る. 一般に $y + \max\{0, -y\} = \max\{0, y\}$ ($y \in \mathbb{R}$) であることに注意すると

$$\begin{aligned} & \bullet \left\{ p^{\max\{0, -k\}} - t^{-N} p^{\max\{0, k\}} \right\} \text{CT}_z \left[z^k \tilde{f}(z) \right] \\ &= \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} t^k p^{\max\{0, -k\}} \sum_{i=1}^N A_i(\mathbf{x}; p) x_i^k \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

であるが, この左辺にある

$$\bullet \left\{ p^{\max\{0, -k\}} - t^{-N} p^{\max\{0, k\}} \right\} \text{CT}_z \left[z^k \tilde{f}(z) \right]$$

が $\Lambda_N(p)$ に属するのである.

以下, $\text{CT}_z \left[z^k \tilde{f}(z) \right] \in \Lambda_N(p)$ ($k \in \mathbb{Z}$) を確認する. まず, $\tilde{f}(z)$ について

$$\bullet \tilde{f}(z) = \exp \left(- \sum_{n>0} \frac{1-t^n}{1-p^n} p_n(\mathbf{x}) \frac{z^{-n}}{n} \right) \exp \left(- \sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{1-p^n} p^n p_{-n}(\mathbf{x}) \frac{z^n}{n} \right)$$

である. ここで, $|p| < 1$ において正則な p の有理関数 $c_{\lambda, \mu}(p)$ ($\lambda, \mu \in \mathcal{P}$) で $c_{\lambda, \mu}(0) \neq 0$ なるものがあつて ($c_{\lambda, \mu}(p)$ を p について展開するとき, その展開が p の 0 乗の項から始まるということ)

$$\bullet \tilde{f}(z) = \sum_{\lambda, \mu \in \mathcal{P}} c_{\lambda, \mu}(p) p^{|\mu|} p_\lambda(\mathbf{x}) p_{-\mu}(\mathbf{x}) z^{-|\lambda|+|\mu|}$$

と書ける. よって

$$\bullet \text{CT}_z \left[z^k \tilde{f}(z) \right] = \sum_{\substack{\lambda, \mu \in \mathcal{P} \\ -|\lambda|+|\mu|+k=0}} c_{\lambda, \mu}(p) p^{|\mu|} p_\lambda(\mathbf{x}) p_{-\mu}(\mathbf{x})$$

である. ここで $c_{\lambda, \mu}(p) p^{|\mu|}$ を

$$\bullet c_{\lambda, \mu}(p) p^{|\mu|} = \sum_{d \geq |\mu|} c_{\lambda, \mu}^d p^d$$

と展開することができる (楕円モジュラス p に対する仮定から $|p| < \frac{\min\{|x_1|, \dots, |x_N|\}}{\max\{|x_1|, \dots, |x_N|\}} \leq 1$ であることに注意). また, 上の $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ についての和の条件 $-|\lambda|+|\mu|+k=0$ から $0 \leq |\lambda| = |\mu|+k$ として $|\mu| \geq -k$ がわかるので, 和に寄与する $\mu \in \mathcal{P}$ は

$$\bullet |\mu| \geq \max\{0, -k\}$$

を満たす ($|\mu| \geq 0$ かつ $|\mu| \geq -k$ なので). これらによって, $\text{CT}_z[z^k \tilde{f}(z)]$ は次のようになる:

$$\begin{aligned} \bullet \text{CT}_z[z^k \tilde{f}(z)] &= \sum_{\substack{\lambda, \mu \in \mathcal{P} \\ |\mu| \geq \max\{0, -k\} \\ |\lambda| = |\mu| + k}} \sum_{d \geq |\mu|} c_{\lambda, \mu}^d p_{\lambda}^d(\mathbf{x}) p_{-\mu}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{d \geq \max\{0, -k\}} p^d \sum_{\substack{\lambda, \mu \in \mathcal{P} \\ \max\{0, -k\} \leq |\mu| \leq d \\ |\lambda| = |\mu| + k}} c_{\lambda, \mu}^d p_{\lambda}(\mathbf{x}) p_{-\mu}(\mathbf{x}) \in \Lambda_N(p). \end{aligned}$$

これより

$$\bullet \left\{ p^{\max\{0, -k\} - t - N} p^{\max\{0, k\}} \right\} \text{CT}_z[z^k \tilde{f}(z)] \in \Lambda_N(p)$$

も従う ($\text{CT}_z[z^k \tilde{f}(z)]$ に p の 0 以上のべきのみを含む $p^{\max\{0, -k\} - t - N} p^{\max\{0, k\}}$ をかけているだけなので).

最後のステップに移る. 関数 $f(\mathbf{x}; p) \in \Lambda_N(p)$ を 1 つとる. このとき $0 < \delta \leq 1$ がとれて,

$$\bullet x_i/x_j \notin p^{\mathbb{Z}} \quad (1 \leq i \neq j \leq N), \quad \bullet |p| < \delta, \quad \bullet \delta \leq \frac{\min\{|x_1|, \dots, |x_N|\}}{\max\{|x_1|, \dots, |x_N|\}}$$

を満たす点 $(\mathbf{x}, p) \in (\mathbb{C}^\times)^{N+1}$ において

$$\bullet f(\mathbf{x}; p) = \sum_{d_1 \geq 0} p^{d_1} \sum_{\substack{\lambda_1, \mu_1 \in \mathcal{P} \\ |\mu_1| \leq d_1}} A_{\lambda_1, \mu_1}^{d_1} p_{\lambda_1}(\mathbf{x}) p_{-\mu_1}(\mathbf{x})$$

なる展開が可能である (ここで, 各 d_1, μ_1 に対し $A_{\lambda_1, \mu_1}^{d_1} \neq 0$ なる λ_1 は有限個である). また

$$\bullet D_N(p) q_{\lambda_1}(\mathbf{x}) q_{-\mu_1}(\mathbf{x}) = p^{|\mu_1|} D_N(p) p_{\lambda_1}(\mathbf{x}) p_{-\mu_1}(\mathbf{x}) \in \Lambda_N(p)$$

であるから, $x_i/x_j \notin p^{\mathbb{Z}} \quad (1 \leq i \neq j \leq N)$ 及び $|p| < \frac{\min\{|x_1|, \dots, |x_N|\}}{\max\{|x_1|, \dots, |x_N|\}}$ を満たす $(\mathbf{x}, p) \in (\mathbb{C}^\times)^{N+1}$ にて

$$\bullet p^{|\mu_1|} D_N(p) p_{\lambda_1}(\mathbf{x}) p_{-\mu_1}(\mathbf{x}) = \sum_{d_2 \geq |\mu_1|} p^{d_2} \sum_{\substack{\lambda_2, \mu_2 \in \mathcal{P} \\ |\mu_2| \leq d_2}} B_{\lambda_2, \mu_2}^{d_2} p_{\lambda_2}(\mathbf{x}) p_{-\mu_2}(\mathbf{x})$$

なる展開が可能である ($d_2 \geq |\mu_1|$ に注意. また, 各 $\lambda_1, \mu_1 \in \mathcal{P}$ 及び $d_2 \geq 0, \mu_2 \in \mathcal{P}$ に対し $B_{\lambda_2, \mu_2}^{d_2} \neq 0$ である $\lambda_2 \in \mathcal{P}$ は有限個である). これらによって次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \bullet D_N(p) f(\mathbf{x}; p) &= \sum_{d_1 \geq 0} p^{d_1} \sum_{\substack{\lambda_1, \mu_1 \in \mathcal{P} \\ |\mu_1| \leq d_1}} A_{\lambda_1, \mu_1}^{d_1} D_N(p) p_{\lambda_1}(\mathbf{x}) p_{-\mu_1}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{d_1 \geq 0} p^{d_1} \sum_{\substack{\lambda_1, \mu_1 \in \mathcal{P} \\ |\mu_1| \leq d_1}} A_{\lambda_1, \mu_1}^{d_1} \sum_{d_2 \geq |\mu_1|} p^{d_2} p^{-|\mu_1|} \sum_{\substack{\lambda_2, \mu_2 \in \mathcal{P} \\ |\mu_2| \leq d_2}} B_{\lambda_2, \mu_2}^{d_2} p_{\lambda_2}(\mathbf{x}) p_{-\mu_2}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{d \geq 0} p^d \sum_{\substack{d_1, d_2 \geq 0, \lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2 \in \mathcal{P} \\ d_1 + d_2 - |\mu_1| = d, \\ |\mu_1| \leq d_1, |\mu_1| \leq d_2, |\mu_2| \leq d_2}} A_{\lambda_1, \mu_1}^{d_1} B_{\lambda_2, \mu_2}^{d_2} p_{\lambda_2}(\mathbf{x}) p_{-\mu_2}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{d \geq 0} p^d \sum_{\substack{\lambda_2, \mu_2 \in \mathcal{P} \\ |\mu_2| \leq d}} \left(\sum_{\substack{d_1, d_2 \geq 0, \lambda_1, \mu_1 \in \mathcal{P} \\ d_1 + d_2 - |\mu_1| = d, \\ |\mu_2| \leq d_2 \leq d, |\mu_1| \leq d_1 \leq d}} A_{\lambda_1, \mu_1}^{d_1} B_{\lambda_2, \mu_2}^{d_2} \right) p_{\lambda_2}(\mathbf{x}) p_{-\mu_2}(\mathbf{x}) \in \Lambda_N(p). \end{aligned}$$

以上より, 楕円 Ruijsenaars 作用素 $D_N(p)$ は $\Lambda_N(p)$ に作用している. $\square$

再度述べるが, より高階の楕円 Ruijsenaars 作用素が $\Lambda_N(p)$ に作用することの証明は, 6.3 「付録 3 : 楕円 Ruijsenaars 作用素が空間 $\Lambda_N(p)$ に作用すること」において行う.

多変数関数の空間 $\Lambda_N(p)$ とは, 次の意味で対称多項式の空間 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^{\mathfrak{S}_N}$ を p で変形したものである. $\Lambda_N(p)$ の元 $f(\mathbf{x}; p) \in \Lambda_N(p)$ に対しては, ある $0 < \delta \leq 1$ がとれて,

$$\bullet \ x_i/x_j \notin p^{\mathbb{Z}} \quad (1 \leq i \neq j \leq N), \quad \bullet \ |p| < \delta, \quad \bullet \ \delta \leq \frac{\min\{|x_1|, \dots, |x_N|\}}{\max\{|x_1|, \dots, |x_N|\}}$$

を満たす点 $(\mathbf{x}, p) \in (\mathbb{C}^\times)^{N+1}$ においては

$$\bullet \ f(\mathbf{x}; p) = \sum_{d \geq 0} p^d \sum_{\substack{\mu \in \mathcal{P} \\ |\mu| \leq d}} p_{-\mu}(\mathbf{x}) \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} c_{\lambda, \mu}^d p_{\lambda}(\mathbf{x})$$

なる展開が可能である (各 $d \geq 0$, $\mu \in \mathcal{P}$ に対し $c_{\lambda, \mu}^d \neq 0$ である $\lambda \in \mathcal{P}$ は有限個). ここで $p=0$ とおくと

$$\bullet \ f(\mathbf{x}; 0) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} c_{\lambda, \emptyset}^0 p_{\lambda}(\mathbf{x})$$

であり, これは N 変数の対称多項式である (「不定元の単項式の有限和としての多項式」と「多項式関数」を自然に同一視している). よって, $\Lambda_N(p)$ の元 $f(\mathbf{x}; p) \in \Lambda_N(p)$ に $p=0$ を代入したものの $f(\mathbf{x}; 0)$ の全体を $\Lambda_N(0)$ と書くと

$$\bullet \ \Lambda_N(0) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^{\mathfrak{S}_N}$$

である.

楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示

第 1 章にて見た通り, 楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示のためには, vertex operator をうまく楕円化すればよいのであろうということがわかった. 「vertex operator の well-definedness」には気をつけねばならないが, そういったことに注意すれば「elliptic な vertex operator」はうまく働く. 結果として, 1 階のみならず, 高階の楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示も可能となる.

2.1 ウォーミングアップ : elliptic な vertex operator

まずは気楽な話から始めたい. 生成元 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ と関係式

$$\bullet [a_m, a_n] = m\delta_{m+n,0} \quad (m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

で生成される $\mathbb{C}$ -代数 B を考える. いわゆる「ボソンの代数」と呼ばれるものであるが, ここで「正規順序積」 $\bullet \bullet \bullet$ なるものが定義でき (後述する), それによって

$$\bullet V(z) := \bullet \exp \left(- \sum_{n \neq 0} a_n \frac{z^{-n}}{n} \right) \bullet$$

とおくとき (いわゆる「vertex operator」と呼ばれるものの一種である), 次が成り立つ:

$$\bullet V(z)V(w) = \left(1 - \frac{w}{z}\right) \bullet V(z)V(w) \bullet \quad (|w/z| < 1).$$

軽く述べると, $\varphi_{\pm}(z) := - \sum_{\pm n > 0} a_n \frac{z^{-n}}{n}$ とおくとき $V(z) = \exp(\varphi_{-}(z)) \exp(\varphi_{+}(z))$ なので

$$\begin{aligned} \bullet V(z)V(w) &= \exp(\varphi_{-}(z)) \exp(\varphi_{+}(z)) \exp(\varphi_{-}(w)) \exp(\varphi_{+}(w)) \\ &= \exp([\varphi_{+}(z), \varphi_{-}(w)]) \exp(\varphi_{-}(z)) \exp(\varphi_{-}(w)) \exp(\varphi_{+}(z)) \exp(\varphi_{+}(w)) \\ &= \exp \left(- \sum_{n > 0} \frac{(w/z)^n}{n} \right) \bullet V(z)V(w) \bullet = \left(1 - \frac{w}{z}\right) \bullet V(z)V(w) \bullet \quad (|w/z| < 1). \end{aligned}$$

一方, 第 1 章の 1.1 「背景について」で見たように, テータ関数 $\theta_p(z) = (z; p)_{\infty} (pz^{-1}; p)_{\infty}$ について $\theta_p(z) \Big|_{p=0} = 1-z$ なのであった. これによって「 $\theta_p(z)$ は $1-z$ の楕円化である」と思うことができる. ここで上の vertex operator $V(z)$ についての計算に戻ると,

$$\bullet V(z)V(w) = \left(1 - \frac{w}{z}\right) \bullet V(z)V(w) \bullet \quad (|w/z| < 1)$$

の青色の部分に「 $1-z$ 」と同じ格好の関数が現れている. それでは,

$$“V^{\text{仮}}(z; p)V^{\text{仮}}(w; p) = \theta_p(w/z) \bullet V^{\text{仮}}(z; p)V^{\text{仮}}(w; p) \bullet”$$

を満たすような「vertex operator $V(z)$ の楕円化 $V^{\text{仮}}(z; p)$ 」は考えられないのであろうか? もし仮にそういったことが可能であるならば, そのようにして作られた vertex operator は楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示などにいかにも使えそうに思われる.

2012 年 8 月頃, 筆者は vertex operator の楕円化として次のようなものを考えた. 「 $\theta_p(z)$ は $1-z$ の楕円化である」ということをより直接見るべく, $1-z$ 及び $\theta_p(z)$ を次のように展開してみる:

$$\begin{aligned} \bullet \quad 1-z &= \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{z^n}{n}\right) \quad (|z|<1), \\ \bullet \quad \theta_p(z) &= \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1}{1-p^n} \cdot \frac{z^n}{n}\right) \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{p^n}{1-p^n} \cdot \frac{z^{-n}}{n}\right) \quad (|p|<|z|<1). \end{aligned}$$

こうすると, $1-z$ がどのように複雑化して $\theta_p(z)$ になっているのかが多少はわかる. そこで,

こういう関数の側で生じる変化を vertex operator の側でも起こせばよいのではないか?

というようなことを当時の筆者は考えた. 例えば次のような具合である. まず, 生成元 $\{a_n^{\pm}\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, $\{b_n^{\pm}\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ と関係式

$$\left[a_m^{\pm}, a_n^{\pm}\right] = m(1-p^{|m|})\delta_{m+n,0}, \quad \left[b_m^{\pm}, b_n^{\pm}\right] = m(1-p^{|m|})p^{-|m|}\delta_{m+n,0}$$

で生成されるボソンの代数を用意する ($a_m^{\pm}$ と $b_n^{\pm}$ は可換であるとする). そして, vertex operator の楕円化のつもりで, $|p|<1$ である楕円モジュラス $p \in \mathbb{C}^{\times}$ を含む (← **これがまずい**)

$$“V^{\pm}(z;p) := \exp\left(-\sum_{n \neq 0} \frac{1}{1-p^{|n|}} a_n^{\pm} \frac{z^{-n}}{n}\right) \exp\left(-\sum_{n \neq 0} \frac{p^{|n|}}{1-p^{|n|}} b_n^{\pm} \frac{z^n}{n}\right) :”$$

を考えれば

$$“V^{\pm}(z;p)V^{\pm}(w;p) = \theta_p(w/z) : V^{\pm}(z;p)V^{\pm}(w;p) : \quad (|p|<|w/z|<1)”$$

となるであろう. 形式的な計算のみならば実際にこのようになるので, 当時の筆者はこれで何か新しいものができたと思った (論文も書いてしまった). ところが, 上の “ $V^{\pm}(z;p)$ ” は vertex operator として well-defined でないのである (後述する). 話をうまく収めるにはどうすればよいのであろうか?

当時の筆者は次のように思っていた: 「 $V^{\pm}(z;p)V^{\pm}(w;p)$ 」について

$$\begin{aligned} “V^{\pm}(z;p)V^{\pm}(w;p) &= \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1}{1-p^n} \cdot \frac{(w/z)^n}{n}\right) \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{p^n}{1-p^n} \cdot \frac{(z/w)^n}{n}\right) : V^{\pm}(z;p)V^{\pm}(w;p) : \\ &= \theta_p(w/z) : V^{\pm}(z;p)V^{\pm}(w;p) : \quad (|p|<|w/z|<1)” \end{aligned}$$

とできるので, これで vertex operator $V(z)$ の楕円化ができた. こんな調子であったから, この “ $V^{\pm}(z;p)$ ” は well-defined な vertex operator とみなすことはできないという問題にはしばらく気がつかなかった.

これまで何度か述べた「vertex operator の well-definedness」とは次の内容を指す. 以下, 生成元 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ と関係式 $[a_m, a_n] = m\delta_{m+n,0}$ ($m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) で生成されるボソンの代数 $\mathcal{B}$, 及び条件 $a_n|0\rangle = 0$ ($n \in \mathbb{Z}_{>0}$) を満たす真空ベクトル $|0\rangle$ を用意し, Fock 空間 $\mathcal{F} := \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}} \mathbb{C} a_{-\lambda} |0\rangle$ を考える (分割 $\lambda \in \mathcal{P}$ に対し $a_{-\lambda} := a_{-\lambda_1} \cdots a_{-\lambda_{\ell(\lambda)}}$ とおく). 以下, vertex operator

$$\bullet \quad V(z) = \exp\left(-\sum_{n \neq 0} a_n \frac{z^{-n}}{n}\right) :$$

が $\mathcal{F}$ から $\mathcal{F}[[z, z^{-1}]]$ への線型写像であることを確かめる.

「正規順序積」について少し述べておく．まずは $\bullet : 1 : \bullet := 1$, $\bullet : a_k : \bullet := a_k$ ($k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$), 及び

$$\bullet : a_k a_\ell : \bullet := \begin{cases} a_k a_\ell & (\ell > 0), \\ a_\ell a_k & (\ell < 0) \end{cases} \quad (k, \ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

と定める．更に, ある $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\bullet : a_{k_1} \cdots a_{k_N} : \bullet$ ($k_1, \dots, k_N \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) が定義できている場合に

$$\bullet : a_{k_1} \cdots a_{k_N} a_{k_{N+1}} : \bullet := \begin{cases} \bullet : a_{k_1} \cdots a_{k_N} : \bullet a_{k_{N+1}} & (k_{N+1} > 0), \\ a_{k_{N+1}} \bullet : a_{k_1} \cdots a_{k_N} : \bullet & (k_{N+1} < 0) \end{cases} \quad (k_{N+1} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

と定める．あとはこれを $\mathcal{B}$ 全体に $\mathbb{C}$ -線型に拡張することで写像 $\bullet : \bullet : \bullet : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ が得られる．

$V(z)$ の話に戻ると, これは

$$\bullet V(z) = \exp\left(\sum_{n>0} a_{-n} \frac{z^n}{n}\right) \exp\left(-\sum_{n>0} a_n \frac{z^{-n}}{n}\right)$$

と書けるが, ここに見えている $\exp(\cdots)$ を

$$\bullet \exp\left(\sum_{n>0} a_{-n} \frac{z^n}{n}\right) = \prod_{n>0} \sum_{k_n=0}^{\infty} a_{-n}^{k_n} \frac{z^{nk_n}}{n^{k_n} k_n!} = \sum_{k_1, k_2, k_3, \dots \geq 0} \prod_{n>0} a_{-n}^{k_n} \frac{z^{\sum_{n>0} nk_n}}{\prod_{n>0} n^{k_n} k_n!}$$

などと展開するとき, n を分割 $\lambda \in \mathcal{P}$ のある成分, k_n を「分割 $\lambda \in \mathcal{P}$ に a が現れる回数 $n_\lambda(a)$ 」に読み換えると, $z_\lambda := \prod_{a \geq 1} a^{n_\lambda(a)} n_\lambda(a)!$ ($\lambda \in \mathcal{P}$) とおくと

$$\bullet \exp\left(\sum_{n>0} a_{-n} \frac{z^n}{n}\right) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} a_{-\lambda} \frac{z^{|\lambda|}}{z_\lambda}$$

が成り立つ．これより, 上の読み換えの下で $\sum_{n>0} k_n \rightarrow \ell(\lambda)$ となることに注意すると

$$\bullet V(z) = \sum_{\lambda, \mu \in \mathcal{P}} \frac{(-1)^{\ell(\mu)}}{z_\lambda z_\mu} z^{|\lambda| - |\mu|} a_{-\lambda} a_\mu$$

である．さて, ここで $|\psi\rangle \in \mathcal{F}$ を 1 つとる．こうするとき, 形式的には

$$\bullet V(z)|\psi\rangle = \sum_{\lambda, \mu \in \mathcal{P}} \frac{(-1)^{\ell(\mu)}}{z_\lambda z_\mu} z^{|\lambda| - |\mu|} a_{-\lambda} a_\mu |\psi\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n} \sum_{\substack{\lambda, \mu \in \mathcal{P} \\ |\lambda| - |\mu| = -n}} \frac{(-1)^{\ell(\mu)}}{z_\lambda z_\mu} a_{-\lambda} a_\mu |\psi\rangle$$

である． $a_\mu |\psi\rangle$ は $|\mu|$ が十分に大きければ 0 なので, 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\sum_{\substack{\lambda, \mu \in \mathcal{P} \\ |\lambda| - |\mu| = -n}} \frac{(-1)^{\ell(\mu)}}{z_\lambda z_\mu} a_{-\lambda} a_\mu |\psi\rangle$

に寄与する $\mu \in \mathcal{P}$ は有限個である．また, この和に寄与する $\lambda \in \mathcal{P}$ は $|\lambda| = |\mu| - n$ を満たすわけであるから, この和に寄与する $\lambda \in \mathcal{P}$ も有限個である．よって, 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し, この和は有限和であるので

$$\bullet \sum_{\substack{\lambda, \mu \in \mathcal{P} \\ |\lambda| - |\mu| = -n}} \frac{(-1)^{\ell(\mu)}}{z_\lambda z_\mu} a_{-\lambda} a_\mu |\psi\rangle \in \mathcal{F}$$

である．こうして

$$\bullet V(z)|\psi\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n} \sum_{\substack{\lambda, \mu \in \mathcal{P} \\ |\lambda| - |\mu| = -n}} \frac{(-1)^{\ell(\mu)}}{z_\lambda z_\mu} a_{-\lambda} a_\mu |\psi\rangle \in \mathcal{F}[[z, z^{-1}]]$$

がわかったが、 $|\psi\rangle \in \mathcal{F}$ は何でもよかったので $V(z)\mathcal{F} \subset \mathcal{F}[[z, z^{-1}]]$ を得る。これは、vertex operator $V(z)$ が $\mathcal{F}$ から $\mathcal{F}[[z, z^{-1}]]$ への線型写像であることを意味する。このことを指して「vertex operator $V(z)$ は well-defined である」という。

うまくいかない様子をお見せするのは恐縮であるが、先に見た “ $V^{\pm}(z; p)$ ” についてどういったまずいことが生じるのか、少し触れておく。先ほどの $V(z)$ の well-definedness の説明と同様のことを

$$“V^{\pm}(z; p) := \exp\left(-\sum_{n \neq 0} \frac{1}{1-p^{|n|}} a_n^{\pm} \frac{z^{-n}}{n}\right) \exp\left(-\sum_{n \neq 0} \frac{p^{|n|}}{1-p^{|n|}} b_n^{\pm} \frac{z^n}{n}\right) :”$$

に対してやってみる。 $V_{\pm}^{\pm}(z; p)$ を

$$\bullet V_{\pm}^{\pm}(z; p) = \exp\left(-\sum_{\pm n > 0} \frac{1}{1-p^{|n|}} a_n^{\pm} \frac{z^{-n}}{n}\right) \exp\left(-\sum_{\pm n > 0} \frac{p^{|n|}}{1-p^{|n|}} b_n^{\pm} \frac{z^n}{n}\right)$$

とおくと、 $c_{\lambda}(p) := \frac{1}{z_{\lambda}} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{1}{1-p^{\lambda_i}}$ ($\lambda \in \mathcal{P}$) を使うことで次のように展開できる：

$$\begin{aligned} \bullet V_+^{\pm}(z; p) &= \exp\left(-\sum_{n > 0} \frac{1}{1-p^n} a_n^{\pm} \frac{z^{-n}}{n}\right) \exp\left(-\sum_{n > 0} \frac{p^n}{1-p^n} b_n^{\pm} \frac{z^n}{n}\right) \\ &= \sum_{\lambda', \mu' \in \mathcal{P}} (-1)^{\ell(\lambda') + \ell(\mu')} c_{\lambda'}(p) c_{\mu'}(p) p^{|\mu'|} a_{-\lambda'}^{\pm} b_{\mu'}^{\pm} z^{-|\lambda'| + |\mu'|}, \\ \bullet V_-^{\pm}(z; p) &= \exp\left(\sum_{n > 0} \frac{1}{1-p^n} a_{-n}^{\pm} \frac{z^n}{n}\right) \exp\left(\sum_{n > 0} \frac{p^n}{1-p^n} b_{-n}^{\pm} \frac{z^{-n}}{n}\right) \\ &= \sum_{\lambda, \mu \in \mathcal{P}} c_{\lambda}(p) c_{\mu}(p) p^{|\mu|} a_{-\lambda}^{\pm} b_{-\mu}^{\pm} z^{|\lambda| - |\mu|}. \end{aligned}$$

これより、 $V^{\pm}(z; p) = V_-^{\pm}(z; p) V_+^{\pm}(z; p)$ は形式的には次のように展開される：展開に現れる係数をまとめて

$$\bullet c_{\lambda, \mu, \lambda', \mu'}(p) = (-1)^{\ell(\lambda') + \ell(\mu')} c_{\lambda}(p) c_{\mu}(p) c_{\lambda'}(p) c_{\mu'}(p) p^{|\mu| + |\mu'|}$$

と書くことにすると

$$\begin{aligned} \bullet V^{\pm}(z; p) &= V_-^{\pm}(z; p) V_+^{\pm}(z; p) = \sum_{\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathcal{P}} c_{\lambda, \mu, \lambda', \mu'}(p) a_{-\lambda}^{\pm} b_{-\mu}^{\pm} a_{\lambda'}^{\pm} b_{\mu'}^{\pm} z^{|\lambda| - |\mu| - |\lambda'| + |\mu'|} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n} \sum_{\substack{\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathcal{P} \\ |\lambda| - |\mu| - |\lambda'| + |\mu'| = -n}} c_{\lambda, \mu, \lambda', \mu'}(p) a_{-\lambda}^{\pm} b_{-\mu}^{\pm} a_{\lambda'}^{\pm} b_{\mu'}^{\pm}. \end{aligned}$$

仮に、この場合の Fock 空間 $\mathcal{F}^{\pm}$ は $\mathcal{F}^{\pm} = \bigoplus_{\lambda, \mu \in \mathcal{P}} \mathbb{C} a_{-\lambda}^{\pm} b_{-\mu}^{\pm} |0\rangle$ と定められているとし（真空ベクトル $|0\rangle$ はいつものように条件 $a_n^{\pm} |0\rangle = 0, b_n^{\pm} |0\rangle = 0$ ($n \in \mathbb{Z}_{>0}$) を満たすものとする）、ここで $|\psi\rangle \in \mathcal{F}^{\pm}$ を任意にとる。このとき

$$\bullet V^{\pm}(z; p) |\psi\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n} \sum_{\substack{\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathcal{P} \\ |\lambda| - |\mu| - |\lambda'| + |\mu'| = -n}} c_{\lambda, \mu, \lambda', \mu'}(p) a_{-\lambda}^{\pm} b_{-\mu}^{\pm} a_{\lambda'}^{\pm} b_{\mu'}^{\pm} |\psi\rangle$$

であるが、先ほど見た $V(z)$ と同様に考えると、問題は、各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$“ \sum_{\substack{\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathcal{P} \\ |\lambda| - |\mu| - |\lambda'| + |\mu'| = -n}} c_{\lambda, \mu, \lambda', \mu'}(p) a_{-\lambda}^{\pm} b_{-\mu}^{\pm} a_{\lambda'}^{\pm} b_{\mu'}^{\pm} |\psi\rangle ”$$

は有限和であるか？ということである。これは残念ながら有限和でない。実際、この和に寄与する $\lambda', \mu' \in \mathcal{P}$ は有限個であるが（ $|\lambda'|$ または $|\mu'|$ が十分大きければ $a_{\lambda'}^{\pm} b_{\mu'}^{\pm} |\psi\rangle = 0$ なので）、この和に寄与する $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ 、すなわち $|\lambda| - |\mu| - |\lambda'| + |\mu'| = -n$ を満たすものはいくらかでも存在するからである。

以上によって、 $V^{\pm}(z;p)$ は、これまでと同じ考え方のみでは well-defined な vertex operator とはみなせないことがわかった。

「elliptic な vertex operator をどのように作ればよいのか」ということに関して、実を言うと、2014 年頃からいろいろあったのであるが、そのいろいろにはあまり立ち入らず、今回の話に直結する事柄にのみ集中する。あるとき (2020 年 2 月頃)、elliptic な vertex operator を作る話に関して、ふと

「楕円モジュラス p を物理定数のごとく扱うから、よくないではないか」

という風なことを思った。どういうことなのかというと、共形場理論においては、「vertex operator $V(z)=\cdots$ 」などのように、場の作用素にはそれが刺さっている点の座標「 z 」がついてまわるわけであるが (実際は「将来、複素座標になる予定の不定元 z 」という具合である)、楕円モジュラス p もこの「 z 」と同格に扱うべきではないのか？と思ったのである。例えば、これまで

$$\bullet \varphi(z) = - \sum_{n \neq 0} a_n \frac{z^{-n}}{n}$$

のような z について展開された作用素を扱ってきたが、仮に z と p を同格に扱おうと思ったら、安直かもしれないが「 p についても展開された格好のボソンの作用素」を考えねばならないであろう。これに加えて、 $p \rightarrow 0$ とすることで元の楕円化される前の作用素に戻るものであってほしい。そこで筆者は、この $\varphi(z)$ の楕円化として次のものを考えた：

$$\bullet - \sum_{n \neq 0} \frac{z^{-n}}{n} \sum_{d \geq 0} a_{n,d} p^{|n|d} - \sum_{n \neq 0} \frac{z^n}{n} \sum_{d \geq 0} b_{n,d} p^{|n|(d+1)}.$$

「 z と p を同格に扱う」ことにした結果、 p も不定元として扱われることになり (z と同様に「将来、楕円モジュラスになる予定の不定元 p 」と見ている)、足を 2 つ持つボソンの生成元 $a_{n,d}$, $b_{n,d}$ が現れるようになった。これらの満たす関係式は

$$\bullet [a_{m,d}, a_{n,d'}] = m \delta_{m+n,0} \delta_{d,d'}, \quad \bullet [b_{m,d}, b_{n,d'}] = m \delta_{m+n,0} \delta_{d,d'}$$

とすればよいであろう ($a_{m,d}$ と $b_{n,d'}$ は可換であるとする)。これには「Wick の定理がそのまま使える」という利点がある ($m+n \neq 0$ ならば $a_{m,d}$ と $a_{n,d'}$ は可換であることに注意)。例えば

$$\bullet V(z;p) := \bullet \exp \left(- \sum_{n \neq 0} \frac{z^{-n}}{n} \sum_{d \geq 0} a_{n,d} p^{|n|d} - \sum_{n \neq 0} \frac{z^n}{n} \sum_{d \geq 0} b_{n,d} p^{|n|(d+1)} \right) \bullet$$

とおくとき (well-definedness については後回し)、我々は次のように述べられるようになったのである：

$$\bullet V(z;p)V(w;p) = \theta_{p^2}(w/z) \bullet V(z;p)V(w;p) \bullet \quad (|p| < 1, |p|^2 < |w/z| < 1).$$

実際に $V(z;p)V(w;p)$ を見ると次のようになる：

$$\begin{aligned} & \bullet V(z;p)V(w;p) \\ &= \exp \left(\sum_{\substack{m>0 \\ n<0}} \frac{z^{-m} w^{-n}}{mn} \sum_{\substack{d \geq 0 \\ d' \geq 0}} [a_{m,d}, a_{n,d'}] p^{|m|d} p^{|n|d'} + \sum_{\substack{m>0 \\ n<0}} \frac{z^m w^n}{mn} \sum_{\substack{d \geq 0 \\ d' \geq 0}} [b_{m,d}, b_{n,d'}] p^{|m|(d+1)} p^{|n|(d'+1)} \right) \\ & \quad \times \bullet V(z;p)V(w;p) \bullet \\ &= \exp \left(- \sum_{m>0} \frac{(w/z)^m}{m} \sum_{d \geq 0} p^{2md} - \sum_{m>0} \frac{(z/w)^m}{m} \sum_{d \geq 0} p^{2m(d+1)} \right) \bullet V(z;p)V(w;p) \bullet. \end{aligned}$$

ここで、正規順序化の過程で生じた因子について、 $|p| < 1$ かつ $|p|^2 < |w/z| < 1$ ならば次が成り立つ：

$$\begin{aligned} & \bullet \exp \left(- \sum_{m>0} \frac{(w/z)^m}{m} \sum_{d \geq 0} p^{2md} - \sum_{m>0} \frac{(z/w)^m}{m} \sum_{d \geq 0} p^{2m(d+1)} \right) \\ &= \exp \left(- \sum_{m>0} \frac{1}{1-p^{2m}} \cdot \frac{(w/z)^m}{m} - \sum_{m>0} \frac{p^{2m}}{1-p^{2m}} \cdot \frac{(z/w)^m}{m} \right) = \theta_{p^2}(w/z). \end{aligned}$$

以上によって、形式的には

$$\bullet V(z;p)V(w;p) = \theta_{p^2}(w/z) \bullet V(z;p)V(w;p) \bullet \quad (|p| < 1, |p|^2 < |w/z| < 1)$$

が成り立つ。上の $\theta_{p^2}(w/z)$ の楕円モジュラス p^2 が気になるかもしれないが、これは後で調節する。

ともかく、こうすることで話はうまくいきそうである。問題は上のような vertex operator の well-definedness である。これは次のようにして解決される。

定義 2.1. (1) 生成元 $\{a_{n,d}\}_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}^{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, $\{b_{n,d}\}_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}^{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ と次の関係式で生成される $\mathbb{C}$ -代数を $\mathcal{B}$ と書く ($a_{m,d}$ と $b_{n,d'}$ は可換であるとする)：

$$\bullet [a_{m,d}, a_{n,d'}] = m\delta_{m+n,0}\delta_{d,d'}, \quad \bullet [b_{m,d}, b_{n,d'}] = m\delta_{m+n,0}\delta_{d,d'}.$$

(2) 条件 $a_{n,d}|0\rangle = 0$, $b_{n,d}|0\rangle = 0$ ($n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) を満たす真空ベクトル $|0\rangle$ を用意し、ボソン Fock 空間 $\mathcal{F}$ を次で定める：

$$\bullet \mathcal{F} := \text{Span}_{\mathbb{C}} \left\{ a_{-m_1,d_1} \cdots a_{-m_k,d_k} b_{-n_1,d'_1} \cdots b_{-n_\ell,d'_\ell} |0\rangle \mid \begin{array}{l} k, \ell \in \mathbb{Z}_{>0}, \\ m_i, n_i \in \mathbb{Z}_{>0}, d_i, d'_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array} \right\}.$$

正規順序積は次のようにして定める。まずは $\bullet 1 \bullet := 1$, $\bullet a_{k,d} \bullet := a_{k,d}$ ($k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $d \geq 0$)、及び

$$\bullet \bullet a_{k_1,d_1} a_{k_2,d_2} \bullet := \begin{cases} a_{k_1,d_1} a_{k_2,d_2} & (k_2 > 0), \\ a_{k_2,d_2} a_{k_1,d_1} & (k_2 < 0) \end{cases} \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, d_1, d_2 \geq 0)$$

とする。更に、ある $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ があって $\bullet a_{k_1,d_1} \cdots a_{k_N,d_N} \bullet$ ($k_1, \dots, k_N \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $d_1, \dots, d_N \geq 0$) が定義できている場合に

$$\bullet \bullet a_{k_1,d_1} \cdots a_{k_N,d_N} a_{k_{N+1},d_{N+1}} \bullet := \begin{cases} \bullet a_{k_1,d_1} \cdots a_{k_N,d_N} \bullet a_{k_{N+1},d_{N+1}} & (k_{N+1} > 0), \\ a_{k_{N+1},d_{N+1}} \bullet a_{k_1,d_1} \cdots a_{k_N,d_N} \bullet & (k_{N+1} < 0) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} k_{N+1} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ d_{N+1} \geq 0 \end{array} \right)$$

と定める。 $\{b_{n,d}\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}^{d \geq 0}$ についても同様とする。あとはこれを $\mathcal{B}$ 全体に $\mathbb{C}$ -線型に拡張する。

命題 2.2. $V(z;p)$ を

$$\bullet V(z;p) := \bullet \exp \left(- \sum_{n \neq 0} \frac{z^{-n}}{n} \sum_{d \geq 0} a_{n,d} p^{|n|d} - \sum_{n \neq 0} \frac{z^n}{n} \sum_{d \geq 0} b_{n,d} p^{|n|(d+1)} \right) \bullet$$

とおくとき、これは $\mathcal{F}$ から $\mathcal{F}[[p]][[z, z^{-1}]]$ への線型写像である。

証明. 以下では $V(z;p)\mathcal{F} \subset \mathcal{F}[[p]][[z, z^{-1}]]$ を示す。そのためには、 $|\psi\rangle \in \mathcal{F}$ を任意にとるときに $V(z;p)|\psi\rangle \in \mathcal{F}[[p]][[z, z^{-1}]]$ であることをいえばよい。話を見やすくするために

$$\bullet a_n(p) := \sum_{d \geq 0} a_{n,d} p^{|n|d}, \quad \bullet b_n(p) := \sum_{d \geq 0} b_{n,d} p^{|n|d}$$

と表記すると, $V(z; p)$ は

$$\begin{aligned} \bullet V_-(z; p) &= \exp \left(\sum_{n>0} \frac{z^n}{n} a_{-n}(p) + \sum_{n>0} \frac{z^{-n}}{n} p^n b_{-n}(p) \right), \\ \bullet V_+(z; p) &= \exp \left(- \sum_{n>0} \frac{z^{-n}}{n} a_n(p) - \sum_{n>0} \frac{z^n}{n} p^n b_n(p) \right) \end{aligned}$$

によって $V(z; p) = V_-(z; p)V_+(z; p)$ と書ける. $a_{-\lambda}(p) = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} a_{-\lambda_i}(p)$ などとおくと, これらは

$$\begin{aligned} \bullet V_-(z; p) &= \sum_{\lambda, \mu \in \mathcal{P}} \frac{a_{-\lambda}(p)b_{-\mu}(p)p^{|\mu|}}{z_\lambda z_\mu} z^{|\lambda| - |\mu|}, \\ \bullet V_+(z; p) &= \sum_{\lambda', \mu' \in \mathcal{P}} (-1)^{\ell(\lambda') + \ell(\mu')} \frac{a_{\lambda'}(p)b_{\mu'}(p)p^{|\mu'|}}{z_{\lambda'} z_{\mu'}} z^{-|\lambda'| + |\mu'|} \end{aligned}$$

と展開できるので, 形式的には次のように書ける:

$$\bullet V(z; p) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n} \sum_{\substack{\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathcal{P} \\ |\lambda| - |\mu| - |\lambda'| + |\mu'| = -n}} \frac{(-1)^{\ell(\lambda') + \ell(\mu')}}{z_\lambda z_\mu z_{\lambda'} z_{\mu'}} a_{-\lambda}(p)b_{-\mu}(p)a_{\lambda'}(p)b_{\mu'}(p)p^{|\mu| + |\mu'|}.$$

ここで $a_{-\lambda}(p)$ などの定義から, 各 $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathcal{P}$ に対し

$$\bullet \frac{(-1)^{\ell(\lambda') + \ell(\mu')}}{z_\lambda z_\mu z_{\lambda'} z_{\mu'}} a_{-\lambda}(p)b_{-\mu}(p)a_{\lambda'}(p)b_{\mu'}(p)p^{|\mu| + |\mu'|} \in \mathcal{B}[[p]]$$

なので, 分割 $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathcal{P}$ 及び $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ をとるごとに決まる $A_d^{\lambda, \mu, \lambda', \mu'} \in \mathcal{B}$ があって

$$\bullet \frac{(-1)^{\ell(\lambda') + \ell(\mu')}}{z_\lambda z_\mu z_{\lambda'} z_{\mu'}} a_{-\lambda}(p)b_{-\mu}(p)a_{\lambda'}(p)b_{\mu'}(p)p^{|\mu| + |\mu'|} = \sum_{d \geq |\mu| + |\mu'|} A_d^{\lambda, \mu, \lambda', \mu'} p^d \quad (\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathcal{P})$$

と書ける. これより

$$\begin{aligned} \bullet V(z; p)|\psi\rangle &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n} \sum_{\substack{\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathcal{P} \\ |\lambda| - |\mu| - |\lambda'| + |\mu'| = -n}} \sum_{d \geq |\mu| + |\mu'|} A_d^{\lambda, \mu, \lambda', \mu'} p^d |\psi\rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n} \sum_{d \geq 0} p^d \sum_{\substack{\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathcal{P} \\ |\lambda| - |\mu| - |\lambda'| + |\mu'| = -n \\ |\mu| + |\mu'| \leq d}} A_d^{\lambda, \mu, \lambda', \mu'} |\psi\rangle \end{aligned}$$

がわかる. $n \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ をそれぞれ 1 つ決めたとき,

$$\bullet \sum_{\substack{\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathcal{P} \\ |\lambda| - |\mu| - |\lambda'| + |\mu'| = -n \\ |\mu| + |\mu'| \leq d}} A_d^{\lambda, \mu, \lambda', \mu'} |\psi\rangle$$

は有限和であることに注意する. 実際, この和に寄与する $\lambda', \mu' \in \mathcal{P}$ は有限個である. また条件 $|\mu| + |\mu'| \leq d$ から, この和に寄与する $\mu \in \mathcal{P}$ も有限個である. 更に $|\lambda| - |\mu| - |\lambda'| + |\mu'| = -n$ から, この和に寄与する $\lambda \in \mathcal{P}$ も有限個である. 以上によって, 各 $n \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$\bullet \sum_{\substack{\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathcal{P} \\ |\lambda| - |\mu| - |\lambda'| + |\mu'| = -n \\ |\mu| + |\mu'| \leq d}} A_d^{\lambda, \mu, \lambda', \mu'} |\psi\rangle \in \mathcal{F}. \quad \square$$

今後は “ $V_-(z;p)V_+(p^{-2}z;p)$ ” というタイプの vertex operator も用いるので、これがどうい
線型写像なのかを確かめておく。ここで $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $\mathcal{F}$ に対し、 $\mathcal{F}((z))$ を $\mathcal{F}$ の元を係数と
する z の形式ローラン級数の全体とする：

$$\bullet \mathcal{F}((z)) := \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n z^n \mid f_n \in \mathcal{F} \ (n \in \mathbb{Z}) \text{ かつ } f_n \neq 0 \text{ となる } n < 0 \text{ は有限個しかない} \right\}.$$

形式ローラン級数とは、ある $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ によって

$$\bullet f_{-k} z^{-k} + f_{-k+1} z^{-k+1} + \cdots + f_{-2} z^{-2} + f_{-1} z^{-1} + f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \cdots$$

という格好に書かれるような、有限個の z の負べきの項を含むことを許した z の形式べき級数のことである。そ
ういう意味では $\mathcal{F}((z)) = \mathcal{F}[z^{-1}]z^{-1} + \mathcal{F}[[z]]$ である。

命題 2.3. $V_-(z;p)V_+(p^{-2}z;p)$ は $\mathcal{F}$ から $\mathcal{F}((p))[[z, z^{-1}]]$ への線型写像である。

証明. 命題 2.2 の記号を用いると、形式的には

$$\begin{aligned} & \bullet V_-(z;p)V_+(p^{-2}z;p) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n} \sum_{\substack{\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathcal{P} \\ |\lambda| - |\mu| - |\lambda'| + |\mu'| = -n}} \frac{(-1)^{\ell(\lambda') + \ell(\mu')}}{z_\lambda z_\mu z_{\lambda'} z_{\mu'}} a_{-\lambda}(p) b_{-\mu}(p) a_{\lambda'}(p) b_{\mu'}(p) p^{|\mu| + 2|\lambda'| - |\mu'|} \end{aligned}$$

である。ここで

$$\bullet \frac{(-1)^{\ell(\lambda') + \ell(\mu')}}{z_\lambda z_\mu z_{\lambda'} z_{\mu'}} a_{-\lambda}(p) b_{-\mu}(p) a_{\lambda'}(p) b_{\mu'}(p) p^{|\mu| + 2|\lambda'| - |\mu'|} \in \mathcal{B}((p))$$

なので、 $B_d^{\lambda, \mu, \lambda', \mu'} \in \mathcal{B}$ ($\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathcal{P}$, $d \geq 0$) によって

$$\bullet \frac{(-1)^{\ell(\lambda') + \ell(\mu')}}{z_\lambda z_\mu z_{\lambda'} z_{\mu'}} a_{-\lambda}(p) b_{-\mu}(p) a_{\lambda'}(p) b_{\mu'}(p) p^{|\mu| + 2|\lambda'| - |\mu'|} = \sum_{d \geq |\mu| + 2|\lambda'| - |\mu'|} B_d^{\lambda, \mu, \lambda', \mu'} p^d$$

と展開できる。 $|\psi\rangle \in \mathcal{F}$ を 1 つとるとき

$$\bullet V_-(z;p)V_+(p^{-2}z;p)|\psi\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n} \sum_{\substack{\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathcal{P} \\ |\lambda| - |\mu| - |\lambda'| + |\mu'| = -n}} \sum_{d \geq |\mu| + 2|\lambda'| - |\mu'|} B_d^{\lambda, \mu, \lambda', \mu'} |\psi\rangle p^d$$

である。ここで $n \in \mathbb{Z}$ を決めるごとに

$$\bullet \sum_{\substack{\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathcal{P} \\ |\lambda| - |\mu| - |\lambda'| + |\mu'| = -n}} \sum_{d \geq |\mu| + 2|\lambda'| - |\mu'|} B_d^{\lambda, \mu, \lambda', \mu'} |\psi\rangle p^d$$

に寄与する $\lambda', \mu' \in \mathcal{P}$ は有限個である。よって、この和に寄与する λ', μ' に関して $2|\lambda'| - |\mu'|$ には最
小値があるので、それを $N_\psi \in \mathbb{Z}$ とおくと

$$\begin{aligned} & \bullet \sum_{\substack{\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathcal{P} \\ |\lambda| - |\mu| - |\lambda'| + |\mu'| = -n}} \sum_{d \geq |\mu| + 2|\lambda'| - |\mu'|} B_d^{\lambda, \mu, \lambda', \mu'} |\psi\rangle p^d \\ &= \sum_{d \geq N_\psi} p^d \sum_{\substack{\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathcal{P} \\ |\lambda| - |\mu| - |\lambda'| + |\mu'| = -n \\ N_\psi \leq |\mu| + 2|\lambda'| - |\mu'| \leq d}} B_d^{\lambda, \mu, \lambda', \mu'} |\psi\rangle \in \mathcal{F}((p)) \end{aligned}$$

がわかる。実際、 $d \geq N_\psi$ を決めるごとに、条件 $N_\psi \leq |\mu| + 2|\lambda'| - |\mu'| \leq d$ から、和に寄与する $\mu \in \mathcal{P}$ も有限個である。更に $|\lambda| - |\mu| - |\lambda'| + |\mu'| = -n$ から、和に寄与する $\lambda \in \mathcal{P}$ も有限個である。よって、 $V_-(z; p)V_+(p^{-2}z; p)$ は $\mathcal{F}$ から $\mathcal{F}((p))[[z, z^{-1}]]$ への線型写像である。□

- 以下では、vertex operator に持たせる楕円モジュラスを $p^{1/2}$ に統一し、例えば

$$\bullet V^{\text{今後}}(z; p) := \text{exp} \left(- \sum_{n \neq 0} \frac{z^{-n}}{n} \sum_{d \geq 0} a_{n,d} p^{\frac{|n|d}{2}} - \sum_{n \neq 0} \frac{z^n}{n} \sum_{d \geq 0} b_{n,d} p^{\frac{|n|(d+1)}{2}} \right) :$$

を $V^{\text{今後}}(z; p) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}[[p^{1/2}]][[z, z^{-1}]]$ とみなす。これについて

$$\bullet V^{\text{今後}}(z; p)V^{\text{今後}}(w; p) = \theta_p(w/z) \text{exp} \left(- \sum_{n \neq 0} \frac{z^{-n}}{n} \sum_{d \geq 0} a_{n,d} p^{\frac{|n|d}{2}} - \sum_{n \neq 0} \frac{z^n}{n} \sum_{d \geq 0} b_{n,d} p^{\frac{|n|(d+1)}{2}} \right) \text{exp} \left(- \sum_{n \neq 0} \frac{w^{-n}}{n} \sum_{d \geq 0} a_{n,d} p^{\frac{|n|d}{2}} - \sum_{n \neq 0} \frac{w^n}{n} \sum_{d \geq 0} b_{n,d} p^{\frac{|n|(d+1)}{2}} \right) \quad (|p| < 1, |p| < |w/z| < 1)$$

が成り立つ。また $V_-^{\text{今後}}(z; p)V_+^{\text{今後}}(p^{-1}z; p) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}((p^{1/2}))[[z, z^{-1}]]$ である。

「そもそも、なぜ vertex operator の楕円化を考えるのか？」と感じた読者のために補足しておく。実は、「トーラス上の共形場理論」では相関関数がトレースを用いて定義されるのが普通であり、その流儀による計算の結果を再現するように elliptic な vertex operator はできているのである。

生成元 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ と関係式 $[a_m, a_n] = m\delta_{m+n, 0}$ ($m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) で生成される $\mathbb{C}$ -代数 $\mathcal{B}$ と Fock 空間 $\mathcal{F} = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}} \mathbb{C} a_{-\lambda} |0\rangle$ を考える (正規順序積はいつものようにして定める)。先に見た

$$\bullet V(z) = \text{exp} \left(- \sum_{n \neq 0} a_n \frac{z^{-n}}{n} \right) :$$

なる vertex operator を考え ($V(z) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}[[z, z^{-1}]]$ なのであった)、 $V_\pm(z) := \text{exp} \left(- \sum_{\pm n > 0} a_n \frac{z^{-n}}{n} \right)$ と書く ($V(z) = V_-(z)V_+(z)$)。ここで $a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} a_n z^{-n}$ とおき、 $L_0 \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F})$ を

$$\bullet L_0 := \text{CT}_z \left[\frac{1}{2} : a(z)^2 : \right] = \frac{1}{2} \sum_{m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} : a_m a_n : \underbrace{\text{CT}_z [z^{m+n}]}_{\delta_{m+n, 0}} = \sum_{m \geq 1} a_{-m} a_m$$

によって定めると $[L_0, a_n] = -na_n$ ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) が成り立つ。

実際、OPE の記法を用いると

$$\bullet \frac{1}{2} : a(z)^2 : a(w) \sim \frac{zw}{(z-w)^2} a(z) \sim \frac{w^2}{(z-w)^2} a(w) + \frac{w}{z-w} \{a(w) + wa'(w)\}$$

であり、ここで点 w を反時計回りに取り囲む積分 $\oint_{C_{z=w}} \frac{dz}{2\pi iz}$ を行えば $[L_0, a(w)]$ が出るので

$$\bullet [L_0, a(w)] = w^2 \cdot \frac{-1}{w^2} a(w) + a(w) + wa'(w) = D_w a(w)$$

を得る。この左辺は $\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} [L_0, a_n] w^{-n}$ 、右辺は $\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (-n) a_n w^{-n}$ なので、確かに $[L_0, a_n] = -na_n$ ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) が成り立つ。

さて、 $|p| < 1$ なる $p \in \mathbb{C}^\times$ を 1 つとって固定し、 $\mathcal{O} \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F})$ に対し

$$\bullet \langle \mathcal{O} \rangle_p := \frac{\text{tr}_{\mathcal{F}}(p^{L_0} \mathcal{O})}{\text{tr}_{\mathcal{F}}(p^{L_0})}$$

と定める ($\langle 1 \rangle_p = 1$ となるようにした). ここにある $\text{tr}_{\mathcal{F}}(p^{L_0})$ とは, $p^{L_0} a_{-\lambda} |0\rangle = p^{|\lambda|} a_{-\lambda} |0\rangle$ ($\lambda \in \mathcal{P}$) から

$$\bullet \text{tr}_{\mathcal{F}}(p^{L_0}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} p^{|\lambda|} = \sum_{N=0}^{\infty} \#\{\lambda \in \mathcal{P} \mid |\lambda| = N\} p^N = \sum_{k, k_2, k_3, \dots \geq 0} p^{k_1} p^{2k_2} p^{3k_3} \dots = \frac{1}{(p; p)_{\infty}}$$

であることがわかる (いわゆる「分割数」の生成母関数である).

相関関数の具体例として $\langle V(z)V(w) \rangle_p$ を計算してみる. まずは

$$\begin{aligned} \bullet \text{tr}_{\mathcal{F}}(p^{L_0} V(z)V(w)) &= \text{tr}_{\mathcal{F}}(p^{L_0} V_{-}(z)V_{+}(z)V_{-}(w)V_{+}(w)) \\ &= \left(1 - \frac{w}{z}\right) \text{tr}_{\mathcal{F}}(p^{L_0} V_{-}(z)V_{-}(w)V_{+}(z)V_{+}(w)) \end{aligned}$$

とできる. ここでトレースの性質と $V_{+}(z)p^{L_0} = p^{L_0}V_{+}(p^{-1}z)$ を使うと次のようになる:

$$\begin{aligned} \bullet \text{tr}_{\mathcal{F}}(p^{L_0} V(z)V(w)) &= \left(1 - \frac{w}{z}\right) \text{tr}_{\mathcal{F}}(V_{+}(z)V_{+}(w)p^{L_0} V_{-}(z)V_{-}(w)) \\ &= \left(1 - \frac{w}{z}\right) \text{tr}_{\mathcal{F}}(p^{L_0} V_{+}(p^{-1}z)V_{+}(p^{-1}w)V_{-}(z)V_{-}(w)). \end{aligned}$$

ここに見えている $V_{+}(p^{-1}z)V_{+}(p^{-1}w)V_{-}(z)V_{-}(w)$ を正規順序化するのであるが, その際に

$$\bullet V_{+}(p^{-1}z)V_{-}(z) = (1-p)V_{-}(z)V_{+}(p^{-1}z), \quad \bullet V_{+}(p^{-1}z)V_{-}(w) = \left(1 - p\frac{w}{z}\right)V_{-}(w)V_{+}(p^{-1}z)$$

などに注意すると

$$\begin{aligned} \bullet \text{tr}_{\mathcal{F}}(p^{L_0} V(z)V(w)) &= (1-p)^2 \left(1 - \frac{w}{z}\right) \left(1 - p\frac{w}{z}\right) \left(1 - p\frac{z}{w}\right) \text{tr}_{\mathcal{F}}(p^{L_0} V_{-}(z)V_{-}(w)V_{+}(p^{-1}z)V_{+}(p^{-1}w)) \end{aligned}$$

となる. 先ほどと同じ操作を行うことで

$$\begin{aligned} \bullet \text{tr}_{\mathcal{F}}(p^{L_0} V(z)V(w)) &= (1-p)^2 \left(1 - \frac{w}{z}\right) \left(1 - p\frac{w}{z}\right) \left(1 - p\frac{z}{w}\right) \text{tr}_{\mathcal{F}}(p^{L_0} V_{+}(p^{-2}z)V_{+}(p^{-2}w)V_{-}(z)V_{-}(w)) \end{aligned}$$

が出るが, $\text{tr}_{\mathcal{F}}$ の中身を正規順序化すると

$$\begin{aligned} \bullet \text{tr}_{\mathcal{F}}(p^{L_0} V(z)V(w)) &= (1-p)^2 (1-p^2)^2 \left(1 - \frac{w}{z}\right) \left(1 - p\frac{w}{z}\right) \left(1 - p^2\frac{w}{z}\right) \left(1 - p\frac{z}{w}\right) \left(1 - p^2\frac{z}{w}\right) \\ &\quad \times \text{tr}_{\mathcal{F}}(p^{L_0} V_{-}(z)V_{-}(w)V_{+}(p^{-2}z)V_{+}(p^{-2}w)) \end{aligned}$$

である. 以上の操作を繰り返すことで次を得る: $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し

$$\bullet V_{+}(p^{-k}z) = \exp\left(-\sum_{n>0} a_n p^{nk} \frac{z^{-n}}{n}\right)$$

なので $\lim_{k \rightarrow \infty} V_{+}(p^{-k}z) = 1$ と理解すると

$$\begin{aligned} \bullet \text{tr}_{\mathcal{F}}(p^{L_0} V(z)V(w)) &= (p; p)_{\infty}^2 (w/z; p)_{\infty} (pz/w; p)_{\infty} \text{tr}_{\mathcal{F}}(p^{L_0} V_{-}(z)V_{-}(w)) \\ &= (p; p)_{\infty}^2 \theta_p(w/z) \text{tr}_{\mathcal{F}}(p^{L_0} V_{-}(z)V_{-}(w)) \end{aligned}$$

となる．あとは軽く済ませるが, $V_-(p^k z)$ ($k \in \mathbb{Z}_{>0}$) について $\lim_{k \rightarrow \infty} V_-(p^k z) = 1$ なので

$$\begin{aligned} \bullet \operatorname{tr}_{\mathcal{F}}(p^{L_0} V_-(z) V_-(w)) &= \operatorname{tr}_{\mathcal{F}}(V_-(pz) V_-(pw) p^{L_0}) = \operatorname{tr}_{\mathcal{F}}(p^{L_0} V_-(pz) V_-(pw)) \\ &= \operatorname{tr}_{\mathcal{F}}(V_-(p^2 z) V_-(p^2 w) p^{L_0}) = \operatorname{tr}_{\mathcal{F}}(p^{L_0} V_-(p^2 z) V_-(p^2 w)) \\ &= \operatorname{tr}_{\mathcal{F}}(V_-(p^3 z) V_-(p^3 w) p^{L_0}) = \operatorname{tr}_{\mathcal{F}}(p^{L_0} V_-(p^3 z) V_-(p^3 w)) \\ &= \dots = \operatorname{tr}_{\mathcal{F}}(p^{L_0}) \end{aligned}$$

がわかり, 最終的には次が得られる:

$$\bullet \langle V(z) V(w) \rangle_p = \frac{(p; p)_{\infty}^2 \theta_p(w/z) \operatorname{tr}_{\mathcal{F}}(p^{L_0})}{\operatorname{tr}_{\mathcal{F}}(p^{L_0})} = (p; p)_{\infty}^2 \theta_p(w/z) \quad (|p| < |w/z| < 1).$$

この結果を見たならば, 先に $V^{\text{今後}}(z; p)$ と書いたものについて

$$\bullet V^{\text{今後}}(z; p) V^{\text{今後}}(w; p) = \theta_p(w/z) \bullet V^{\text{今後}}(z; p) V^{\text{今後}}(w; p) \bullet \quad (|p| < 1, |p| < |w/z| < 1)$$

であることとの間の対応がわかるであろう．ここで見たようなトレースで定義された相関関数の計算によって現れる関数が, elliptic な vertex operator を使う立場では, ただの OPE の計算で得られるのである．この事実が, いろいろな計算の負担を軽減してくれる (筆者としては「計算の負担の軽減」が目的であったわけではないのであるが, 結果としてそのようになっている).

2.2 1 階の楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示

2012 年頃に筆者が考えた楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示には, 先に述べたように「使った elliptic な vertex operator が well-defined でない」という問題があった．以上の準備によれば, これも問題なく定式化できる．

Fock 空間と双対的 Fock 空間の元たちのペアリングについて述べておく．生成元 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ と関係式 $[a_m, a_n] = m \delta_{m+n, 0}$ ($m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) で生成されるボソンの代数 $\mathcal{B}$ を用意し, Fock 空間 $\mathcal{F}$, 双対的 Fock 空間 $\mathcal{F}^{\dagger}$ を $\mathcal{F} := \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}} \mathbb{C} a_{-\lambda} |0\rangle$, $\mathcal{F}^{\dagger} := \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}} \mathbb{C} \langle 0| a_{\lambda}$ とおく．ここで, $\mathbb{C}$ -双線型写像

$$\bullet \mathcal{F}^{\dagger} \times \mathcal{F} \ni (\langle \psi|, |\phi\rangle) \mapsto \langle \psi| \phi \rangle \in \mathbb{C}$$

を次のようにして定める．まず $\langle 0|0\rangle := 1$ とする．Fock 空間たちの定義から, あとは $\langle 0| a_{\lambda} a_{-\mu} |0\rangle$ ($\lambda, \mu \in \mathcal{P}$) を定めればよいが, これは

$$\bullet \langle 0| a_{\lambda} a_{-\mu} |0\rangle := (a_{\lambda} a_{-\mu} \text{ を正規順序化したときに出る定数項})$$

と定める．こうすると $\langle 0| a_{\lambda} a_{-\mu} |0\rangle = z_{\lambda} \delta_{\lambda, \mu}$ ($\lambda, \mu \in \mathcal{P}$) が成り立つ (後述する)．あとはこれを $\mathcal{F}^{\dagger} \times \mathcal{F}$ 全体に $\mathbb{C}$ -双線型に拡張すればよい．

$\langle 0| a_{\lambda} a_{-\mu} |0\rangle = z_{\lambda} \delta_{\lambda, \mu}$ ($\lambda, \mu \in \mathcal{P}$) について補足する．まず, 自然数 k, n に対し

$$\begin{aligned} \bullet \langle 0| a_k^n a_{-k}^n |0\rangle &= \langle 0| a_k^{n-1} [a_k, a_{-k}^n] |0\rangle = n k \langle 0| a_k^{n-1} a_{-k}^{n-1} |0\rangle = n(n-1) k^2 \langle 0| a_k^{n-2} a_{-k}^{n-2} |0\rangle \\ &= \dots = n! k^n \end{aligned}$$

がわかる．また, $\langle 0| a_{\lambda} a_{-\mu} |0\rangle$ の計算の様子を思い浮かべればわかるように, これは $\lambda = \mu$ の場合にのみ 0 でない ($\lambda \neq \mu$ の場合, $a_{\lambda} a_{-\mu}$ を正規順序化した結果の各項は, ボソンの代数の生成元 a_n ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) を少なくとも 1 つは持っている)．よって, $\langle 0| a_{\lambda} a_{-\mu} |0\rangle$ が $\delta_{\lambda, \mu}$ に比例するのはわかるので, あとは $\langle 0| a_{\lambda} a_{-\lambda} |0\rangle$ を求めればよい．ここで「分割 λ に $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ が現れる回数 $n_{\lambda}(a)$ 」を使って書くと

$$\bullet \langle 0| a_{\lambda} a_{-\lambda} |0\rangle = \langle 0| \prod_{k \geq 1} a_k^{n_{\lambda}(k)} \prod_{\ell \geq 1} a_{-\ell}^{n_{\lambda}(\ell)} |0\rangle = \langle 0| \prod_{k \geq 1} a_k^{n_{\lambda}(k)} a_{-k}^{n_{\lambda}(k)} |0\rangle = \prod_{k \geq 1} k^{n_{\lambda}(k)} n_{\lambda}(k)! = z_{\lambda}.$$

今後は、ボソンの代数の正規順序積, Fock 空間と双対的 Fock 空間, それらの元たちのペアリングなどは標準的な流儀によって定義されているものとし, それらに関する説明は省略する.

以下では $|q| < 1$, $|t| < 1$ 及び $|t| < |q|$ であるとする. 生成元 $\{a_{n,d}\}_{d \geq 0}^{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, $\{b_{n,d}\}_{d \geq 0}^{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ と次の関係式で生成される $\mathbb{C}$ -代数を $\mathcal{B}$ とおく:

$$\bullet [a_{m,d}, a_{n,d'}] = m \frac{1-q^{|m|}}{1-t^{|m|}} \delta_{m+n,0} \delta_{d,d'}, \quad \bullet [b_{m,d}, b_{n,d'}] = m \frac{1-q^{-|m|}}{1-t^{-|m|}} \delta_{m+n,0} \delta_{d,d'}.$$

定義 2.4. $\phi(z; p) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}[[p^{1/2}]][[z, z^{-1}]]$, $\phi^\dagger(z; p) : \mathcal{F}^\dagger \rightarrow \mathcal{F}^\dagger[[p^{1/2}]][[z, z^{-1}]]$ を

$$\bullet \phi(z; p) := \exp \left(\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{1-q^n} \cdot \frac{z^n}{n} \sum_{d \geq 0} a_{-n,d} p^{\frac{nd}{2}} + \sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{1-q^{-n}} \cdot \frac{z^{-n}}{n} \sum_{d \geq 0} b_{-n,d} p^{\frac{n(d+1)}{2}} \right),$$

$$\bullet \phi^\dagger(z; p) := \exp \left(\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{1-q^n} \cdot \frac{z^n}{n} \sum_{d \geq 0} a_{n,d} p^{\frac{nd}{2}} + \sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{1-q^{-n}} \cdot \frac{z^{-n}}{n} \sum_{d \geq 0} b_{n,d} p^{\frac{n(d+1)}{2}} \right)$$

とおく. また, vertex operator $\eta(z; p) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}[[p^{1/2}]][[z, z^{-1}]]$ を

$$\bullet \eta_\pm(z; p) := \exp \left(- \sum_{\pm n > 0} (1-t^n) \frac{z^{-n}}{n} \sum_{d \geq 0} a_{n,d} p^{\frac{|n|d}{2}} - \sum_{\pm n > 0} (1-t^{-n}) \frac{z^n}{n} \sum_{d \geq 0} b_{n,d} p^{\frac{|n|(d+1)}{2}} \right)$$

によって $\eta(z; p) := \eta_-(z; p) \eta_+(z; p)$ と定める.

$\phi(z; p)$, $\eta(z; p)$ は, Macdonald 作用素の自由場表示にて現れた

$$\bullet \phi^\Delta(z) = \exp \left(\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{1-q^n} a_{-n} \frac{z^n}{n} \right), \quad \bullet \eta^\Delta(z) = \exp \left(- \sum_{n \neq 0} (1-t^n) a_n \frac{z^{-n}}{n} \right) :$$

の楯円化である.

命題 2.5. (1) $\phi_N(\mathbf{x}; p) := \prod_{j=1}^N \phi(x_j; p)$, $\phi_N^\dagger(\mathbf{x}; p) := \prod_{j=1}^N \phi^\dagger(x_j; p)$ とおくとき次が成り立つ:

$$\bullet \langle 0 | \phi_M^\dagger(\mathbf{x}; p) \phi_N(\mathbf{y}; p) | 0 \rangle = \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) := \prod_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} \frac{\Gamma_{q,p}(x_i y_j)}{\Gamma_{q,p}(t x_i y_j)}.$$

(2) $\eta_\pm(z; p)$ について

$$\bullet \eta_-(tz; p) \phi(z; p) = \phi(qz; p), \quad \bullet \phi^\dagger(z; p) \eta_+(z^{-1}; p) = \phi^\dagger(qz; p)$$

及び次が成り立つ:

$$\bullet \eta_+(z; p) \phi(x; p) = \left[\frac{\theta_p(x/z)}{\theta_p(tx/z)} \right]_{|t|^{-1}|p| < |x/z| < 1} \phi(x; p) \eta_+(z; p) \quad (|p| < |t|),$$

$$\bullet \phi^\dagger(x; p) \eta_-(z; p) = \left[\frac{\theta_p(t^{-1}xz)}{\theta_p(xz)} \right]_{|p| < |xz| < |t|} \eta_-(z; p) \phi^\dagger(x; p) \quad (|p| < |t|).$$

証明. (1) $\phi^\dagger(x; p)$ と $\phi(y; p)$ の積について

$$\begin{aligned} & \bullet \phi^\dagger(x; p)\phi(y; p) \\ &= \exp\left(\sum_{m>0} \frac{1-t^m}{1-q^m} \cdot \frac{(xy)^m}{m} \sum_{d \geq 0} p^{md} + \sum_{m>0} \frac{1-t^{-m}}{1-q^{-m}} \cdot \frac{(xy)^{-m}}{m} \sum_{d \geq 0} p^{m(d+1)}\right) \phi(y; p)\phi^\dagger(x; p) \end{aligned}$$

とできるが, ここに見えている

$$\bullet \exp\left(\sum_{m>0} \frac{1-t^m}{1-q^m} \cdot \frac{(xy)^m}{m} \sum_{d \geq 0} p^{md} + \sum_{m>0} \frac{1-t^{-m}}{1-q^{-m}} \cdot \frac{(xy)^{-m}}{m} \sum_{d \geq 0} p^{m(d+1)}\right)$$

は, $|qp| \cdot |t|^{-1} < 1$ (つまり $|p| < |q^{-1}t| < 1$) かつ $|qp| < |xy| < 1$, $|qp| < |txy| < 1$ である場合には

$$\begin{aligned} & \bullet \exp\left(\sum_{m>0} \frac{1-t^m}{1-q^m} \cdot \frac{(xy)^m}{m} \sum_{d \geq 0} p^{md} + \sum_{m>0} \frac{1-t^{-m}}{1-q^{-m}} \cdot \frac{(xy)^{-m}}{m} \sum_{d \geq 0} p^{m(d+1)}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{m>0} \frac{1-t^m}{(1-q^m)(1-p^m)} \cdot \frac{(xy)^m}{m} - \sum_{m>0} \frac{1-t^{-m}}{(1-q^m)(1-p^m)} (qp)^m \frac{(xy)^{-m}}{m}\right) \\ &= \frac{(txy; q, p)_\infty}{(xy; q, p)_\infty} \cdot \frac{(qp(xy)^{-1}; q, p)_\infty}{(qp(tx y)^{-1}; q, p)_\infty} = \frac{\Gamma_{q,p}(xy)}{\Gamma_{q,p}(txy)} \end{aligned}$$

となる. これを使えば $\langle 0 | \phi_M^\dagger(\mathbf{x}; p) \phi_N(\mathbf{y}; p) | 0 \rangle = \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p)$ もわかる.

(2) 簡単に述べると次のような具合である. $\eta_+(z; p)\phi(x; p)$ については

$$\begin{aligned} & \bullet \eta_+(z; p)\phi(x; p) \\ &= \exp\left(-\sum_{m>0} (1-t^m) \frac{(x/z)^m}{m} \sum_{d \geq 0} p^{md} - \sum_{m>0} (1-t^{-m}) \frac{(x/z)^{-m}}{m} \sum_{d \geq 0} p^{m(d+1)}\right) \phi(x; p)\eta_+(z; p) \end{aligned}$$

とできる. ここに見えている

$$\bullet \exp\left(-\sum_{m>0} (1-t^m) \frac{(x/z)^m}{m} \sum_{d \geq 0} p^{md} - \sum_{m>0} (1-t^{-m}) \frac{(x/z)^{-m}}{m} \sum_{d \geq 0} p^{m(d+1)}\right)$$

については, $|p| < |t| < 1$ かつ $|t|^{-1}|p| < |x/z| < 1$ であるときには次のようにできる:

$$\begin{aligned} & \bullet \exp\left(-\sum_{m>0} (1-t^m) \frac{(x/z)^m}{m} \sum_{d \geq 0} p^{md} - \sum_{m>0} (1-t^{-m}) \frac{(x/z)^{-m}}{m} \sum_{d \geq 0} p^{m(d+1)}\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{m>0} \frac{1-t^m}{1-p^m} \cdot \frac{(x/z)^m}{m} - \sum_{m>0} \frac{1-t^{-m}}{1-p^m} p^m \frac{(x/z)^{-m}}{m}\right) \\ &= \frac{(x/z; p)_\infty}{(tx/z; p)_\infty} \cdot \frac{(pz/x; p)_\infty}{(pt^{-1}z/x; p)_\infty} = \frac{\theta_p(x/z)}{\theta_p(tx/z)}. \end{aligned}$$

以上によって

$$\bullet \eta_+(z; p)\phi(x; p) = \left[\frac{\theta_p(x/z)}{\theta_p(tx/z)} \right]_{|t|^{-1}|p| < |x/z| < 1} \phi(x; p)\eta_+(z; p) \quad (|p| < |t|)$$

がわかった. 残りの式についても同様である. $\square$

命題 2.6 (楯円 Ruijsenaars 作用素 $D_N(p)$ の自由場表示). vertex operator

$$\bullet \eta_-(z; p) \{ \eta_+(z; p) - t^{-N} \eta_+(p^{-1}z; p) \} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}((p^{1/2}))[[z, z^{-1}]]$$

によって楯円 Ruijsenaars 作用素 $D_N(p)$ が次のようにして復元される :

$$\begin{aligned} & \bullet \underset{z}{\text{CT}} [\eta_-(z; p) \{ \eta_+(z; p) - t^{-N} \eta_+(p^{-1}z; p) \}] \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\ &= \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} D_N(p) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle. \end{aligned}$$

証明. 「テータ関数とデルタ関数の関係」を使う. $\eta_+(z; p)$ と $\phi(\mathbf{x}; p)$ について

$$\begin{aligned} & \bullet \eta_+(z; p) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\ &= \left[\prod_{i=1}^N \frac{\theta_p(x_i/z)}{\theta_p(tx_i/z)} \right]_{|t|^{-1}|p| < |x_i/z| < 1 \atop (1 \leq i \leq N)} \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \quad \left(|p| < \frac{\min\{|x_1|, \dots, |x_N|\}}{\max\{|x_1|, \dots, |x_N|\}} |t| \right) \end{aligned}$$

である. 一方で, $\theta_p(pz) = \theta_p(z^{-1}) = -z^{-1} \theta_p(z)$ に注意すると

$$\begin{aligned} & \bullet t^{-N} \eta_+(p^{-1}z; p) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\ &= t^{-N} \left[\prod_{i=1}^N \frac{\theta_p(px_i/z)}{\theta_p(ptx_i/z)} \right]_{|t|^{-1} < |x_i/z| < |p|^{-1} \atop (1 \leq i \leq N)} \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\ &= \left[\prod_{i=1}^N \frac{\theta_p(x_i/z)}{\theta_p(tx_i/z)} \right]_{|t|^{-1} < |x_i/z| < |p|^{-1} \atop (1 \leq i \leq N)} \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \quad \left(|p| < \frac{\min\{|x_1|, \dots, |x_N|\}}{\max\{|x_1|, \dots, |x_N|\}} |t| \right) \end{aligned}$$

でもある. ここで「テータ関数とデルタ関数の関係」によって

$$\begin{aligned} & \bullet \left[\prod_{i=1}^N \frac{\theta_p(x_i/z)}{\theta_p(tx_i/z)} \right]_{|t|^{-1}|p| < |x_i/z| < 1 \atop (1 \leq i \leq N)} - \left[\prod_{i=1}^N \frac{\theta_p(x_i/z)}{\theta_p(tx_i/z)} \right]_{|t|^{-1} < |x_i/z| < |p|^{-1} \atop (1 \leq i \leq N)} \\ &= \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \sum_{i=1}^N \delta\left(t \frac{x_i}{z}\right) \prod_{j \neq i} \frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)} \\ &= \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \sum_{i=1}^N \delta\left(t \frac{x_i}{z}\right) A_i(\mathbf{x}; p) \end{aligned}$$

が成り立つので次がわかる : $\eta_-(tx; p) \phi(\mathbf{x}; p) = \phi(qx; p)$ によって

$$\begin{aligned} & \bullet \eta_-(z; p) \{ \eta_+(z; p) - t^{-N} \eta_+(p^{-1}z; p) \} \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\ &= \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \sum_{i=1}^N \eta_-(z; p) \delta\left(t \frac{x_i}{z}\right) A_i(\mathbf{x}; p) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\ &= \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \sum_{i=1}^N \delta\left(t \frac{x_i}{z}\right) A_i(\mathbf{x}; p) \eta_-(tx_i; p) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\ &= \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \sum_{i=1}^N \delta\left(t \frac{x_i}{z}\right) A_i(\mathbf{x}; p) T_{q, x_i} \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle. \end{aligned}$$

あとはこの z についての定数項を拾えば結論を得る. $\square$

今回述べたものの“双対版”は次から従う：

$$\bullet \langle 0 | \phi_N^\dagger(\mathbf{x}; p) \{ \eta_-(z; p) - t^{-N} \eta_-(pz; p) \} \eta_+(z; p) = \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \sum_{i=1}^N \delta(x_i z) A_i(\mathbf{x}; p) T_{q, x_i} \langle 0 | \phi_N^\dagger(\mathbf{x}; p).$$

これによって次も成り立つ：

$$\bullet \langle 0 | \phi_N^\dagger(\mathbf{x}; p) \text{CT}_z \left[\{ \eta_-(z; p) - t^{-N} \eta_-(pz; p) \} \eta_+(z; p) \right] = \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} D_N(p) \langle 0 | \phi_N^\dagger(\mathbf{x}; p).$$

2.3 高階の楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示

2022 年 11 月頃, その当時までは無理ではないかと思っていた「高階の」楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示についてぼんやりと考えてみたら, 意外と何とかかなりそうだということがほとんど“突然に”わかった.

以下, $\eta(z; p) = \eta_-(z; p) \eta_+(z; p)$ を単に $\eta(z)$ と書く. まずは 2 階の楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示を試みる. 1 階の楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示にて用いた

$$\bullet X(z) := \eta_-(z) \{ \eta_+(z) - t^{-N} \eta_+(p^{-1}z) \}$$

の働き方に注目する. 既に見たように, $X_+(z) = \eta_+(z) - t^{-N} \eta_+(p^{-1}z)$ について

$$\bullet X_+(z) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle = \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \sum_{i=1}^N A_i(\mathbf{x}; p) \delta\left(t \frac{x_i}{z}\right) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle$$

が成り立つのであった. これによって

$$\begin{aligned} & \bullet X_+(z_1) X_+(z_2) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\ &= \left\{ \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^2 \sum_{1 \leq i_1, i_2 \leq N} A_{i_1}(\mathbf{x}; p) A_{i_2}(\mathbf{x}; p) \delta\left(t \frac{x_{i_1}}{z_1}\right) \delta\left(t \frac{x_{i_2}}{z_2}\right) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \end{aligned}$$

であるが, 今回の場合は更に次のようにする: $\mathbb{C}^\times$ 上の有理型関数 $f_p(z)$ を

$$\bullet f_p(z) := \frac{\theta_p(z)^2}{\theta_p(tz) \theta_p(t^{-1}z)}$$

とおき, $f_p(z_2/z_1)$ をかけると

$$\begin{aligned} & \bullet f_p(z_2/z_1) X_+(z_1) X_+(z_2) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \times \left\{ \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^{-2} \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i_1, i_2 \leq N \\ i_1, i_2 \text{ は相異なる}}} f_p(x_{i_2}/x_{i_1}) A_{i_1}(\mathbf{x}; p) A_{i_2}(\mathbf{x}; p) \delta\left(t \frac{x_{i_1}}{z_1}\right) \delta\left(t \frac{x_{i_2}}{z_2}\right) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \end{aligned}$$

である. 上で「 i_1, i_2 は相異なる」和になるのは, $f_p(z_2/z_1)$ がデルタ関数に触れると $\theta_p(x_{i_2}/x_{i_1})^2$ が生じるからである. これを $\#I=2$ なる $I \subset \{1, \dots, N\}$ についての和に書き換えることを考える. 和の書き換えでよくやるように

$$\bullet \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} C(i, j) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \{C(i, j) + C(j, i)\}$$

などとできることを使えば

$$\begin{aligned} & \bullet f_p(z_2/z_1)X_+(z_1)X_+(z_2)\phi_N(\mathbf{x};p)|0\rangle \times \left\{ \frac{t^{-N+1}\theta_p(t^{-1})}{(p;p)_\infty^2} \right\}^{-2} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq N} f_p(x_{i_2}/x_{i_1})A_{i_1}(\mathbf{x};p)A_{i_2}(\mathbf{x};p) \left\{ \delta\left(t\frac{x_{i_1}}{z_1}\right)\delta\left(t\frac{x_{i_2}}{z_2}\right) + \delta\left(t\frac{x_{i_2}}{z_1}\right)\delta\left(t\frac{x_{i_1}}{z_2}\right) \right\} \phi_N(\mathbf{x};p)|0\rangle \end{aligned}$$

とできる. あとは $f_p(x_{i_2}/x_{i_1})A_{i_1}(\mathbf{x};p)A_{i_2}(\mathbf{x};p)$ がどうなっているのかについてであるが, これは意外とうまくまとまる: ある $1 \leq i_1 < i_2 \leq N$ なる i_1, i_2 に対し $I = \{i_1, i_2\}$ とおくと

$$\begin{aligned} & \bullet f_p(x_{i_2}/x_{i_1})A_{i_1}(\mathbf{x};p)A_{i_2}(\mathbf{x};p) \\ &= \frac{\theta_p(x_{i_2}/x_{i_1})^2}{\theta_p(tx_{i_2}/x_{i_1})\theta_p(t^{-1}x_{i_2}/x_{i_1})} \prod_{k \neq i_1} \frac{\theta_p(tx_{i_1}/x_k)}{\theta_p(x_{i_1}/x_k)} \prod_{\ell \neq i_2} \frac{\theta_p(tx_{i_2}/x_\ell)}{\theta_p(x_{i_2}/x_\ell)} \\ &= \frac{\theta_p(x_{i_2}/x_{i_1})^2}{\theta_p(tx_{i_2}/x_{i_1})\theta_p(t^{-1}x_{i_2}/x_{i_1})} \cdot \frac{\theta_p(tx_{i_1}/x_{i_2})}{\theta_p(x_{i_1}/x_{i_2})} \cdot \frac{\theta_p(tx_{i_2}/x_{i_1})}{\theta_p(x_{i_2}/x_{i_1})} \times \prod_{k \neq i_1, i_2} \frac{\theta_p(tx_{i_1}/x_k)}{\theta_p(x_{i_1}/x_k)} \prod_{\ell \neq i_1, i_2} \frac{\theta_p(tx_{i_2}/x_\ell)}{\theta_p(x_{i_2}/x_\ell)} \\ &= t \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} \frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)} = A_I^{(2)}(\mathbf{x};p). \end{aligned}$$

こうして次がわかった: $\eta_-(z_1)\eta_-(z_2)X_+(z_1)X_+(z_2) = \bullet X(z_1)X(z_2) \bullet$ に注意すると

$$\begin{aligned} & \bullet f_p(z_2/z_1) \bullet X(z_1)X(z_2) \bullet \phi_N(\mathbf{x};p)|0\rangle \times \left\{ \frac{t^{-N+1}\theta_p(t^{-1})}{(p;p)_\infty^2} \right\}^{-2} \\ &= \sum_{I=\{i_1, i_2\} \subset \{1, \dots, N\}} A_I^{(2)}(\mathbf{x};p) \left\{ \delta\left(t\frac{x_{i_1}}{z_1}\right)\delta\left(t\frac{x_{i_2}}{z_2}\right) + \delta\left(t\frac{x_{i_2}}{z_1}\right)\delta\left(t\frac{x_{i_1}}{z_2}\right) \right\} \prod_{i \in I} T_{q, x_i} \phi_N(\mathbf{x};p)|0\rangle. \end{aligned}$$

よって, あとはこの z_1, z_2 についての定数項を拾えば

$$\bullet \text{CT}_{z_1, z_2} [f_p(z_2/z_1) \bullet X(z_1)X(z_2) \bullet] \phi_N(\mathbf{x};p)|0\rangle = 2 \left\{ \frac{t^{-N+1}\theta_p(t^{-1})}{(p;p)_\infty^2} \right\}^2 D_N^{(2)}(p) \phi_N(\mathbf{x};p)|0\rangle$$

を得る. より高階の場合もこのようにすればよさそうである.

命題 2.7 (高階の楯円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示). vertex operator $X(z)$ を

$$\bullet X(z) := \eta_-(z) \{ \eta_+(z) - t^{-N} \eta_+(p^{-1}z) \} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}((p^{1/2}))[[z, z^{-1}]]$$

と定め, $\mathbb{C}^\times$ 上の有理型関数 $f_p(z)$ 及び r 変数の楯円関数 $f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)$ を

$$\bullet f_p(z) := \frac{\theta_p(z)^2}{\theta_p(tz)\theta_p(t^{-1}z)}, \quad \bullet f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) := \prod_{1 \leq a < b \leq r} f_p(z_b/z_a)$$

と定める. 楯円 Ruijsenaars 作用素 $D_N^{(r)}(p)$ ($r \in \{0, 1, \dots, N\}$) は次のように自由場表示される:

$$\begin{aligned} & \bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet X(z_1) \cdots X(z_r) \bullet \right] \phi_N(\mathbf{x};p)|0\rangle \\ &= r! \left\{ \frac{t^{-N+1}\theta_p(t^{-1})}{(p;p)_\infty^2} \right\}^r D_N^{(r)}(p) \phi_N(\mathbf{x};p)|0\rangle. \end{aligned}$$

上の内容の“双対版”は次の通りである： $X^\vee(z) := \{\eta_-(z) - t^{-N}\eta_-(pz)\}\eta_+(z)$ とおくと

$$\bullet \langle 0 | \phi_N^\dagger(\mathbf{x}; p) \text{ CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet X^\vee(z_1) \cdots X^\vee(z_r) \bullet \right] = r! \left\{ \frac{t^{-N+1}\theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^r D_N^{(r)}(p) \langle 0 | \phi_N^\dagger(\mathbf{x}; p) \rangle.$$

証明. これまでの内容から

$$\begin{aligned} & \bullet X_+(z_1) \cdots X_+(z_r) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\ &= \left\{ \frac{t^{-N+1}\theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^r \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r \leq N} A_{i_1}(\mathbf{x}; p) \cdots A_{i_r}(\mathbf{x}; p) \delta\left(t \frac{x_{i_1}}{z_1}\right) \cdots \delta\left(t \frac{x_{i_r}}{z_r}\right) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \end{aligned}$$

である. よって, デルタ関数の働き方を考慮すると次を得る：

$$\begin{aligned} & \bullet \left\{ \frac{t^{-N+1}\theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^{-r} f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet X(z_1) \cdots X(z_r) \bullet \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_r \leq N \\ i_1, \dots, i_r \text{ は相異なる}}} A_{i_1}(\mathbf{x}; p) \cdots A_{i_r}(\mathbf{x}; p) f_p^{(r)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) \delta\left(t \frac{x_{i_1}}{z_1}\right) \cdots \delta\left(t \frac{x_{i_r}}{z_r}\right) T_{q, x_{i_1}} \cdots T_{q, x_{i_r}} \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle. \end{aligned}$$

ここで, 一般に

$$\bullet \sum_{1 \leq i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_r \leq N} C(i_1, \dots, i_r) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq N} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} C(i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(r)})$$

などとできることによって次を得る：

$$\begin{aligned} & \bullet \left\{ \frac{t^{-N+1}\theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^{-r} f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet X(z_1) \cdots X(z_r) \bullet \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\ &= \sum_{1 < i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq N} A_{i_1}(\mathbf{x}; p) \cdots A_{i_r}(\mathbf{x}; p) f_p^{(r)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) \\ & \quad \times \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \delta\left(t \frac{x_{i_1}}{z_{\sigma(1)}}\right) \cdots \delta\left(t \frac{x_{i_r}}{z_{\sigma(r)}}\right) T_{q, x_{i_1}} \cdots T_{q, x_{i_r}} \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle. \end{aligned}$$

ここで, ある $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq N$ なる自然数の組から成る $I = \{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, N\}$ を考えると

$$\begin{aligned} & \bullet A_{i_1}(\mathbf{x}; p) \cdots A_{i_r}(\mathbf{x}; p) f_p^{(r)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) \\ &= A_{i_1}(\mathbf{x}; p) \cdots A_{i_r}(\mathbf{x}; p) \prod_{1 \leq a < b \leq r} \frac{\theta_p(x_{i_b}/x_{i_a})^2}{\theta_p(tx_{i_b}/x_{i_a})\theta_p(t^{-1}x_{i_b}/x_{i_a})} \\ &= t^{\frac{r(r-1)}{2}} \prod_{i \in I} \prod_{j \neq i} \frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)} \prod_{\substack{k, \ell \in I \\ k \neq \ell}} \frac{\theta_p(x_k/x_\ell)}{\theta_p(tx_k/x_\ell)} \\ &= t^{\frac{r(r-1)}{2}} \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} \frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)} \times \prod_{\substack{i, j \in I \\ j \neq i}} \frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)} \prod_{\substack{k, \ell \in I \\ k \neq \ell}} \frac{\theta_p(x_k/x_\ell)}{\theta_p(tx_k/x_\ell)} = A_I^{(r)}(\mathbf{x}; p) \end{aligned}$$

が成り立つ. これによって

$$\begin{aligned} & \bullet \left\{ \frac{t^{-N+1}\theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^{-r} f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet X(z_1) \cdots X(z_r) \bullet \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\ &= \sum_{I = \{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, N\}} A_I^{(r)}(\mathbf{x}; p) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \delta\left(t \frac{x_{i_1}}{z_{\sigma(1)}}\right) \cdots \delta\left(t \frac{x_{i_r}}{z_{\sigma(r)}}\right) \prod_{i \in I} T_{q, x_i} \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \end{aligned}$$

である. この $z_1, \dots, z_r$ についての定数項を拾うことで次を得る:

$$\begin{aligned}
 & \bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet X(z_1) \cdots X(z_r) \bullet \right] \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\
 &= r! \left\{ \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^r \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ \#I=r}} A_I^{(r)}(\mathbf{x}; p) \prod_{i \in I} T_{q, x_i} \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\
 &= r! \left\{ \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^r D_N^{(r)}(p) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle. \quad \square
 \end{aligned}$$

楢円 Ruijsenaars 作用素の三角関数版として

$$\bullet D_N^{(r)} := D_N^{(r)}(p) \Big|_{p=0} = t^{\frac{r(r-1)}{2}} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ \#I=r}} \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \prod_{k \in I} T_{q, x_k} \quad (r \in \{0, 1, \dots, N\})$$

で定義される「Macdonald 作用素」がある. 読者は「楢円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示において $p=0$ とおけば Macdonald 作用素の自由場表示が得られるのであろう」と思うかもしれない. 基本的にはもちろんそれで正しいのであるが, これを実行しようとするときに少し気をつけねばならない事柄がある. そういったことも含め, Macdonald 作用素の自由場表示については第 5 章「三角の場合」を参照してほしい.

2.4 補足: 正規順序積の脱着

これまで使ってきた vertex operator $X(z)$ は $\eta(z) = \eta_-(z)\eta_+(z)$, $\tilde{\eta}(z) = \eta_-(z)\eta_+(p^{-1}z)$ によって $X(z) = \eta(z) - t^{-N}\tilde{\eta}(z)$ と書けるので, r 階の楢円 Ruijsenaars 作用素 $D_N^{(r)}(p)$ の自由場表示で用いた

$$\bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet X(z_1) \cdots X(z_r) \bullet \right]$$

は, 形式的には

$$\begin{aligned}
 & \bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet X(z_1) \cdots X(z_r) \bullet \right] \\
 &= \sum_{k=0}^r (-t^{-N})^{r-k} \binom{r}{k} \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet \eta(z_1) \cdots \eta(z_k) \tilde{\eta}(z_{k+1}) \cdots \tilde{\eta}(z_r) \bullet \right]
 \end{aligned}$$

とばらせる (↑ 積分路のとり方について注意すべきことがある. これについては後述する).

これは次のようにしてわかる. まず, 可換な文字たち $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r$ 及び z について

$$\bullet (x_1 + zy_1) \cdots (x_r + zy_r) = \sum_{k=0}^r z^k \sum_{\substack{K \subset \{1, \dots, r\} \\ \#K=k}} \prod_{a \in K} y_a \prod_{b \notin K} x_b$$

であるので, 例えば

$$\bullet \bullet \prod_{i=1}^r \{ \eta(z_i) - t^{-N} \tilde{\eta}(z_i) \} \bullet = \sum_{k=0}^r (-t^{-N})^k \sum_{\substack{K \subset \{1, \dots, r\} \\ \#K=k}} \bullet \prod_{a \in K} \tilde{\eta}(z_a) \prod_{b \notin K} \eta(z_b) \bullet$$

などとできる. こうして,

$$\begin{aligned}
 & \bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet X(z_1) \cdots X(z_r) \bullet \right] \\
 &= \sum_{k=0}^r (-t^{-N})^k \sum_{\substack{K \subset \{1, \dots, r\} \\ \#K=k}} \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet \prod_{a \in K} \tilde{\eta}(z_a) \prod_{b \notin K} \eta(z_b) \bullet \right]
 \end{aligned}$$

を得る。ただ、 r 変数の楕円関数 $f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)$ が $z_1, \dots, z_r$ の入れ換えの下で不変な楕円関数であること、定数項を拾う操作 $\text{CT}_{z_1, \dots, z_r} [\bullet]$ において $z_1, \dots, z_r$ はダミーであること、正規順序積 $\bullet \bullet \bullet$ の中では積の順序を気にしないでよいことなどから、上の結果は次のようにもっと簡単に書ける：

$$\begin{aligned} & \bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet X(z_1) \cdots X(z_r) \bullet \right] \\ &= \sum_{k=0}^r \left(-t^{-N} \right)^{r-k} \binom{r}{k} \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet \eta(z_1) \cdots \eta(z_k) \tilde{\eta}(z_{k+1}) \cdots \tilde{\eta}(z_r) \bullet \right]. \end{aligned}$$

以下、 $\text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet X(z_1) \cdots X(z_r) \bullet \right]$ を上のように展開して現れた

$$\bullet f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet \eta(z_1) \cdots \eta(z_k) \tilde{\eta}(z_{k+1}) \cdots \tilde{\eta}(z_r) \bullet \quad (0 \leq k \leq r)$$

などの正規順序積を外すことを考える。その際に、vertex operator の積の OPE から生じる各因子の収束領域に $f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)$ を適当に制限する必要がある。ここに少し微妙な話がある。

結論を先に述べると「楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示の三角極限によって Macdonald 作用素の自由場表示の結果を正しく再現するには、OPE の収束のための条件としては現れないようなものをも考えねばならず、それが非自明に見える」ということである。よく注意してほしい。

最も簡単な場合は次のような具合である。例えば $\bullet X(z)X(w) \bullet$ について

$$\bullet \bullet X(z)X(w) \bullet = \bullet \eta(z)\eta(w) \bullet - t^{-N} \bullet \tilde{\eta}(z)\eta(w) \bullet - t^{-N} \bullet \eta(z)\tilde{\eta}(w) \bullet + t^{-2N} \bullet \tilde{\eta}(z)\tilde{\eta}(w) \bullet$$

であるが、 $\eta(z)\eta(w)$ について

$$\bullet \eta(z)\eta(w) = \left[\frac{\theta_p(w/z)\theta_p(qt^{-1}w/z)}{\theta_p(qw/z)\theta_p(t^{-1}w/z)} \right]_{|q|^{-1}|p| < |w/z| < |t|} \bullet \eta(z)\eta(w) \bullet \quad (|p| < |qt|)$$

なので、この OPE によって現れた関数を表すのに

$$\bullet c(z) := \frac{\theta_p(z)\theta_p(qt^{-1}z)}{\theta_p(qz)\theta_p(t^{-1}z)}$$

を使うと

$$\begin{aligned} & \bullet \eta(z)\eta(w) = [c(w/z)]_{|q|^{-1}|p| < |w/z| < |t|} \bullet \eta(z)\eta(w) \bullet, \\ & \bullet \tilde{\eta}(z)\eta(w) = [c(w/z)]_{|q|^{-1} < |w/z| < |t| \cdot |p|^{-1}} \bullet \tilde{\eta}(z)\eta(w) \bullet, \\ & \bullet \eta(z)\tilde{\eta}(w) = [c(w/z)]_{|q|^{-1}|p| < |w/z| < |t|} \bullet \eta(z)\tilde{\eta}(w) \bullet, \\ & \bullet \tilde{\eta}(z)\tilde{\eta}(w) = [c(w/z)]_{|q|^{-1} < |w/z| < |t| \cdot |p|^{-1}} \bullet \tilde{\eta}(z)\tilde{\eta}(w) \bullet \quad (|p| < |qt|) \end{aligned}$$

が成り立つ（以下、条件 $|p| < |qt|$ をしばらく省略する）。これによって

$$\begin{aligned} & \bullet \bullet X(z)X(w) \bullet \\ &= [c(w/z)^{-1}]_{|q|^{-1}|p| < |w/z| < |t|} \eta(z)\eta(w) - t^{-N} [c(w/z)^{-1}]_{|q|^{-1} < |w/z| < |t| \cdot |p|^{-1}} \tilde{\eta}(z)\eta(w) \\ & \quad - t^{-N} [c(w/z)^{-1}]_{|q|^{-1}|p| < |w/z| < |t|} \eta(z)\tilde{\eta}(w) + t^{-2N} [c(w/z)^{-1}]_{|q|^{-1} < |w/z| < |t| \cdot |p|^{-1}} \tilde{\eta}(z)\tilde{\eta}(w) \end{aligned}$$

である。このように、 $X(z)$ の積からは収束領域の異なるものが同じ 1 本の式の中に生じる。これに

$$\bullet f_p(w/z) = \frac{\theta_p(w/z)^2}{\theta_p(tw/z)\theta_p(t^{-1}w/z)}$$

をかけたものが 2 階の楯円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示において使われたが, ここで次のように理解する: 条件 $|p| < |t|^2$ の下で, 例えば $f_p(w/z)[c(w/z)^{-1}]_{|q|^{-1}|p| < |w/z| < |t|} \eta(z)\eta(w)$ については

$$\begin{aligned} & \bullet f_p(w/z)[c(w/z)^{-1}]_{|q|^{-1}|p| < |w/z| < |t|} \eta(z)\eta(w) \\ &= [f_p(w/z)c(w/z)^{-1}]_{\substack{|q|^{-1}|p| < |w/z| < |t| \\ |t|^{-1}|p| < |w/z| < |t|}} \eta(z)\eta(w) \\ &= \left[\frac{\theta_p(w/z)\theta_p(qw/z)}{\theta_p(tw/z)\theta_p(qt^{-1}w/z)} \right]_{|q|^{-1}|p| < |w/z| < |t|} \eta(z)\eta(w) \end{aligned}$$

であると考え. また, $f_p(w/z)[c(w/z)^{-1}]_{|q|^{-1}|p| < |w/z| < |t|} \tilde{\eta}(z)\eta(w)$ については

$$\begin{aligned} & \bullet f_p(w/z)[c(w/z)^{-1}]_{|q|^{-1}|p| < |w/z| < |t| \cdot |p|^{-1}} \tilde{\eta}(z)\eta(w) \\ &= [f_p(w/z)c(w/z)^{-1}]_{\substack{|q|^{-1}|p| < |w/z| < |t| \cdot |p|^{-1} \\ |t|^{-1}|p| < |w/z| < |t| \cdot |p|^{-1}}} \tilde{\eta}(z)\eta(w) \\ &= \left[\frac{\theta_p(w/z)\theta_p(qw/z)}{\theta_p(tw/z)\theta_p(qt^{-1}w/z)} \right]_{|q|^{-1}|p| < |w/z| < |t| \cdot |p|^{-1}} \tilde{\eta}(z)\eta(w) \end{aligned}$$

と理解する. 基本的には「OPE の収束のための条件として現れたアニュラスに $f_p(w/z)$ を適当に制限する」ということである. ただ, 次の場合については例外的に考える必要がある: $f_p(w/z)[c(w/z)^{-1}]_{|q|^{-1}|p| < |w/z| < |t| \cdot |p|^{-1}} \tilde{\eta}(z)\tilde{\eta}(w)$ に関しては

$$\begin{aligned} & \bullet f_p(w/z)[c(w/z)^{-1}]_{|q|^{-1}|p| < |w/z| < |t| \cdot |p|^{-1}} \tilde{\eta}(z)\tilde{\eta}(w) \\ &= [f_p(w/z)c(w/z)^{-1}]_{\substack{|q|^{-1}|p| < |w/z| < |t| \cdot |p|^{-1} \\ |t| < |w/z| < |t|^{-1}}} \tilde{\eta}(z)\tilde{\eta}(w) \\ &= \left[\frac{\theta_p(w/z)\theta_p(qw/z)}{\theta_p(tw/z)\theta_p(qt^{-1}w/z)} \right]_{|q|^{-1}|p| < |w/z| < |t| \cdot |p|^{-1}} \tilde{\eta}(z)\tilde{\eta}(w) \end{aligned}$$

が成り立つと理解する. 読者は条件「 $|t| < |w/z| < |t|^{-1}$ 」の出現を奇妙に思うかもしれないが (これは OPE の収束のための条件としては出てこない), こうしないと, 楯円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示において三角極限 $p \rightarrow 0$ をとったときに Macdonald 作用素の自由場表示が正しく再現されないのである. ここでは「そういうものか」と思っておいてほしい. この「 $|t| < |w/z| < |t|^{-1}$ 」のような条件がどのように働くのかは, 第 5 章「三角の場合」の 5.2「準備 2: ある積分」を参照されたい.

以上のようにするとき, 関数 $g_p(z)$ を

$$\bullet g_p(z) := \frac{\theta_p(z)\theta_p(qz)}{\theta_p(tz)\theta_p(qt^{-1}z)}$$

とおくと, 上に述べたことによって

$$\begin{aligned} & \bullet f_p(w/z) \bullet X(z)X(w) \bullet \\ &= [g_p(w/z)]_{\substack{|q|^{-1}|p| < |w/z| < |t| \\ |t|^{-1}|p| < |w/z| < |t|}} \eta(z)\eta(w) - t^{-N} [g_p(w/z)]_{\substack{|q|^{-1}|p| < |w/z| < |t| \cdot |p|^{-1} \\ |t|^{-1}|p| < |w/z| < |t| \cdot |p|^{-1}}} \tilde{\eta}(z)\eta(w) \\ & \quad - t^{-N} [g_p(w/z)]_{\substack{|q|^{-1}|p| < |w/z| < |t| \\ |t|^{-1}|p| < |w/z| < |t|}} \eta(z)\tilde{\eta}(w) + t^{-2N} [g_p(w/z)]_{\substack{|q|^{-1}|p| < |w/z| < |t| \cdot |p|^{-1} \\ |t| < |w/z| < |t|^{-1}}} \tilde{\eta}(z)\tilde{\eta}(w) \end{aligned}$$

となる.

念のために述べておくと, 条件 $|q|^{-1} < |z| < |t| \cdot |p|^{-1}$ と $|t| < |z| < |t|^{-1}$ は両立可能である. 実際, $|p| < |t|^2$ から $|t|^{-1} < |t| \cdot |p|^{-1}$ であること, 及び $|t| < |q|$ から $|q|^{-1} < |t|^{-1}$ であることによって

$$\bullet \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |q|^{-1} < |z| < |t| \cdot |p|^{-1} \text{ かつ } |t| < |z| < |t|^{-1}\} = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |q|^{-1} < |z| < |t|^{-1}\} \neq \emptyset.$$

先に述べた「OPE から生じた因子に関数をかける」際の注意と同様にして

$$\bullet g_p(w/z)\eta(z)\eta(w)=\left[g_p(w/z)\right]_{\substack{|q|^{-1}|p|<|w/z|<|t| \\ |t|^{-1}|p|<|w/z|<|t|}}\eta(z)\eta(w)$$

などを書くことにすると (積 $\eta(z)\eta(w)$ が定義される $|q|^{-1}|p|<|w/z|<|t|$ と, $g_p(w/z)$ が正則な $|t|^{-1}|p|<|w/z|<|t|$ の共通部分に制限される, と見る)

$$\begin{aligned} & \bullet f_p(w/z)\bullet X(z)X(w)\bullet \\ &= g_p(w/z)\{\eta(z)\eta(w)-t^{-N}\tilde{\eta}(z)\eta(w)-t^{-N}\eta(z)\tilde{\eta}(w)+t^{-2N}\tilde{\eta}(z)\tilde{\eta}(w)\} \\ &= g_p(w/z)[\{\eta(z)-t^{-N}\tilde{\eta}(z)\}\{\eta(w)-t^{-N}\tilde{\eta}(w)\}] \\ &= g_p(w/z)X(z)X(w) \end{aligned}$$

を得る. 再度述べておくと, $X(z)X(w)$ からは収束領域の異なる因子を伴う項たちが生じるので, $g_p(w/z)X(z)X(w)$ を展開する際には, $g_p(w/z)$ を $X(z)X(w)$ から出る各項それぞれの収束領域に制限するものとする.

より一般の場合も同様に考えることで次が得られる.

(1) 作用素 $f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)\bullet\eta(z_1)\cdots\eta(z_k)\tilde{\eta}(z_{k+1})\cdots\tilde{\eta}(z_r)\bullet$ は条件 $|p|<|t|^2$ の下, 以下の条件を満たす $z_1, \dots, z_r$ において定義されると理解する:

- $|q|^{-1}|p|<|z_b/z_a|<|t|$ ($1\leq a<b\leq k$ または $1\leq a\leq k, k+1\leq b\leq r$),
- $|q|^{-1}<|z_b/z_a|<|t|\cdot|p|^{-1}$ ($k+1\leq a<b\leq r$),
- $|t|^{-1}|p|<|z_b/z_a|<|t|$ ($1\leq a<b\leq k$ または $1\leq a\leq k, k+1\leq b\leq r$),
- $|t|<|z_b/z_a|<|t|^{-1}$ ($k+1\leq a<b\leq r$).

最初の 2 つが OPE の収束のための条件から来るもの, 後の 2 つは関数 $f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)$ から来る条件である.

(2) $f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)\bullet X(z_1)\cdots X(z_r)\bullet$ の正規順序積は次のようにして外せる:

$$\bullet f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)\bullet X(z_1)\cdots X(z_r)\bullet = g_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)X(z_1)\cdots X(z_r) \quad (|p|<|t|^2).$$

冒頭にて触れた

$$\begin{aligned} & \bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)\bullet X(z_1)\cdots X(z_r)\bullet \right] \\ &= \sum_{k=0}^r (-t^{-N})^{r-k} \binom{r}{k} \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)\bullet \eta(z_1)\cdots\eta(z_k)\tilde{\eta}(z_{k+1})\cdots\tilde{\eta}(z_r)\bullet \right] \end{aligned}$$

であるが, この右辺にある

$$\bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)\bullet \eta(z_1)\cdots\eta(z_k)\tilde{\eta}(z_{k+1})\cdots\tilde{\eta}(z_r)\bullet \right] \quad (0\leq k\leq r)$$

を積分として理解する際, すなわち

$$\begin{aligned} & \bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)\bullet \eta(z_1)\cdots\eta(z_k)\tilde{\eta}(z_{k+1})\cdots\tilde{\eta}(z_r)\bullet \right] \\ &= \oint_{C_1^{(k)}} \frac{dz_1}{2\pi i z_1} \cdots \oint_{C_r^{(k)}} \frac{dz_r}{2\pi i z_r} f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)\bullet \eta(z_1)\cdots\eta(z_k)\tilde{\eta}(z_{k+1})\cdots\tilde{\eta}(z_r)\bullet \end{aligned}$$

などとするとき, 積分路たち $C_1^{(k)}, \dots, C_r^{(k)}$ は条件 $|p| < |t|^2$ の下, 先に挙げた条件たちを満たすようにとる.

- 任意の $z_1 \in C_1^{(k)}, \dots, z_r \in C_r^{(k)}$ について次が成り立つ :
 - $|q|^{-1}|p| < |z_b/z_a| < |t|$ ($1 \leq a < b \leq k$ または $1 \leq a \leq k, k+1 \leq b \leq r$),
 - $|q|^{-1}|z_b/z_a| < |t| \cdot |p|^{-1}$ ($k+1 \leq a < b \leq r$),
 - $|t|^{-1}|p| < |z_b/z_a| < |t|$ ($1 \leq a < b \leq k$ または $1 \leq a \leq k, k+1 \leq b \leq r$),
 - $|t| < |z_b/z_a| < |t|^{-1}$ ($k+1 \leq a < b \leq r$).

以上によって, 楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示を次のように書くこともできる.

- 楕円 Ruijsenaars 作用素 $D_N^{(r)}(p)$ ($r \in \{0, 1, \dots, N\}$) は次のように自由場表示される :

$$\begin{aligned}
 & \bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet X(z_1) \cdots X(z_r) \bullet \right] \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\
 &= \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[g_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) X(z_1) \cdots X(z_r) \right] \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\
 &= r! \left\{ \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^r D_N^{(r)}(p) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle.
 \end{aligned}$$

楕円 Ruijsenaars 作用素たちの可換性と自由場表示

「楕円 Ruijsenaars 作用素たち $D_N^{(0)}(p), D_N^{(1)}(p), \dots, D_N^{(N)}(p)$ が互いに可換であるかどうか調べよ」と言われたら、素朴には交換関係

$$\bullet \left[D_N^{(k)}(p), D_N^{(\ell)}(p) \right] = \dots \quad (k, \ell \in \{0, 1, \dots, N\})$$

を見たらよいのであろうが (ある意味で、実際にこれをやったのが Ruijsenaars である), 我々はここで自由場表示を用いる. そうすると, 途中で「Ruijsenaars 恒等式」というある楕円関数についての恒等式の存在に気がつき, これによって楕円 Ruijsenaars 作用素たちの可換性が従うことがわかる.

3.1 基本的アイディア

先に見た通り, 楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示とは次のような内容であった: 多変数の楕円関数 $f_p^{(r)}(z) = f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)$, $g_p^{(r)}(z) = g_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)$ を

$$\begin{aligned} \bullet f_p^{(r)}(z) &= f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) := \prod_{1 \leq a < b \leq r} \frac{\theta_p(z_b/z_a)^2}{\theta_p(tz_b/z_a)\theta_p(t^{-1}z_b/z_a)}, \\ \bullet g_p^{(r)}(z) &= g_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) := \prod_{1 \leq a < b \leq r} \frac{\theta_p(z_b/z_a)\theta_p(qz_b/z_a)}{\theta_p(tz_b/z_a)\theta_p(qt^{-1}z_b/z_a)} \end{aligned}$$

とおくとき

$$\begin{aligned} &\bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet X(z_1) \cdots X(z_r) \bullet \right] \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\ &= \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[g_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) X(z_1) \cdots X(z_r) \right] \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\ &= r! \left\{ \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^r D_N^{(r)}(p) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \quad (r \in \{0, 1, \dots, N\}). \end{aligned}$$

先ほど, 2.4 「補足: 正規順序積の脱着」において

$$\bullet f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet X(z_1) \cdots X(z_r) \bullet = g_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) X(z_1) \cdots X(z_r)$$

を見たが, この両辺がいわゆる “ $z_1, \dots, z_r$ の入れ換えで不変な作用素値関数” だということに注意する. このことを認めると, 話を次のように進めることができる. 以下では $g_p^{(r)}(z)$ を

$$\bullet g_p^{(r)}(z) = \prod_{1 \leq a < b \leq r} g_p(z_b/z_a), \quad \bullet g_p(z) := \frac{\theta_p(z)\theta_p(qz)}{\theta_p(tz)\theta_p(qt^{-1}z)}$$

とも書く. 上の楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示によって, 楕円 Ruijsenaars 作用素たちの可換性を示せるか考えてみる. これを実行しようと思ったら,

$$\bullet (k) := \text{CT}_{z_1, \dots, z_k} \left[g_p^{(k)}(z_1, \dots, z_k) X(z_1) \cdots X(z_k) \right] \quad (k \in \{0, 1, \dots, N\})$$

について $[(k), (\ell)] = 0$ ($k, \ell \in \{0, 1, \dots, N\}$) がいければよい (後で補足する). ここで $k < \ell$ なる $k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ をとって

$$\begin{aligned} \bullet (\ell) &= \text{CT}_{w_1, \dots, w_\ell} \left[g_p^{(\ell)}(w_1, \dots, w_\ell) X(w_1) \cdots X(w_\ell) \right] \\ &= \text{CT}_{z_{k+1}, \dots, z_{k+\ell}} \left[g_p^{(\ell)}(z_{k+1}, \dots, z_{k+\ell}) X(z_{k+1}) \cdots X(z_{k+\ell}) \right] \end{aligned}$$

とすれば

$$\bullet (k)(\ell) = \text{CT}_{z_1, \dots, z_{k+\ell}} \left[g_p^{(k)}(z_1, \dots, z_k) g_p^{(\ell)}(z_{k+1}, \dots, z_{k+\ell}) X(z_1) \cdots X(z_{k+\ell}) \right]$$

である. 一方の $(\ell)(k)$ は

$$\bullet (\ell)(k) = \text{CT}_{z_1, \dots, z_{k+\ell}} \left[g_p^{(k)}(z_1, \dots, z_k) g_p^{(\ell)}(z_{k+1}, \dots, z_{k+\ell}) X(z_{k+1}) \cdots X(z_{k+\ell}) X(z_1) \cdots X(z_k) \right]$$

である. ここで $\sigma_{k\ell} \in \mathfrak{S}_{k+\ell}$ を

$$\bullet \sigma_{k\ell} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & k+1 & k+2 & \cdots & k+\ell \\ \ell+1 & \ell+2 & \ell+3 & \cdots & \ell+k & 1 & 2 & \cdots & \ell \end{pmatrix}$$

とにおいて “定数項は変数の置換で不変である” ことを使うと

$$\begin{aligned} \bullet (\ell)(k) &= \text{CT}_{z_1, \dots, z_{k+\ell}} \left[\sigma_{k\ell} \left\{ g_p^{(k)}(z_1, \dots, z_k) g_p^{(\ell)}(z_{k+1}, \dots, z_{k+\ell}) X(z_{k+1}) \cdots X(z_{k+\ell}) X(z_1) \cdots X(z_k) \right\} \right] \\ &= \text{CT}_{z_1, \dots, z_{k+\ell}} \left[g_p^{(\ell)}(z_1, \dots, z_\ell) g_p^{(k)}(z_{\ell+1}, \dots, z_{\ell+k}) X(z_1) \cdots X(z_{k+\ell}) \right] \end{aligned}$$

を得る. こうして, $(k)(\ell) - (\ell)(k)$ は

$$\bullet \left\{ g_p^{(k)}(z_1, \dots, z_k) g_p^{(\ell)}(z_{k+1}, \dots, z_{k+\ell}) - g_p^{(\ell)}(z_1, \dots, z_\ell) g_p^{(k)}(z_{\ell+1}, \dots, z_{\ell+k}) \right\} X(z_1) \cdots X(z_{k+\ell})$$

の $z_1, \dots, z_{k+\ell}$ についての定数項を拾ったものであるとわかる.

この時点で “ $g_p^{(k)}(z_1, \dots, z_k) g_p^{(\ell)}(z_{k+1}, \dots, z_{k+\ell}) - g_p^{(\ell)}(z_1, \dots, z_\ell) g_p^{(k)}(z_{\ell+1}, \dots, z_{\ell+k}) = 0$ ” が成り立つのなら話はおしまいなのであるが, 残念ながらこれは正しくない. 例えば最も簡単な $k=1, \ell=2$ の場合は $g_p^{(1)}(z_1) g_p^{(2)}(z_2, z_3) = g_p(z_3/z_2)$, $g_p^{(2)}(z_1, z_2) g_p^{(1)}(z_3) = g_p(z_2/z_1)$ である (これらは明らかに等しくない).

よって, 目的のためにはもう少し工夫せねばならないわけであるが, ここで

$$\bullet (k)(\ell) - (\ell)(k)$$

$$= \text{CT}_{z_1, \dots, z_{k+\ell}} \left[\left\{ \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} g_p \left(\frac{z_b}{z_a} \right)^{-1} - \prod_{\substack{1 \leq a \leq \ell \\ \ell+1 \leq b \leq \ell+k}} g_p \left(\frac{z_b}{z_a} \right)^{-1} \right\} g_p^{(k+\ell)}(z) X(z_1) \cdots X(z_{k+\ell}) \right]$$

としてから次のようにできることに気がつく: この $\text{CT}_{z_1, \dots, z_{k+\ell}} [\dots]$ の中身に $\text{Sym}_{k+\ell}$ を当てると, $g_p^{(k+\ell)}(z) X(z_1) \cdots X(z_{k+\ell})$ は $\mathfrak{S}_{k+\ell}$ の作用で不変であるので, $\gamma_p(z) := g_p(z)^{-1}$ とおくと

$$\begin{aligned} \bullet (k)(\ell) - (\ell)(k) &= \text{CT}_{z_1, \dots, z_{k+\ell}} \left[\text{Sym}_{k+\ell} \left\{ \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} \gamma_p \left(\frac{z_b}{z_a} \right) \right\} g_p^{(k+\ell)}(z) X(z_1) \cdots X(z_{k+\ell}) \right] \\ &\quad - \text{CT}_{z_1, \dots, z_{k+\ell}} \left[\text{Sym}_{k+\ell} \left\{ \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} \gamma_p \left(\frac{z_a}{z_b} \right) \right\} g_p^{(k+\ell)}(z) X(z_1) \cdots X(z_{k+\ell}) \right]. \end{aligned}$$

「これが何なんだ」と感じる読者がいるかもしれないが、実は、これで話がうまく進のである。そうして現れるのが「Ruijsenaars 恒等式」である。

3.2 Ruijsenaars 恒等式

先に述べた $(k)(\ell) - (\ell)(k)$ の CT $[\dots]$ 中には

$$\bullet \text{Sym}_{k+\ell} \left\{ \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} \gamma_p \left(\frac{z_b}{z_a} \right) \right\}, \quad \bullet \text{Sym}_{k+\ell} \left\{ \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} \gamma_p \left(\frac{z_a}{z_b} \right) \right\}$$

なる $z_1, \dots, z_{k+\ell}$ の楕円関数が見えている。読者は驚くかもしれないが、実は、これら 2 つのものは等しいのである!! このことを示すのが次の「Ruijsenaars 恒等式」である。

命題 3.1 (Ruijsenaars 恒等式). $\mathbb{C}^\times$ 上の有理型関数 $\gamma_p(z)$ を

$$\bullet \gamma_p(z) := \frac{\theta_p(tz)\theta_p(qt^{-1}z)}{\theta_p(z)\theta_p(qz)}$$

と定めるとき、これについて次が成り立つ：任意の $k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$\bullet \text{Sym}_{k+\ell} \left\{ \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} \gamma_p \left(\frac{z_b}{z_a} \right) \right\} = \text{Sym}_{k+\ell} \left\{ \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} \gamma_p \left(\frac{z_a}{z_b} \right) \right\}.$$

「Ruijsenaars 恒等式」という用語は、2022 年 8 月に大阪公立大学にて行われた野海 正俊氏による Macdonald 多項式についての集中講義や、ご自身の著書である

• M. Noumi 『Macdonald Polynomials Commuting Family of q -Difference Operators and Their Joint Eigenfunctions』(Springer, 2023)

において使われたものである。

スペースの節約のため、 $\gamma_p(z)$ 及び

$$\bullet \gamma'_p(z) := \gamma_p(z) \Big|_{q \rightarrow q^{-1}, t \rightarrow t^{-1}} = \frac{\theta_p(t^{-1}z)\theta_p(q^{-1}tz)}{\theta_p(z)\theta_p(q^{-1}z)} = \gamma_p(z^{-1})$$

によつて $\gamma_{k,\ell}(\mathbf{z}) = \gamma_{k,\ell}(z_1, \dots, z_{k+\ell})$, $\gamma'_{k,\ell}(\mathbf{z}) = \gamma'_{k,\ell}(z_1, \dots, z_{k+\ell})$ を

$$\bullet \gamma_{k,\ell}(\mathbf{z}) := \text{Sym}_{k+\ell} \left\{ \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} \gamma_p \left(\frac{z_b}{z_a} \right) \right\}, \quad \bullet \gamma'_{k,\ell}(\mathbf{z}) := \text{Sym}_{k+\ell} \left\{ \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} \gamma'_p \left(\frac{z_b}{z_a} \right) \right\}$$

と定める。これによれば、Ruijsenaars 恒等式は $\gamma_{k,\ell}(\mathbf{z}) = \gamma'_{k,\ell}(\mathbf{z})$ と書ける。

Ruijsenaars 恒等式の証明は長いので、上の内容を認めて 3.3「補足：証明が完了したこと」に進んでもよい。

例 3.2. 一般の場合を考える前に、まずは最も簡単な $k=1, \ell=2$ の場合を考える。このとき

$$\begin{aligned} \bullet \gamma_{1,2}(z_1, z_2, z_3) &= \text{Sym}_3 \left\{ \gamma_p \left(\frac{z_2}{z_1} \right) \gamma_p \left(\frac{z_3}{z_1} \right) \right\} \\ &= \frac{2}{3!} \left\{ \gamma_p \left(\frac{z_2}{z_1} \right) \gamma_p \left(\frac{z_3}{z_1} \right) + \gamma_p \left(\frac{z_3}{z_2} \right) \gamma_p \left(\frac{z_1}{z_2} \right) + \gamma_p \left(\frac{z_1}{z_3} \right) \gamma_p \left(\frac{z_2}{z_3} \right) \right\} \end{aligned}$$

であるが, これを z_1 のみの関数と見て分解する. まず, $E_1(z) = -D_z \log \theta_p(z)$ によって

$$\begin{aligned} \bullet \gamma_p\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \frac{\theta_p(tz_1/z_2)\theta_p(qt^{-1}z_1/z_2)}{\theta_p(z_1/z_2)\theta_p(qz_1/z_2)} = \frac{\theta_p(t^{-1}z_2/z_1)\theta_p(q^{-1}tz_2/z_1)}{\theta_p(z_2/z_1)\theta_p(q^{-1}z_2/z_1)} \\ &= \frac{\theta_p(t^{-1})\theta_p(q^{-1}t)}{(p;p)_\infty^2\theta_p(q^{-1})} E_1\left(\frac{z_2}{z_1}\right) + \frac{\theta_p(t)\theta_p(qt^{-1})}{(p;p)_\infty^2\theta_p(q)} E_1\left(q^{-1}\frac{z_2}{z_1}\right) + (z_1 \text{ を含まない項たち}) \\ &= \frac{\theta_p(t)\theta_p(qt^{-1})}{(p;p)_\infty^2\theta_p(q)} \left\{ -E_1\left(\frac{z_2}{z_1}\right) + E_1\left(q^{-1}\frac{z_2}{z_1}\right) \right\} + (z_1 \text{ を含まない項たち}) \end{aligned}$$

とできること (6.2 「付録 2: 『テータ関数とデルタ関数の関係』の要約」の例 6.13 を参照), 更に

$$\begin{aligned} \bullet \gamma_p\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\gamma_p\left(\frac{z_3}{z_1}\right) &= \frac{\theta_p(tz_2/z_1)\theta_p(qt^{-1}z_2/z_1)}{\theta_p(z_2/z_1)\theta_p(qz_2/z_1)} \cdot \frac{\theta_p(tz_3/z_1)\theta_p(qt^{-1}z_3/z_1)}{\theta_p(z_3/z_1)\theta_p(qz_3/z_1)} \\ &= \frac{\theta_p(t)\theta_p(qt^{-1})}{(p;p)_\infty^2\theta_p(q)} E_1\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\gamma_p\left(\frac{z_3}{z_2}\right) + \frac{\theta_p(t^{-1})\theta_p(q^{-1}t)}{(p;p)_\infty^2\theta_p(q^{-1})} E_1\left(q\frac{z_2}{z_1}\right)\gamma_p'\left(\frac{z_3}{z_2}\right) \\ &\quad + \frac{\theta_p(t)\theta_p(qt^{-1})}{(p;p)_\infty^2\theta_p(q)} E_1\left(\frac{z_3}{z_1}\right)\gamma_p\left(\frac{z_2}{z_3}\right) + \frac{\theta_p(t^{-1})\theta_p(q^{-1}t)}{(p;p)_\infty^2\theta_p(q^{-1})} E_1\left(q\frac{z_3}{z_1}\right)\gamma_p'\left(\frac{z_2}{z_3}\right) \\ &\quad + (z_1 \text{ を含まない項たち}) \end{aligned}$$

であることから, 次が成り立つことがわかる. まず

$$\begin{aligned} \bullet 3\gamma_{1,2}(z_1, z_2, z_3) &= \frac{\theta_p(t)\theta_p(qt^{-1})}{(p;p)_\infty^2\theta_p(q)} \left\{ E_1\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\gamma_p\left(\frac{z_3}{z_2}\right) - E_1\left(q\frac{z_2}{z_1}\right)\gamma_p'\left(\frac{z_3}{z_2}\right) \right\} \\ &\quad + \frac{\theta_p(t)\theta_p(qt^{-1})}{(p;p)_\infty^2\theta_p(q)} \left\{ E_1\left(\frac{z_3}{z_1}\right)\gamma_p\left(\frac{z_2}{z_3}\right) - E_1\left(q\frac{z_3}{z_1}\right)\gamma_p'\left(\frac{z_2}{z_3}\right) \right\} \\ &\quad + \frac{\theta_p(t)\theta_p(qt^{-1})}{(p;p)_\infty^2\theta_p(q)} \left\{ -E_1\left(\frac{z_2}{z_1}\right) + E_1\left(q^{-1}\frac{z_2}{z_1}\right) \right\} \gamma_p\left(\frac{z_3}{z_2}\right) \\ &\quad + \frac{\theta_p(t)\theta_p(qt^{-1})}{(p;p)_\infty^2\theta_p(q)} \left\{ -E_1\left(\frac{z_3}{z_1}\right) + E_1\left(q^{-1}\frac{z_3}{z_1}\right) \right\} \gamma_p\left(\frac{z_2}{z_3}\right) + (z_1 \text{ を含まない項たち}) \end{aligned}$$

であるが, $E_1(z_2/z_1)$, $E_1(z_3/z_1)$ を含む項は相殺するので

$$\begin{aligned} \bullet 3\gamma_{1,2}(z_1, z_2, z_3) &= \frac{\theta_p(t)\theta_p(qt^{-1})}{(p;p)_\infty^2\theta_p(q)} \left\{ E_1\left(q^{-1}\frac{z_2}{z_1}\right)\gamma_p\left(\frac{z_3}{z_2}\right) - E_1\left(q\frac{z_2}{z_1}\right)\gamma_p'\left(\frac{z_3}{z_2}\right) \right\} \\ &\quad + \frac{\theta_p(t)\theta_p(qt^{-1})}{(p;p)_\infty^2\theta_p(q)} \left\{ E_1\left(q^{-1}\frac{z_3}{z_1}\right)\gamma_p\left(\frac{z_2}{z_3}\right) - E_1\left(q\frac{z_3}{z_1}\right)\gamma_p'\left(\frac{z_2}{z_3}\right) \right\} + (z_1 \text{ を含まない項たち}). \end{aligned}$$

ここで $q \rightarrow q^{-1}$, $t \rightarrow t^{-1}$ とすると $\text{Sym}_3\left\{\gamma_p'\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\gamma_p'\left(\frac{z_3}{z_1}\right)\right\}$ の展開が得られるが, 上の結果の右辺の「 $(z_1 \text{ を含まない項たち})$ 」を除く部分は $q \rightarrow q^{-1}$, $t \rightarrow t^{-1}$ で不変であることがわかる. 例えば

$$\bullet E_1\left(q^{-1}\frac{z_2}{z_1}\right)\gamma_p\left(\frac{z_3}{z_2}\right) - E_1\left(q\frac{z_2}{z_1}\right)\gamma_p'\left(\frac{z_3}{z_2}\right) \xrightarrow[t \rightarrow t^{-1}]{q \rightarrow q^{-1}} E_1\left(q\frac{z_2}{z_1}\right)\gamma_p'\left(\frac{z_3}{z_2}\right) - E_1\left(q^{-1}\frac{z_2}{z_1}\right)\gamma_p\left(\frac{z_3}{z_2}\right)$$

という具合である. あとは

$$\bullet \frac{\theta_p(t)\theta_p(qt^{-1})}{(p;p)_\infty^2\theta_p(q)} \xrightarrow[t \rightarrow t^{-1}]{q \rightarrow q^{-1}} \frac{\theta_p(t^{-1})\theta_p(q^{-1}t)}{(p;p)_\infty^2\theta_p(q^{-1})} = -\frac{\theta_p(t)\theta_p(qt^{-1})}{(p;p)_\infty^2\theta_p(q)}$$

によって符号が整う. よって

$$\bullet \gamma_{1,2}(z_1, z_2, z_3) - \gamma'_{1,2}(z_1, z_2, z_3) = (z_1 \text{ を含まない項たち})$$

である. ただ, この左辺は z_1, z_2, z_3 の入れ換えについて不変であるので, 実際には

$$\bullet \gamma_{1,2}(z_1, z_2, z_3) - \gamma'_{1,2}(z_1, z_2, z_3) = (\text{含まない項たち})$$

である. あとはこの右辺の値を求めればよいが (これが 0 になるはず), $\gamma_p(t^{-1}) = \gamma'_p(t) = 0$ に注意すると

$$\begin{aligned} \bullet 3\gamma_{1,2}(z_1, z_2, z_3) \Big|_{\substack{z_1=tz_2, \\ z_2=tz_3}} &= \gamma_p\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\gamma_p\left(\frac{z_3}{z_1}\right) + \gamma_p\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\gamma_p\left(\frac{z_3}{z_2}\right) + \gamma_p\left(\frac{z_1}{z_3}\right)\gamma_p\left(\frac{z_2}{z_3}\right) \Big|_{\substack{z_1=tz_2, \\ z_2=tz_3}} \\ &= \gamma_p(t)\gamma_p(t^2), \\ \bullet 3\gamma'_{1,2}(z_1, z_2, z_3) \Big|_{\substack{z_1=tz_2, \\ z_2=tz_3}} &= \gamma'_p\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\gamma'_p\left(\frac{z_3}{z_1}\right) + \gamma'_p\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\gamma'_p\left(\frac{z_3}{z_2}\right) + \gamma'_p\left(\frac{z_1}{z_3}\right)\gamma'_p\left(\frac{z_2}{z_3}\right) \Big|_{\substack{z_1=tz_2, \\ z_2=tz_3}} \\ &= \gamma'_p(t^{-1})\gamma'_p(t^{-2}) = \gamma_p(t)\gamma_p(t^2) \end{aligned}$$

なので, 結果として $\gamma_{1,2}(z_1, z_2, z_3) = \gamma'_{1,2}(z_1, z_2, z_3)$ がわかる.

例 3.3. $k=1$, ℓ は 2 以上の自然数である場合も同様にしてできる. まず

$$\bullet \gamma_{1,\ell}(z_1, \dots, z_{\ell+1}) = \text{Sym}_{\ell+1} \left\{ \prod_{2 \leq b \leq \ell+1} \gamma_p\left(\frac{z_b}{z_1}\right) \right\} = \frac{\ell!}{(\ell+1)!} \sum_{1 \leq a \leq \ell+1} \prod_{b \neq a} \gamma_p\left(\frac{z_b}{z_a}\right)$$

であるので, z_1 に依存する部分を分離するつもりで

$$\bullet \frac{(\ell+1)!}{\ell!} \gamma_{1,\ell}(z_1, \dots, z_{\ell+1}) = \prod_{b \neq 1} \gamma_p\left(\frac{z_b}{z_1}\right) + \sum_{2 \leq a \leq \ell+1} \gamma_p\left(\frac{z_1}{z_a}\right) \prod_{\substack{b' \neq a \\ b' \neq 1}} \gamma_p\left(\frac{z_{b'}}{z_a}\right)$$

とし, $\gamma_p(z_1/z_a)$ について

$$\bullet \gamma_p\left(\frac{z_1}{z_a}\right) = \frac{\theta_p(t)\theta_p(qt^{-1})}{(p;p)_\infty^2 \theta_p(q)} \left\{ -E_1\left(\frac{z_a}{z_1}\right) + E_1\left(q^{-1} \frac{z_a}{z_1}\right) \right\} + (\text{含まない項たち})$$

であること, 及び

$$\begin{aligned} \bullet \prod_{b \neq 1} \gamma_p\left(\frac{z_b}{z_1}\right) &= \prod_{b \neq 1} \frac{\theta_p(tz_b/z_1)\theta_p(qt^{-1}z_b/z_1)}{\theta_p(z_b/z_1)\theta_p(qz_b/z_1)} \\ &= \frac{\theta_p(t)\theta_p(qt^{-1})}{(p;p)_\infty^2 \theta_p(q)} \sum_{b \neq 1} \left\{ E_1\left(\frac{z_b}{z_1}\right) \prod_{\substack{b' \neq b \\ b' \neq 1}} \gamma_p\left(\frac{z_{b'}}{z_b}\right) - E_1\left(q \frac{z_b}{z_1}\right) \prod_{\substack{b' \neq b \\ b' \neq 1}} \gamma'_p\left(\frac{z_{b'}}{z_b}\right) \right\} + (\text{含まない項たち}) \end{aligned}$$

を使うことで次のようにできる. まず

$$\begin{aligned} \bullet & \frac{(\ell+1)!}{\ell!} \times \frac{(p;p)_\infty^2 \theta_p(q)}{\theta_p(t)\theta_p(qt^{-1})} \gamma_{1,\ell}(z_1, \dots, z_{\ell+1}) \\ &= \sum_{b \neq 1} \left\{ E_1\left(\frac{z_b}{z_1}\right) \prod_{\substack{b' \neq b \\ b' \neq 1}} \gamma_p\left(\frac{z_{b'}}{z_b}\right) - E_1\left(q \frac{z_b}{z_1}\right) \prod_{\substack{b' \neq b \\ b' \neq 1}} \gamma'_p\left(\frac{z_{b'}}{z_b}\right) \right\} \\ & \quad + \sum_{2 \leq a \leq \ell+1} \left\{ -E_1\left(\frac{z_a}{z_1}\right) + E_1\left(q^{-1} \frac{z_a}{z_1}\right) \right\} \prod_{\substack{b' \neq a \\ b' \neq 1}} \gamma_p\left(\frac{z_{b'}}{z_a}\right) + (\text{含まない項たち}) \end{aligned}$$

であるが、和の添え字のつけ換えを行えば $E_1(z_\bullet/z_1)$ を含む項が相殺するので

$$\begin{aligned} & \bullet \frac{(\ell+1)!}{\ell!} \times \frac{(p;p)_\infty^2 \theta_p(q)}{\theta_p(t) \theta_p(qt^{-1})} \gamma_{1,\ell}(z_1, \dots, z_{\ell+1}) \\ &= \sum_{c \neq 1} \left\{ -E_1\left(q \frac{z_c}{z_1}\right) \prod_{\substack{c' \neq c \\ c' \neq 1}} \gamma'_p\left(\frac{z_{c'}}{z_c}\right) + E_1\left(q^{-1} \frac{z_c}{z_1}\right) \prod_{\substack{c' \neq c \\ c' \neq 1}} \gamma_p\left(\frac{z_{c'}}{z_c}\right) \right\} + (z_1 \text{ を含まない項たち}) \end{aligned}$$

を得る. この時点で, $q \rightarrow q^{-1}$, $t \rightarrow t^{-1}$ の下での変わり方を見ることで

$$\bullet \gamma_{1,\ell}(z_1, \dots, z_{\ell+1}) - \gamma'_{1,\ell}(z_1, \dots, z_{\ell+1}) = (z_1 \text{ を含まない項たち})$$

がわかるが、やはり先ほどと同様に

$$\bullet \gamma_{1,\ell}(z_1, \dots, z_{\ell+1}) - \gamma'_{1,\ell}(z_1, \dots, z_{\ell+1}) = (z_1, \dots, z_{\ell+1} \text{ を含まない項たち})$$

が成り立つ. ここで $z_1 = tz_2$, $z_2 = tz_3$, $z_3 = tz_4$, $\dots$, $z_\ell = tz_{\ell+1}$ なる代入を行うことを考える. これは

$$\bullet z_\bullet = t^{\ell+1-\bullet} z_{\ell+1} \quad (1 \leq \bullet \leq \ell)$$

とするということである. また $\gamma_p(t^{-1})=0$, $\gamma'_p(t)=0$ なので

$$\begin{aligned} & \bullet \frac{(\ell+1)!}{\ell!} \gamma_{1,\ell}(z) \Big|_{\substack{z_\bullet = t^{\ell+1-\bullet} z_{\ell+1} \\ (1 \leq \bullet \leq \ell)}} = \prod_{1 \leq b \leq \ell} \gamma_p\left(\frac{z_b}{z_{\ell+1}}\right) \Big|_{\substack{z_\bullet = t^{\ell+1-\bullet} z_{\ell+1} \\ (1 \leq \bullet \leq \ell)}} = \prod_{1 \leq b \leq \ell} \gamma_p(t^{\ell+1-b}) = \prod_{1 \leq b \leq \ell} \gamma_p(t^b), \\ & \bullet \frac{(\ell+1)!}{\ell!} \gamma'_{1,\ell}(z) \Big|_{\substack{z_\bullet = t^{\ell+1-\bullet} z_{\ell+1} \\ (1 \leq \bullet \leq \ell)}} = \prod_{2 \leq b \leq \ell+1} \gamma'_p\left(\frac{z_b}{z_1}\right) \Big|_{\substack{z_\bullet = t^{\ell+1-\bullet} z_{\ell+1} \\ (1 \leq \bullet \leq \ell)}} = \prod_{2 \leq b \leq \ell+1} \gamma'_p(t^{1-b}) = \prod_{1 \leq b \leq \ell} \gamma_p(t^b) \end{aligned}$$

がわかる ($\gamma'_p(z) = \gamma_p(z^{-1})$ を使った). こうして $\gamma_{1,\ell}(z_1, \dots, z_{\ell+1}) = \gamma'_{1,\ell}(z_1, \dots, z_{\ell+1})$ が成り立つ. $k=1$, ℓ が 2 以上の自然数の場合にも Ruijsenaars 恒等式は成り立つ.

Ruijsenaars 恒等式を一般の場合に証明するには次の命題が必要である (Ruijsenaars 恒等式の証明のために具体例を調べている最中に気がついた).

命題 3.4. k, ℓ を $k < \ell$ なる自然数とし $S_{k,\ell} := \{1, \dots, k+\ell\}$ とおく ($\leftarrow$ ここだけの記号である).

このとき次の同型が成り立つ (集合 X のべき集合を 2^X と書く):

$$\bullet \left\{ (K, b) \in 2^{S_{k,\ell}} \times S_{k,\ell} \mid \begin{array}{l} \#K = k, 1 \in K, \\ b \notin K \end{array} \right\} \cong \left\{ (K', b') \in 2^{S_{k,\ell}} \times S_{k,\ell} \mid \begin{array}{l} \#K' = k, 1 \notin K', \\ b' \in K' \end{array} \right\}.$$

証明. 上に現れた集合を

$$\bullet X := \left\{ (K, b) \in 2^{S_{k,\ell}} \times S_{k,\ell} \mid \begin{array}{l} \#K = k, 1 \in K, \\ b \notin K \end{array} \right\}, \quad \bullet Y := \left\{ (K', b') \in 2^{S_{k,\ell}} \times S_{k,\ell} \mid \begin{array}{l} \#K' = k, 1 \notin K', \\ b' \in K' \end{array} \right\}$$

とおく. これら X, Y の同型を与える写像たちが次のように簡単に作れる. まず $K \subset S_{k,\ell}$ で $\#K = k$, $1 \in K$ なるものを 1 つとり, 更に $b \notin K$ なる $b \in S_{k,\ell}$ も 1 つとる. このとき $(K, b) \in X$ である. この K は $K = \{1, i_2, \dots, i_k\}$ なる格好をしているので, K から 1 を除いて b を加えたものを $K' = \{i_2, \dots, i_k, b\}$ とおく. こうして組 $(K', b) \in Y$ ができるが, この規則によって $(K, b) \in X$ に

$(K', b) \in Y$ を対応させる操作は写像になっているので, これを $f: X \rightarrow Y$ とおく. この逆写像は次のようにして作れる. まずは $K' \subset S_{k, \ell}$ で $\#K' = k$, $1 \notin K'$ なるものを取り, 更に K' の元を 1 つとって, これを b' とおく. このとき $(K', b') \in Y$ である. ここで, K' から b' を除いて 1 を加えたものを $K = (K' \setminus \{b'\}) \cup \{1\} \subset S_{k, \ell}$ とおいて, 組 $(K, b') \in X$ を作る. このようにして $(K', b') \in Y$ に $(K, b') \in X$ を対応させる操作は写像になっているので, これを $g: Y \rightarrow X$ とおく. これら $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow X$ が互いに逆写像になっている. $\square$

上に現れた集合 X, Y の元の個数は

$$\bullet \#X = \binom{k+\ell-1}{k-1} \times \ell = \frac{(k+\ell-1)!}{(k-1)!(\ell-1)!}, \quad \bullet \#Y = \binom{k+\ell-1}{k} \times k = \frac{(k+\ell-1)!}{(k-1)!(\ell-1)!}$$

であり, $\#X = \#Y$ がちゃんと成り立っている. 上の命題は, Ruijsenaars 恒等式の証明の途中に現れる

$$\sum_{\substack{K \subset \{1, \dots, k+\ell\} \\ \#K=k, 1 \in K}} \sum_{\substack{b \notin K}} (\dots) \text{ という格好の和と } \sum_{\substack{K' \subset \{1, \dots, k+\ell\} \\ \#K'=k, 1 \notin K'}} \sum_{a \in K'} (\dots) \text{ という和を対応}$$

$$\bullet K = \{1, i_2, \dots, i_k\}, b \notin K \leftrightarrow K' = \{i_2, \dots, i_k, b\}, b' = b \in K'$$

によって同一視するために必要である.

例 3.5. $k=2, \ell=3$ の場合に先の写像 $f: X \rightarrow Y$ の働き方を具体的に書き下してみる (先の命題 3.4 の中の記号を使っている). この場合の X とは

$$\bullet X = \left\{ (\{1, 2\}, 3), (\{1, 2\}, 4), (\{1, 2\}, 5), (\{1, 3\}, 2), (\{1, 3\}, 4), (\{1, 3\}, 5), \right. \\ \left. (\{1, 4\}, 2), (\{1, 4\}, 3), (\{1, 4\}, 5), (\{1, 5\}, 2), (\{1, 5\}, 3), (\{1, 5\}, 4) \right\}$$

のことである. 一方の Y は

$$\bullet Y = \left\{ (\{2, 3\}, 2), (\{2, 3\}, 3), (\{2, 4\}, 2), (\{2, 4\}, 4), (\{2, 5\}, 2), (\{2, 5\}, 5), \right. \\ \left. (\{3, 4\}, 3), (\{3, 4\}, 4), (\{3, 5\}, 3), (\{3, 5\}, 5), (\{4, 5\}, 4), (\{4, 5\}, 5) \right\}$$

である. これに対し, $\text{Im } f$ を上に書いた X の元の並びを保ったまま書くと次のようになる:

$$\bullet \text{Im } f = \left\{ (\{2, 3\}, 3), (\{2, 4\}, 4), (\{2, 5\}, 5), (\{2, 3\}, 2), (\{3, 4\}, 4), (\{3, 5\}, 5), \right. \\ \left. (\{2, 4\}, 2), (\{3, 4\}, 3), (\{4, 5\}, 5), (\{2, 5\}, 2), (\{3, 5\}, 3), (\{4, 5\}, 4) \right\}.$$

例えば $f(\{1, 2\}, 3) = (\{2, 3\}, 3)$, $f(\{1, 5\}, 2) = (\{2, 5\}, 2)$ である (確かに $\text{Im } f = Y$ である).

Ruijsenaars 恒等式の証明. 扱う楕円関数の変数の個数についての帰納法を用いる. ある自然数 k, ℓ で $k < \ell$ なるものがあって, 変数の個数が $k+\ell$ よりも小さな場合には Ruijsenaars 恒等式が成り立つと仮定する (最初のステップである $k=1, \ell=2$ の場合の証明は例 3.2 で済んでいる). この仮定の下で

$$\bullet \gamma_{k, \ell}(z_1, \dots, z_{k+\ell}) = \text{Sym}_{k+\ell} \left\{ \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} \gamma_p \left(\frac{z_b}{z_a} \right) \right\} = \frac{k! \ell!}{(k+\ell)!} \sum_{\substack{K \subset \{1, \dots, k+\ell\} \\ \#K=k}} \prod_{\substack{a \in K \\ b \notin K}} \gamma_p \left(\frac{z_b}{z_a} \right)$$

の z_1 に依存する部分を分離する. そのつもりで

$$\bullet \frac{(k+\ell)!}{k! \ell!} \gamma_{k, \ell}(z_1, \dots, z_{k+\ell}) \\ = \sum_{\substack{K \subset \{1, \dots, k+\ell\} \\ \#K=k, 1 \in K}} \prod_{\substack{a \in K \\ b \notin K}} \gamma_p \left(\frac{z_b}{z_a} \right) + \sum_{\substack{K' \subset \{1, \dots, k+\ell\} \\ \#K'=k, 1 \notin K'}} \prod_{\substack{a \in K' \\ b \notin K'}} \gamma_p \left(\frac{z_b}{z_a} \right) \\ = \sum_{\substack{K \subset \{1, \dots, k+\ell\} \\ \#K=k, 1 \in K}} \prod_{\substack{a' \in K \setminus \{1\} \\ b' \notin K}} \gamma_p \left(\frac{z_b}{z_1} \right) \prod_{a' \in K \setminus \{1\}} \gamma_p \left(\frac{z_{b'}}{z_{a'}} \right) + \sum_{\substack{K' \subset \{1, \dots, k+\ell\} \\ \#K'=k, 1 \notin K'}} \prod_{a \in K'} \gamma_p \left(\frac{z_1}{z_a} \right) \prod_{\substack{a' \in K' \\ b' \notin K', b' \neq 1}} \gamma_p \left(\frac{z_{b'}}{z_{a'}} \right)$$

とするとき、次が成り立つことがわかる：

$$\begin{aligned}
& \bullet \prod_{b \notin K} \gamma_p \left(\frac{z_b}{z_1} \right) = \prod_{b \notin K} \frac{\theta_p(t z_b / z_1) \theta_p(q t^{-1} z_b / z_1)}{\theta_p(z_b / z_1) \theta_p(q z_b / z_1)} \\
& = \frac{\theta_p(t) \theta_p(q t^{-1})}{(p; p)_\infty^2 \theta_p(q)} \sum_{b \notin K} \left\{ E_1 \left(\frac{z_b}{z_1} \right) \prod_{\substack{c \notin K \\ c \neq b}} \gamma_p \left(\frac{z_c}{z_b} \right) - E_1 \left(q \frac{z_b}{z_1} \right) \prod_{\substack{c \notin K \\ c \neq b}} \gamma'_p \left(\frac{z_c}{z_b} \right) \right\} + (z_1 \text{ を含まない項たち}), \\
& \bullet \prod_{a \in K'} \gamma_p \left(\frac{z_1}{z_a} \right) = \prod_{a \in K'} \frac{\theta_p(t^{-1} z_a / z_1) \theta_p(q^{-1} t z_a / z_1)}{\theta_p(z_a / z_1) \theta_p(q^{-1} z_a / z_1)} \\
& = \frac{\theta_p(t) \theta_p(q t^{-1})}{(p; p)_\infty^2 \theta_p(q)} \sum_{a \in K'} \left\{ -E_1 \left(\frac{z_a}{z_1} \right) \prod_{\substack{c \in K' \\ c \neq a}} \gamma'_p \left(\frac{z_c}{z_a} \right) + E_1 \left(q^{-1} \frac{z_a}{z_1} \right) \prod_{\substack{c \in K' \\ c \neq a}} \gamma_p \left(\frac{z_c}{z_a} \right) \right\} + (z_1 \text{ を含まない項たち}).
\end{aligned}$$

これらのことから、 $E_1(z_\bullet / z_1)$ を含む項の和として

$$\begin{aligned}
& \bullet \sum_{\substack{K \subset \{1, \dots, k+\ell\} \\ \#K=k, 1 \in K}} \sum_{b \notin K} E_1 \left(\frac{z_b}{z_1} \right) \prod_{\substack{c \notin K \\ c \neq b}} \gamma_p \left(\frac{z_c}{z_b} \right) \prod_{\substack{a' \in K \setminus \{1\} \\ b' \notin K}} \gamma_p \left(\frac{z_{b'}}{z_{a'}} \right) \\
& - \sum_{\substack{K' \subset \{1, \dots, k+\ell\} \\ \#K'=k, 1 \notin K'}} \sum_{a \in K'} E_1 \left(\frac{z_a}{z_1} \right) \prod_{\substack{c \in K' \\ c \neq a}} \gamma'_p \left(\frac{z_c}{z_a} \right) \prod_{\substack{a' \in K' \\ b' \notin K', b' \neq 1}} \gamma_p \left(\frac{z_{b'}}{z_{a'}} \right)
\end{aligned}$$

が出る．命題 3.4 によれば、上の 2 つ目の和は、 $(K, b) \in X$ と $(K', b') \in Y$ の対応である

$$\bullet K = \{1, i_2, \dots, i_k\}, b \notin K \leftrightarrow K' = \{i_2, \dots, i_k, b\}, b' = b$$

によって

$$\bullet \sum_{\substack{K \subset \{1, \dots, k+\ell\} \\ \#K=k, 1 \in K}} \sum_{b \notin K} (\dots) = \sum_{\substack{K' \subset \{1, \dots, k+\ell\} \\ \#K'=k, 1 \notin K'}} \sum_{a \in K'} (\dots)$$

とできることを思い出しつつ

$$\begin{aligned}
& \bullet \sum_{\substack{K' \subset \{1, \dots, k+\ell\} \\ \#K'=k, 1 \notin K'}} \sum_{a \in K'} E_1 \left(\frac{z_a}{z_1} \right) \prod_{\substack{c \in K' \\ c \neq a}} \gamma'_p \left(\frac{z_c}{z_a} \right) \prod_{\substack{a' \in K' \\ b' \notin K', b' \neq 1}} \gamma_p \left(\frac{z_{b'}}{z_{a'}} \right) \\
& = \sum_{\substack{K \subset \{1, \dots, k+\ell\} \\ \#K=k, 1 \in K}} \sum_{b \notin K} E_1 \left(\frac{z_b}{z_1} \right) \prod_{c \in K \setminus \{1\}} \gamma'_p \left(\frac{z_c}{z_b} \right) \prod_{\substack{a' \in (K \setminus \{1\}) \cup \{b\} \\ b' \notin K, b' \neq b}} \gamma_p \left(\frac{z_{b'}}{z_{a'}} \right) \\
& = \sum_{\substack{K \subset \{1, \dots, k+\ell\} \\ \#K=k, 1 \in K}} \sum_{b \notin K} E_1 \left(\frac{z_b}{z_1} \right) \prod_{c \in K \setminus \{1\}} \gamma_p \left(\frac{z_b}{z_c} \right) \prod_{\substack{a' \in (K \setminus \{1\}) \cup \{b\} \\ b' \notin K, b' \neq b}} \gamma_p \left(\frac{z_{b'}}{z_{a'}} \right)
\end{aligned}$$

と書き換えられる．ここで

$$\begin{aligned}
& \bullet \prod_{c \in K \setminus \{1\}} \gamma_p \left(\frac{z_b}{z_c} \right) \prod_{\substack{a' \in (K \setminus \{1\}) \cup \{b\} \\ b' \notin K, b' \neq b}} \gamma_p \left(\frac{z_{b'}}{z_{a'}} \right) = \prod_{c \in K \setminus \{1\}} \gamma_p \left(\frac{z_b}{z_c} \right) \prod_{\substack{a' \in K \setminus \{1\} \\ b' \notin K, b' \neq b}} \gamma_p \left(\frac{z_{b'}}{z_{a'}} \right) \prod_{b'' \notin K, b'' \neq b} \gamma_p \left(\frac{z_{b''}}{z_b} \right) \\
& = \prod_{\substack{a' \in K \setminus \{1\} \\ b' \notin K}} \gamma_p \left(\frac{z_{b'}}{z_{a'}} \right) \prod_{\substack{c \notin K \\ c \neq b}} \gamma_p \left(\frac{z_c}{z_b} \right)
\end{aligned}$$

が成り立つので, $E_1(z_\bullet/z_1)$ を含む項は全て相殺する. こうして

$$\begin{aligned}
& \bullet \frac{(k+\ell)!}{k! \ell!} \times \frac{(p; p)_\infty^2 \theta_p(q)}{\theta_p(t) \theta_p(qt^{-1})} \gamma_{k, \ell}(z_1, \dots, z_{k+\ell}) \\
&= - \sum_{\substack{K \subset \{1, \dots, k+\ell\} \\ \#K=k, 1 \in K}} \sum_{b \notin K} E_1\left(q \frac{z_b}{z_1}\right) \prod_{\substack{c \notin K \\ c \neq b}} \gamma'_p\left(\frac{z_c}{z_b}\right) \prod_{\substack{a' \in K \setminus \{1\} \\ b' \notin K}} \gamma_p\left(\frac{z_{b'}}{z_{a'}}\right) \\
&+ \sum_{\substack{K' \subset \{1, \dots, k+\ell\} \\ \#K'=k, 1 \notin K'}} \sum_{a \in K'} E_1\left(q^{-1} \frac{z_a}{z_1}\right) \prod_{\substack{c \in K' \\ c \neq a}} \gamma_p\left(\frac{z_c}{z_a}\right) \prod_{\substack{a' \in K' \\ b' \notin K', b' \neq 1}} \gamma_p\left(\frac{z_{b'}}{z_{a'}}\right) \\
&+ (z_1 \text{ を含まない項たち})
\end{aligned}$$

であるが, 例の $K=\{1, i_2, \dots, i_k\}$, $b \notin K$ と $K'=\{i_2, \dots, i_k, b\}$, $b'=b$ なる対応によって

$$\begin{aligned}
& \bullet \frac{(k+\ell)!}{k! \ell!} \times \frac{(p; p)_\infty^2 \theta_p(q)}{\theta_p(t) \theta_p(qt^{-1})} \gamma_{k, \ell}(z_1, \dots, z_{k+\ell}) \\
&= - \sum_{\substack{K \subset \{1, \dots, k+\ell\} \\ \#K=k, 1 \in K}} \sum_{b \notin K} E_1\left(q \frac{z_b}{z_1}\right) \prod_{\substack{c \notin K \\ c \neq b}} \gamma_p\left(\frac{z_b}{z_c}\right) \prod_{\substack{a' \in K \setminus \{1\} \\ b' \notin K}} \gamma_p\left(\frac{z_{b'}}{z_{a'}}\right) \\
&+ \sum_{\substack{K \subset \{1, \dots, k+\ell\} \\ \#K=k, 1 \in K}} \sum_{b \notin K} E_1\left(q^{-1} \frac{z_b}{z_1}\right) \prod_{c \in K \setminus \{1\}} \gamma_p\left(\frac{z_c}{z_b}\right) \prod_{\substack{a' \in (K \setminus \{1\}) \cup \{b\} \\ b' \notin K, b' \neq b}} \gamma_p\left(\frac{z_{b'}}{z_{a'}}\right) \\
&+ (z_1 \text{ を含まない項たち})
\end{aligned}$$

である. ここに現れている $\gamma_p(\bullet)$ の積に注目する. 1 つ目の和にある方は

$$\begin{aligned}
& \bullet \prod_{\substack{c \notin K \\ c \neq b}} \gamma_p\left(\frac{z_b}{z_c}\right) \prod_{\substack{a' \in K \setminus \{1\} \\ b' \notin K}} \gamma_p\left(\frac{z_{b'}}{z_{a'}}\right) = \prod_{\substack{c \notin K \\ c \neq b}} \gamma_p\left(\frac{z_b}{z_c}\right) \prod_{a' \in K \setminus \{1\}} \gamma_p\left(\frac{z_b}{z_{a'}}\right) \prod_{\substack{a'' \in K \setminus \{1\} \\ b' \notin K, b' \neq b}} \gamma_p\left(\frac{z_{b'}}{z_{a''}}\right) \\
&= \prod_{c \neq 1, b} \gamma_p\left(\frac{z_b}{z_c}\right) \prod_{\substack{a' \in K \setminus \{1\} \\ b' \notin K, b' \neq b}} \gamma_p\left(\frac{z_{b'}}{z_{a'}}\right)
\end{aligned}$$

と変形でき, 2 つ目の和にあるものは

$$\begin{aligned}
& \bullet \prod_{c \in K \setminus \{1\}} \gamma_p\left(\frac{z_c}{z_b}\right) \prod_{\substack{a' \in (K \setminus \{1\}) \cup \{b\} \\ b' \notin K, b' \neq b}} \gamma_p\left(\frac{z_{b'}}{z_{a'}}\right) = \prod_{c \in K \setminus \{1\}} \gamma_p\left(\frac{z_c}{z_b}\right) \prod_{\substack{b' \notin K \\ b' \neq b}} \gamma_p\left(\frac{z_{b'}}{z_b}\right) \prod_{\substack{a' \in K \setminus \{1\} \\ b'' \notin K, b'' \neq b}} \gamma_p\left(\frac{z_{b''}}{z_{a'}}\right) \\
&= \prod_{c \neq 1, b} \gamma_p\left(\frac{z_c}{z_b}\right) \prod_{\substack{a' \in K \setminus \{1\} \\ b' \notin K, b' \neq b}} \gamma_p\left(\frac{z_{b'}}{z_{a'}}\right)
\end{aligned}$$

と書き換えられる. 以上によって

$$\begin{aligned}
& \bullet \frac{(k+\ell)!}{k! \ell!} \times \frac{(p; p)_\infty^2 \theta_p(q)}{\theta_p(t) \theta_p(qt^{-1})} \gamma_{k, \ell}(z_1, \dots, z_{k+\ell}) \\
&= \sum_{\substack{K \subset \{1, \dots, k+\ell\} \\ \#K=k, 1 \in K}} \sum_{b \notin K} \left\{ -E_1\left(q \frac{z_b}{z_1}\right) \prod_{c \neq 1, b} \gamma_p\left(\frac{z_b}{z_c}\right) + E_1\left(q^{-1} \frac{z_b}{z_1}\right) \prod_{c \neq 1, b} \gamma_p\left(\frac{z_c}{z_b}\right) \right\} \prod_{\substack{a' \in K \setminus \{1\} \\ b' \notin K, b' \neq b}} \gamma_p\left(\frac{z_{b'}}{z_{a'}}\right) \\
&+ (z_1 \text{ を含まない項たち})
\end{aligned}$$

であるが, これを更に

$$\begin{aligned}
& \bullet \frac{(k+\ell)!}{k! \ell!} \times \frac{(p; p)_\infty^2 \theta_p(q)}{\theta_p(t) \theta_p(qt^{-1})} \gamma_{k,\ell}(z_1, \dots, z_{k+\ell}) \\
&= \sum_{b=2}^{k+\ell} \left\{ -E_1 \left(q \frac{z_b}{z_1} \right) \prod_{c \neq 1, b} \gamma_p \left(\frac{z_b}{z_c} \right) + E_1 \left(q^{-1} \frac{z_b}{z_1} \right) \prod_{c \neq 1, b} \gamma_p \left(\frac{z_c}{z_b} \right) \right\} \sum_{\substack{K \subset \{1, \dots, k+\ell\} \\ \#K=k, 1 \in K, b \notin K}} \prod_{\substack{a' \in K \setminus \{1\} \\ b' \notin K, b' \neq b}} \gamma_p \left(\frac{z_{b'}}{z_{a'}} \right) \\
&\quad + (z_1 \text{ を含まない項たち})
\end{aligned}$$

とするとき, ここに見えている

$$\bullet \sum_{\substack{K \subset \{1, \dots, k+\ell\} \\ \#K=k, 1 \in K, b \notin K}} \prod_{\substack{a' \in K \setminus \{1\} \\ b' \notin K, b' \neq b}} \gamma_p \left(\frac{z_{b'}}{z_{a'}} \right)$$

には帰納法の仮定が使える. よって, $\uparrow$ これは $q \rightarrow q^{-1}, t \rightarrow t^{-1}$ の下で不変である. これによって

$$\begin{aligned}
& \bullet -\frac{(k+\ell)!}{k! \ell!} \times \frac{(p; p)_\infty^2 \theta_p(q)}{\theta_p(t) \theta_p(qt^{-1})} \gamma'_{k,\ell}(z_1, \dots, z_{k+\ell}) \\
&= \sum_{b=2}^{k+\ell} \left\{ -E_1 \left(q^{-1} \frac{z_b}{z_1} \right) \prod_{c \neq 1, b} \gamma_p \left(\frac{z_c}{z_b} \right) + E_1 \left(q \frac{z_b}{z_1} \right) \prod_{c \neq 1, b} \gamma_p \left(\frac{z_b}{z_c} \right) \right\} \sum_{\substack{K \subset \{1, \dots, k+\ell\} \\ \#K=k, 1 \in K, b \notin K}} \prod_{\substack{a' \in K \setminus \{1\} \\ b' \notin K, b' \neq b}} \gamma_p \left(\frac{z_{b'}}{z_{a'}} \right) \\
&\quad + (z_1 \text{ を含まない項たち})
\end{aligned}$$

も成り立つので, 結局

$$\bullet \gamma_{k,\ell}(z_1, \dots, z_{k+\ell}) - \gamma'_{k,\ell}(z_1, \dots, z_{k+\ell}) = (z_1, \dots, z_{k+\ell} \text{ を含まない項たち})$$

を得る. この右辺が実は 0 であることがいえればよいが, ここで

$$\begin{aligned}
& \bullet \gamma_{k,\ell}(z_1, \dots, z_{k+\ell}) \Big|_{\substack{z_\bullet = t^{k+\ell-\bullet} z_{k+\ell} \\ (1 \leq \bullet \leq k+\ell-1)}} \\
&= \frac{k! \ell!}{(k+\ell)!} \prod_{\substack{\ell+1 \leq a \leq k+\ell \\ 1 \leq b \leq \ell}} \gamma_p \left(\frac{z_b}{z_a} \right) \Big|_{\substack{z_\bullet = t^{k+\ell-\bullet} z_{k+\ell} \\ (1 \leq \bullet \leq k+\ell-1)}} = \frac{k! \ell!}{(k+\ell)!} \prod_{\substack{\ell+1 \leq a \leq k+\ell \\ 1 \leq b \leq \ell}} \gamma_p(t^{a-b}) \\
&\quad \frac{a \rightarrow k+\ell+1-a, b \rightarrow k+\ell+1-b}{(k+\ell)!} \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} \gamma_p(t^{b-a})
\end{aligned}$$

であること, 及び

$$\begin{aligned}
& \bullet \gamma'_{k,\ell}(z_1, \dots, z_{k+\ell}) \Big|_{\substack{z_\bullet = t^{k+\ell-\bullet} z_{k+\ell} \\ (1 \leq \bullet \leq k+\ell-1)}} \\
&= \frac{k! \ell!}{(k+\ell)!} \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} \gamma'_p \left(\frac{z_b}{z_a} \right) \Big|_{\substack{z_\bullet = t^{k+\ell-\bullet} z_{k+\ell} \\ (1 \leq \bullet \leq k+\ell-1)}} = \frac{k! \ell!}{(k+\ell)!} \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} \gamma'_p(t^{a-b}) \\
&= \frac{k! \ell!}{(k+\ell)!} \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} \gamma_p(t^{b-a})
\end{aligned}$$

がわかる. 以上によって Ruijsenaars 恒等式が成り立つことがわかった. $\square$

3.3 補足：証明が完了したこと

以上によって, (k) ($k \in \{0, 1, \dots, N\}$) を

$$\begin{aligned} \bullet (k) &= \text{CT}_{z_1, \dots, z_k} \left[f_p^{(k)}(z_1, \dots, z_k) \bullet X(z_1) \cdots X(z_k) \bullet \right] \\ &= \text{CT}_{z_1, \dots, z_k} \left[g_p^{(k)}(z_1, \dots, z_k) X(z_1) \cdots X(z_k) \right] \end{aligned}$$

とおくとき $[(k), (\ell)] = 0$ ($k, \ell \in \{0, 1, \dots, N\}$) なのであった. なぜこれで楕円 Ruijsenaars 作用素たちの可換性を証明できたことになるのか, 少し補足する.

「三角の場合」に少し立ち返る. 生成元 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ と関係式 $[a_m, a_n] = m\delta_{m+n, 0}$ ($m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) で生成されるボソンの代数を考える. このとき $\langle 0 | a_\lambda a_{-\mu} | 0 \rangle = z_\lambda \delta_{\lambda, \mu}$ ($\lambda, \mu \in \mathcal{P}$) なのであった. ここで次のことに注意する: $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ 及び $\lambda \in \mathcal{P}$ に対し

$$\bullet \langle 0 | a_\lambda \prod_{i=1}^N \exp \left(\sum_{n>0} a_{-n} \frac{x_i^n}{n} \right) | 0 \rangle = \langle 0 | a_\lambda \exp \left(\sum_{n>0} a_{-n} \frac{p_n(\mathbf{x})}{n} \right) | 0 \rangle = \sum_{\mu \in \mathcal{P}} \frac{p_\mu(\mathbf{x})}{z_\mu} \underbrace{\langle 0 | a_\lambda a_{-\mu} | 0 \rangle}_{z_\lambda \delta_{\lambda, \mu}} = p_\lambda(\mathbf{x}).$$

「楕円の場合」に戻る. 楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示によれば

$$\bullet (k) \phi_N(\mathbf{x}; p) | 0 \rangle = k! \left\{ \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^k D_N^{(k)}(p) \phi_N(\mathbf{x}; p) | 0 \rangle \quad (k \in \{0, 1, \dots, N\})$$

が成り立つのであった. これと $[(k), (\ell)] = 0$ ($k, \ell \in \{0, 1, \dots, N\}$) によって

$$\bullet 0 = [(k), (\ell)] \phi_N(\mathbf{x}; p) | 0 \rangle = -k! \ell! \left\{ \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^{k+\ell} \left[D_N^{(k)}(p), D_N^{(\ell)}(p) \right] \phi_N(\mathbf{x}; p) | 0 \rangle$$

であるので $\left[D_N^{(k)}(p), D_N^{(\ell)}(p) \right] \phi_N(\mathbf{x}; p) | 0 \rangle = 0$ ($k, \ell \in \{0, 1, \dots, N\}$) を得る. 仕上げて次のようにする. $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ をとって $\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} a_{\lambda_i, 0} \times p^{\frac{|\mu|}{2}} \prod_{j=1}^{\ell(\mu)} b_{\mu_j, 0}$ を考えると

$$\begin{aligned} \bullet 0 &= \langle 0 | \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} a_{\lambda_i, 0} \times p^{\frac{|\mu|}{2}} \prod_{j=1}^{\ell(\mu)} b_{\mu_j, 0} \left[D_N^{(k)}(p), D_N^{(\ell)}(p) \right] \phi_N(\mathbf{x}; p) | 0 \rangle \\ &= \left[D_N^{(k)}(p), D_N^{(\ell)}(p) \right] \langle 0 | \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} a_{\lambda_i, 0} \times p^{\frac{|\mu|}{2}} \prod_{j=1}^{\ell(\mu)} b_{\mu_j, 0} \phi_N(\mathbf{x}; p) | 0 \rangle \end{aligned}$$

であるが, ここで

$$\begin{aligned} \bullet &\langle 0 | \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} a_{\lambda_i, 0} \times p^{\frac{|\mu|}{2}} \prod_{j=1}^{\ell(\mu)} b_{\mu_j, 0} \phi_N(\mathbf{x}; p) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} a_{\lambda_i, 0} \times p^{\frac{|\mu|}{2}} \prod_{j=1}^{\ell(\mu)} b_{\mu_j, 0} \exp \left(\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{1-q^n} a_{-n, 0} \frac{p_n(\mathbf{x})}{n} + \sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{1-q^{-n}} p^{\frac{n}{2}} b_{-n, 0} \frac{p_{-n}(\mathbf{x})}{n} \right) | 0 \rangle \\ &= p_\lambda(\mathbf{x}) p_{-\mu}(\mathbf{x}) \times p^{|\mu|} \in \Lambda_N(p) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここに現れた $\Lambda_N(p)$ とは, 1.4 「補足：楕円 Ruijsenaars 作用素が作用する空間」の命題 1.4 にて述べた多変数関数の空間である. これより, 任意の $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ に対し

$$\bullet \left[D_N^{(k)}(p), D_N^{(\ell)}(p) \right] p_\lambda(\mathbf{x}) p_{-\mu}(\mathbf{x}) p^{|\mu|} = 0$$

であるが, $\Lambda_N(p)$ は power sum で生成されているので, これは $\Lambda_N(p)$ に働く作用素の等式として

$$\bullet \left[D_N^{(k)}(p), D_N^{(\ell)}(p) \right] = 0 \quad (k, \ell \in \{0, 1, \dots, N\})$$

が成り立つことを意味する.

さて, ここで Ruijsenaars 恒等式の話に入る直前に書いた式である

$$\begin{aligned} \bullet (k)(\ell) - (\ell)(k) = & \text{CT}_{z_1, \dots, z_{k+\ell}} \left[\text{Sym}_{k+\ell} \left\{ \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} \gamma_p \left(\frac{z_b}{z_a} \right) \right\} g_p^{(k+\ell)}(z) X(z_1) \cdots X(z_{k+\ell}) \right] \\ & - \text{CT}_{z_1, \dots, z_{k+\ell}} \left[\text{Sym}_{k+\ell} \left\{ \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} \gamma_p \left(\frac{z_a}{z_b} \right) \right\} g_p^{(k+\ell)}(z) X(z_1) \cdots X(z_{k+\ell}) \right] \end{aligned}$$

に立ち返ると, $f_p^{(r)}(z) \bullet X(z_1) \cdots X(z_r) \bullet = g_p^{(r)}(z) X(z_1) \cdots X(z_r)$ から

$$\begin{aligned} \bullet (k)(\ell) - (\ell)(k) = & \text{CT}_{z_1, \dots, z_{k+\ell}} \left[\gamma_{k,\ell}(z_1, \dots, z_{k+\ell}) f_p^{(k+\ell)}(z) \bullet X(z_1) \cdots X(z_{k+\ell}) \bullet \right] \\ & - \text{CT}_{z_1, \dots, z_{k+\ell}} \left[\gamma'_{k,\ell}(z_1, \dots, z_{k+\ell}) f_p^{(k+\ell)}(z) \bullet X(z_1) \cdots X(z_{k+\ell}) \bullet \right] \end{aligned}$$

である (既に見た通り, これは 0 である). これを $\phi_N(\mathbf{x}; p)|0\rangle$ に触れさせ, 更に上でやったのと同様のことを考えると次を得る: 任意の $k, \ell \in \{0, 1, \dots, N\}$ に対し

$$\bullet \left[D_N^{(k)}(p), D_N^{(\ell)}(p) \right] = - \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ \#I = k+\ell}} \{ \gamma_{k,\ell}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k+\ell}}) - \gamma'_{k,\ell}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k+\ell}}) \} A_I^{(k+\ell)}(\mathbf{x}; p) \prod_{i \in I} T_{q, x_i}.$$

今回は「楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示によって Ruijsenaars 恒等式の存在に気がつくので, それによって楕円 Ruijsenaars 作用素たちの可換性がわかる」と述べたが, ここに書いた通り, 楕円 Ruijsenaars 作用素たちの可換性は直接の計算によっても理論上は理解可能である.

実際には, Ruijsenaars は↑これ (と等価な式) を見つつ「Ruijsenaars 恒等式が現れるように楕円 Ruijsenaars 作用素の格好を決めた」のである. より詳しいことは Ruijsenaars の次の原論文を参照してほしい:

- S.N.M. Ruijsenaars “Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities” (Communications in Mathematical Physics 110.2 (1987): 191-213)

3.4 Feigin-Odesskii の楕円シャッフ代数との関係

「Feigin-Odesskii の楕円シャッフ代数」と呼ばれるものとの関係について少し触れておく. これまで「FHHSY」と呼んできた

- B. Feigin, K. Hashizume, A. Hoshino, J. Shiraishi, S. Yanagida “A commutative algebra on degenerate $\mathbb{CP}^1$ and Macdonald polynomials” (Journal of mathematical physics 50.9 (2009))

の内容を参考にしつつ, 楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示の次のような書き換えを考える. まず, これまで見てきた $g_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)$ は次のように書ける:

$$\begin{aligned} \bullet g_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) &= \prod_{1 \leq a < b \leq r} g_p(z_b/z_a) = \prod_{1 \leq a < b \leq r} \frac{\theta_p(z_b/z_a) \theta_p(qz_b/z_a)}{\theta_p(tz_b/z_a) \theta_p(qt^{-1}z_b/z_a)} \\ &= \prod_{1 \leq a < b \leq r} \frac{\theta_p(qz_b/z_a) \theta_p(q^{-1}z_b/z_a)}{\theta_p(z_b/z_a)^2} \prod_{1 \leq a' < b' \leq r} \frac{\theta_p(z_{b'}/z_{a'})^3}{\theta_p(q^{-1}z_{b'}/z_{a'}) \theta_p(tz_{b'}/z_{a'}) \theta_p(qt^{-1}z_{b'}/z_{a'})}. \end{aligned}$$

これを見つ

$$\begin{aligned} \bullet \quad \varepsilon_p(z) &:= \frac{\theta_p(qz)\theta_p(q^{-1}z)}{\theta_p(z)^2}, \quad \bullet \quad \varepsilon_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) = \prod_{1 \leq a < b \leq r} \varepsilon_p(z_b/z_a), \\ \bullet \quad \omega_p(z) &:= \frac{\theta_p(q^{-1}z)\theta_p(tz)\theta_p(qt^{-1}z)}{\theta_p(z)^3}, \quad \bullet \quad \omega_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) := \prod_{1 \leq a < b \leq r} \omega_p(z_b/z_a) \end{aligned}$$

とおくと, $g_p(z) = \varepsilon_p(z)\omega_p(z)^{-1}$ から

$$\bullet \quad g_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) = \varepsilon_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)\omega_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)^{-1}$$

である. また, $f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet X(z_1) \cdots X(z_r) \bullet = g_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) X(z_1) \cdots X(z_r)$ から

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \prod_{1 \leq a < b \leq r} \frac{\theta_p(z_b/z_a)^4}{\theta_p(qz_b/z_a)\theta_p(q^{-1}z_b/z_a)\theta_p(tz_b/z_a)\theta_p(t^{-1}z_b/z_a)} \bullet X(z_1) \cdots X(z_r) \bullet \\ &= \varepsilon_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)^{-1} f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet X(z_1) \cdots X(z_r) \bullet \\ &= \varepsilon_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)^{-1} g_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) X(z_1) \cdots X(z_r) \\ &= \omega_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)^{-1} X(z_1) \cdots X(z_r) \end{aligned}$$

であるが, これは $z_1, \dots, z_r$ の入れ換えで不変な作用素値関数である. こうして, 楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示に現れるボソンの作用素は

$$\bullet \quad \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[\varepsilon_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \omega_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)^{-1} X(z_1) \cdots X(z_r) \right]$$

とも書ける. これによって $(k)(\ell)$ を見ると

$$\bullet \quad (k)(\ell) = \text{CT}_{z_1, \dots, z_{k+\ell}} \left[\text{Sym}_{k+\ell} \left\{ \frac{\varepsilon_p^{(k)}(z_1, \dots, z_k) \varepsilon_p^{(\ell)}(z_{k+1}, \dots, z_{k+\ell}) \omega_p^{(k+\ell)}(z_1, \dots, z_{k+\ell})}{\omega_p^{(k)}(z_1, \dots, z_k) \omega_p^{(\ell)}(z_{k+1}, \dots, z_{k+\ell})} \right\} (\dots) \right]$$

とできる ($\uparrow (\dots) = \omega_p^{(k+\ell)}(z_1, \dots, z_{k+\ell})^{-1} X(z_1) \cdots X(z_{k+\ell})$ である). ここで

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \text{Sym}_{k+\ell} \left\{ \frac{\varepsilon_p^{(k)}(z_1, \dots, z_k) \varepsilon_p^{(\ell)}(z_{k+1}, \dots, z_{k+\ell}) \omega_p^{(k+\ell)}(z_1, \dots, z_{k+\ell})}{\omega_p^{(k)}(z_1, \dots, z_k) \omega_p^{(\ell)}(z_{k+1}, \dots, z_{k+\ell})} \right\} \\ &= \text{Sym}_{k+\ell} \left\{ \varepsilon_p^{(k)}(z_1, \dots, z_k) \varepsilon_p^{(\ell)}(z_{k+1}, \dots, z_{k+\ell}) \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} \omega_p \left(\frac{z_b}{z_a} \right) \right\} \end{aligned}$$

であるが, これは次のようにして $\varepsilon_p^{(k)}(z_1, \dots, z_k)$ と $\varepsilon_p^{(\ell)}(z_1, \dots, z_\ell)$ のある種の積であるとみなすことができる.

定義 3.6 (star product). 多変数関数 $f(z_1, \dots, z_k), g(z_1, \dots, z_\ell)$ に対し

$$\bullet \quad (f * g)(z_1, \dots, z_{k+\ell}) := \text{Sym}_{k+\ell} \left\{ f(z_1, \dots, z_k) g(z_{k+1}, \dots, z_{k+\ell}) \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} \omega_p \left(\frac{z_b}{z_a} \right) \right\}$$

と定め, これを $f(z_1, \dots, z_k), g(z_1, \dots, z_\ell)$ の star product と呼ぶ.

この star product の記号を使うと

$$\bullet (k)(\ell) = \text{CT}_{z_1, \dots, z_{k+\ell}} \left[\left(\varepsilon_p^{(k)} * \varepsilon_p^{(\ell)} \right) (z_1, \dots, z_{k+\ell}) \omega_p^{(k+\ell)} (z_1, \dots, z_{k+\ell})^{-1} X(z_1) \cdots X(z_{k+\ell}) \right]$$

である. 一方で, $(\ell)(k)$ は

$$\bullet (\ell)(k) = \text{CT}_{z_1, \dots, z_{k+\ell}} \left[\left(\varepsilon_p^{(\ell)} * \varepsilon_p^{(k)} \right) (z_1, \dots, z_{k+\ell}) \omega_p^{(k+\ell)} (z_1, \dots, z_{k+\ell})^{-1} X(z_1) \cdots X(z_{k+\ell}) \right]$$

であるが, ここで実は

$$\bullet \left(\varepsilon_p^{(k)} * \varepsilon_p^{(\ell)} \right) (z_1, \dots, z_{k+\ell}) = \left(\varepsilon_p^{(\ell)} * \varepsilon_p^{(k)} \right) (z_1, \dots, z_{k+\ell})$$

が成り立つことが, 先に見た Ruijsenaars 恒等式から従うのである.

「 $\varepsilon_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)$ ($r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) たちの star product の下での可換性」を意味する上の内容は次のようにして示せる. 先に見たように

$$\bullet \left(\varepsilon_p^{(k)} * \varepsilon_p^{(\ell)} \right) (z_1, \dots, z_{k+\ell}) = \text{Sym}_{k+\ell} \left\{ \varepsilon_p^{(k)}(z_1, \dots, z_k) \varepsilon_p^{(\ell)}(z_{k+1}, \dots, z_{k+\ell}) \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} \omega_p(z_b/z_a) \right\}$$

なのであったが, $\varepsilon_p(z)^{-1} \omega_p(z) = \frac{\theta_p(tz) \theta_p(qt^{-1}z)}{\theta_p(z) \theta_p(qz)} = g_p(z)^{-1}$ に注意すると次が成り立つ:

$$\begin{aligned} & \bullet \left(\varepsilon_p^{(k)} * \varepsilon_p^{(\ell)} \right) (z_1, \dots, z_{k+\ell}) \\ &= \text{Sym}_{k+\ell} \left\{ \varepsilon_p^{(k+\ell)}(z_1, \dots, z_{k+\ell}) \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} \varepsilon_p(z_b/z_a)^{-1} \prod_{\substack{1 \leq a' \leq k \\ k+1 \leq b' \leq k+\ell}} \omega_p(z_{b'}/z_{a'}) \right\} \\ &= \text{Sym}_{k+\ell} \left\{ \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} g_p(z_b/z_a)^{-1} \varepsilon_p^{(k+\ell)}(z_1, \dots, z_{k+\ell}) \right\}. \end{aligned}$$

よって, $\gamma_p(z) := g_p(z)^{-1}$ とおくと

$$\bullet \left(\varepsilon_p^{(k)} * \varepsilon_p^{(\ell)} \right) (z_1, \dots, z_{k+\ell}) = \text{Sym}_{k+\ell} \left\{ \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} \gamma_p \left(\frac{z_b}{z_a} \right) \right\} \varepsilon_p^{(k+\ell)}(z_1, \dots, z_{k+\ell})$$

である. 一方, $\left(\varepsilon_p^{(\ell)} * \varepsilon_p^{(k)} \right) (z_1, \dots, z_{k+\ell})$ は $\gamma'_p(z) := \gamma_p(z) \Big|_{\substack{q \rightarrow q^{-1} \\ t \rightarrow t^{-1}}}$ によって

$$\begin{aligned} & \bullet \left(\varepsilon_p^{(\ell)} * \varepsilon_p^{(k)} \right) (z_1, \dots, z_{k+\ell}) = \text{Sym}_{k+\ell} \left\{ \prod_{\substack{1 \leq a \leq \ell \\ \ell+1 \leq b \leq k+\ell}} \gamma_p \left(\frac{z_b}{z_a} \right) \right\} \varepsilon_p^{(k+\ell)}(z_1, \dots, z_{k+\ell}) \\ &= \text{Sym}_{k+\ell} \left\{ \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} \gamma'_p \left(\frac{z_b}{z_a} \right) \right\} \varepsilon_p^{(k+\ell)}(z_1, \dots, z_{k+\ell}) \end{aligned}$$

と書ける. ここで「Ruijsenaars 恒等式」として先に見た

$$\bullet \operatorname{Sym}_{k+\ell} \left\{ \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} \gamma_p \left(\frac{z_b}{z_a} \right) \right\} = \operatorname{Sym}_{k+\ell} \left\{ \prod_{\substack{1 \leq a \leq k \\ k+1 \leq b \leq k+\ell}} \gamma'_p \left(\frac{z_b}{z_a} \right) \right\}$$

によれば $(\varepsilon_p^{(k)} * \varepsilon_p^{(\ell)})(z_1, \dots, z_{k+\ell}) = (\varepsilon_p^{(\ell)} * \varepsilon_p^{(k)})(z_1, \dots, z_{k+\ell})$ を得る.

命題 3.7. $\varepsilon_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)$ ($r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) たちは star product の下で可換である.

$\left\{ \varepsilon_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \right\}_{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ によって生成される $\mathbb{C}$ -代数を「Feigin-Odesskii の楕円シャッフル代数」と呼び, これを $\mathcal{A}(p)$ と書く (積は star product によって定める. 積の単位元は $\varepsilon_p^{(0)} = 1$). $\mathcal{A}(p)$ は単位的, 結合的 (結合律は symmetrizer の性質から従う), 可換な $\mathbb{C}$ -代数である.

$\mathcal{A}(p)$ を「Feigin-Odesskii の楕円シャッフル代数」と呼んだのは, $\varepsilon_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)$ ($r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) たちの star product の下での可換性が次の論文において述べられているからである:

• B. Feigin, A. Odesskii “A family of elliptic algebras” (International Mathematics Research Notices 1997.11 (1997): 531-539)

以上によって, 「楕円シャッフル代数 $\mathcal{A}(p)$ が star product について可換なので, 楕円 Ruijsenaars 作用素たちは互いに可換である」とも理解できるわけである. ただ, 今回は $\mathcal{A}(p)$ の star product の下での可換性を「Ruijsenaars 恒等式」から導いたので, 「楕円 Ruijsenaars 作用素たちの可換性」と「 $\mathcal{A}(p)$ の star product の下での可換性」は (今回の場合は) 同じ内容だと理解するのが自然であると思う.

さて, 楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示は, これまでのことによって

$$\begin{aligned} & \bullet \operatorname{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet X(z_1) \cdots X(z_r) \bullet \right] \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\ &= \operatorname{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[g_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) X(z_1) \cdots X(z_r) \right] \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\ &= \operatorname{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[\varepsilon_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \omega_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)^{-1} X(z_1) \cdots X(z_r) \right] \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\ &= r! \left\{ \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^r D_N^{(r)}(p) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \end{aligned}$$

とも書けるのであった. 今回は, これまで $X(z)$ と書いてきたものを

$$\bullet X_N(z) = \eta(z) - t^{-N} \eta_-(z) \eta_+(p^{-1}z)$$

という具合に N を明示して書く. 楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示にて用いた

$$\bullet \operatorname{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[\varepsilon_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \omega_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)^{-1} X_N(z_1) \cdots X_N(z_r) \right]$$

によって, 写像 $\mathcal{O}_N: \mathcal{A}(p) \rightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F})((p^{1/2}))$ を次のようにして定義できる. まず

$$\begin{aligned} & \bullet \mathcal{O}_N(\varepsilon_p^{(r)}) \\ &:= \operatorname{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[\varepsilon_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \omega_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)^{-1} X_N(z_1) \cdots X_N(z_r) \right] \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F})((p^{1/2})) \quad (r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \end{aligned}$$

とおく ($\uparrow \mathcal{O}_N(\cdots)$ の中の $\varepsilon_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)$ の $z_1, \dots, z_r$ を省略して書く. また「 $r \in \{0, 1, \dots, N\}$ 」でなくともよいことに注意).

これはつまり, $\varepsilon_p^{(k)}(z_1, \dots, z_k)$ ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) に先ほどまで

$$\begin{aligned} \bullet (k) &= \text{CT}_{z_1, \dots, z_k} \left[f_p^{(k)}(z_1, \dots, z_k) \bullet X_N(z_1) \cdots X_N(z_k) \bullet \right] \\ &= \text{CT}_{z_1, \dots, z_k} \left[g_p^{(k)}(z_1, \dots, z_k) X_N(z_1) \cdots X_N(z_k) \right] \\ &= \text{CT}_{z_1, \dots, z_k} \left[\varepsilon_p^{(r)}(z_1, \dots, z_k) \omega_p^{(k)}(z_1, \dots, z_k)^{-1} X_N(z_1) \cdots X_N(z_k) \right] \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F})((p^{1/2})) \end{aligned}$$

と書いていたものを対応させるということである。「Ruijsenaars 恒等式」によって, $\mathcal{O}_N(\varepsilon_p^{(r)})$ ($r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) たちは互いに可換である. また, この記法によれば次が成り立つ:

$$\bullet \mathcal{O}_N(\varepsilon_p^{(r)}) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle = r! \left\{ \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_{\infty}^2} \right\}^r D_N^{(r)}(p) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \quad (r \in \{0, 1, \dots, N\}).$$

これに加えて, $r \geq N+1$ の場合には $\mathcal{O}_N(\varepsilon_p^{(r)}) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle = 0$ なのであるが, これについては後述する.

あとは $\mathcal{O}_N$ を $\mathcal{A}(p)$ 全体に $\mathbb{C}$ -代数の準同型写像として拡張したいのであるが, そのためには

$$\bullet \mathcal{O}_N(\varepsilon_p^{(k_1)} * \cdots * \varepsilon_p^{(k_n)}) := \mathcal{O}_N(\varepsilon_p^{(k_1)}) \cdots \mathcal{O}_N(\varepsilon_p^{(k_n)}) \quad (n \in \mathbb{Z}_{>0}, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

と定め, これを $\mathbb{C}$ -線型に拡張すれば, $\mathbb{C}$ -代数の準同型写像 $\mathcal{O}_N: \mathcal{A}(p) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F})((p^{1/2}))$ が得られる (楕円シャッフル代数 $\mathcal{A}(p)$ は star product $*$ について可換な $\mathbb{C}$ -代数なので, 準同型写像を作るにはこのようにするので十分である).

上で作った準同型写像 $\mathcal{O}_N: \mathcal{A}(p) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F})((p^{1/2}))$ の像

$$\bullet \mathcal{O}_N(\mathcal{A}(p)) \subset \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F})((p^{1/2}))$$

は可換な $\mathbb{C}$ -代数であるが, この中に, N 変数の楕円 Ruijsenaars 作用素たちが生成する可換な $\mathbb{C}$ -代数 ($\downarrow D_N^{(0)}(p)=1$ に注意)

$$\bullet \mathbb{C} \left[D_N^{(0)}(p), D_N^{(1)}(p), \dots, D_N^{(N)}(p) \right] = \mathbb{C} \left[D_N^{(1)}(p), \dots, D_N^{(N)}(p) \right]$$

に対応する部分代数ができてることが次のようにしてわかる. まず次に注意する:

$$\bullet \mathcal{O}_N(\varepsilon_p^{(r)}) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle = 0 \quad (r \geq N+1).$$

実際, 楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示を示す途中で見たように

$$\begin{aligned} \bullet & \left\{ \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_{\infty}^2} \right\}^{-r} f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet X_N(z_1) \cdots X_N(z_r) \bullet \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\ &= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r \leq N} A_{i_1}(\mathbf{x}; p) \cdots A_{i_r}(\mathbf{x}; p) f_p^{(r)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) \delta\left(t \frac{x_{i_1}}{z_1}\right) \cdots \delta\left(t \frac{x_{i_r}}{z_r}\right) T_{q, x_{i_1}} \cdots T_{q, x_{i_r}} \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \end{aligned}$$

であった. ただ, $r \geq N+1$ の場合には, $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq N$ を互いに相異なるようにとることはできない. よって, この場合には

$$\bullet f_p^{(r)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) = \prod_{1 \leq a < b \leq r} \frac{\theta_p(x_{i_b}/x_{i_a})^2}{\theta_p(tx_{i_b}/x_{i_a}) \theta_p(t^{-1}x_{i_b}/x_{i_a})}$$

の分子のテータ関数のどれかが必ず 0 になる (ある i_α, i_β ($1 \leq \alpha < \beta \leq r$) で $i_\alpha = i_\beta$ となるものが必ずあるので $\theta_p(x_{i_\beta}/x_{i_\alpha}) = \theta_p(1) = 0$). よって, $r \geq N+1$ である場合には

$$\begin{aligned} \bullet 0 &= \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet X_N(z_1) \cdots X_N(z_r) \bullet \right] \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\ &= \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[\varepsilon_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \omega_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)^{-1} X_N(z_1) \cdots X_N(z_r) \right] \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\ &= \mathcal{O}_N(\varepsilon_p^{(r)}) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle. \end{aligned}$$

こういったことから, $\mathcal{O}_N(\mathcal{A}(p))$ の元を $\phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle$ に当てる際, 非自明に作用するのは $\mathcal{O}_N(\varepsilon_p^{(0)})$, $\mathcal{O}_N(\varepsilon_p^{(1)})$, $\dots$, $\mathcal{O}_N(\varepsilon_p^{(N)})$ で生成される $\mathcal{O}_N(\mathcal{A}(p))$ の部分代数の元たちである. この部分代数を $\mathcal{S}_N$ と書くとき, これが楕円 Ruijsenaars 作用素たちの生成する可換な $\mathbb{C}$ -代数 $\mathbb{C}[D_N^{(1)}(p), \dots, D_N^{(N)}(p)]$ と同型なのである.

ここで $\mathcal{O}_N(\varepsilon_p^{(0)}) = 1$ なので, $\mathcal{S}_N$ は $\mathcal{O}_N(\varepsilon_p^{(1)}), \dots, \mathcal{O}_N(\varepsilon_p^{(N)})$ によって生成される.

命題 3.8. (1) $\mathcal{S}_N$ の生成元 $\mathcal{O}_N(\varepsilon_p^{(1)}), \dots, \mathcal{O}_N(\varepsilon_p^{(N)})$ は非自明な関係式を満たさない. すなわち, N 変数多項式 $f(X_1, \dots, X_N)$ で

$$\bullet f(\mathcal{O}_N(\varepsilon_p^{(1)}), \dots, \mathcal{O}_N(\varepsilon_p^{(N)})) = 0$$

を満たすものは $f=0$ (ゼロ多項式) しかない.

(2) $\mathcal{S}_N \cong \mathbb{C}[D_N^{(1)}(p), \dots, D_N^{(N)}(p)]$ が成り立つ.

証明. (1) ここだけの記号として

$$\bullet b_r := \frac{1}{r!} \left\{ \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^{-r} \mathcal{O}_N(\varepsilon_p^{(r)}) \quad (r \in \{1, \dots, N\})$$

とおくと, 目的のためには, これら $b_1, \dots, b_N$ が非自明な関係式を満たさないことを示せば十分である. そこで, ある N 変数多項式 $f(X_1, \dots, X_N)$ があって

$$\bullet f(b_1, \dots, b_N) = 0$$

であったとする. このとき, 楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示によって次を得る:

$$\bullet 0 = f(b_1, \dots, b_N) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle = f(D_N^{(1)}(p), \dots, D_N^{(N)}(p)) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle.$$

ここから先は 3.3 「補足: 証明が完了したこと」にて述べたのと同様にやればよい. $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ を任意にとるとき

$$\begin{aligned} \bullet 0 &= \langle 0 | \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} a_{\lambda_i, 0} \times p^{\frac{|\mu|}{2}} \prod_{j=1}^{\ell(\mu)} b_{\mu_j, 0} f(D_N^{(1)}(p), \dots, D_N^{(N)}(p)) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\ &= f(D_N^{(1)}(p), \dots, D_N^{(N)}(p)) \langle 0 | \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} a_{\lambda_i, 0} \times p^{\frac{|\mu|}{2}} \prod_{j=1}^{\ell(\mu)} b_{\mu_j, 0} \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\ &= f(D_N^{(1)}(p), \dots, D_N^{(N)}(p)) p_\lambda(\mathbf{x}) p_{-\mu}(\mathbf{x}) p^{|\mu|} \end{aligned}$$

がわかるので, 多変数関数の空間 $\Lambda_N(p)$ に作用する作用素についての等式として

$$\bullet f\left(D_N^{(1)}(p), \dots, D_N^{(N)}(p)\right) = 0$$

が成り立つ. 第 1 章の 1.2 「楕円 Ruijsenaars 作用素について」にて少し触れたように, 楕円 Ruijsenaars 作用素たち $D_N^{(1)}(p), \dots, D_N^{(N)}(p)$ は非自明な関係式を満たさないで, $f=0$ がわかる.

(2) (1) で述べたことから $\mathcal{S}_N = \mathbb{C}[b_1, \dots, b_N]$ である. これより, $\mathbb{C}$ -代数の準同型写像

$$\bullet h: \mathcal{S}_N \rightarrow \mathbb{C}\left[D_N^{(1)}(p), \dots, D_N^{(N)}(p)\right]$$

で $h(b_r) = D_N^{(r)}(p)$ ($r \in \{1, \dots, N\}$) を満たすものが自然に作れ, これが同型

$$\bullet \mathcal{S}_N \cong \mathbb{C}\left[D_N^{(1)}(p), \dots, D_N^{(N)}(p)\right]$$

を与える. $\square$

楯円 Ruijsenaars 作用素の核関数の満たす恒等式

楯円 Ruijsenaars 作用素の核関数の満たす恒等式は、自由場表示によれば簡単に導出できる (2023 年 3 月頃にわかった). ただし、その意味するものがわからない. 「お釣り」としか呼べないような因子が現れて、その先に進めないものである (2026 年 7 月の発言). このことにどういった不満があるのかについて、「三角の場合」や「楯円 Calogero-Moser 系」についての結果を紹介し、核関数の恒等式に現れる「お釣り」に対する筆者なりの考えを述べる.

4.1 基本的アイデアと主結果

最初が一番簡単な場合について述べる. 楯円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示で用いた vertex operator $\eta(z)=\eta_-(z)\eta_+(z)$ によって

$$\bullet \tilde{\eta}(z):=\eta_-(z)\eta_+(p^{-1}z), \quad \bullet \eta^\vee(z):=\eta_-(pz)\eta_+(z)$$

とおくとき、1 階の楯円 Ruijsenaars 作用素 $D_N^{(1)}(p)=D_N(p)$ の自由場表示として

$$\begin{aligned} \bullet \langle 0|\phi_M^\dagger(\mathbf{x};p)\text{CT}_z[\eta(z)-t^{-M}\eta^\vee(z)]&=\frac{t^{-M+1}\theta_p(t^{-1})}{(p;p)_\infty^2}D_M(p)_\mathbf{x}\langle 0|\phi_M^\dagger(\mathbf{x};p), \\ \bullet \text{CT}_z[\eta(z)-t^{-N}\tilde{\eta}(z)]\phi_N(\mathbf{y};p)|0\rangle&=\frac{t^{-N+1}\theta_p(t^{-1})}{(p;p)_\infty^2}D_N(p)_\mathbf{y}\phi_N(\mathbf{y};p)|0\rangle \end{aligned}$$

が成り立つのであった ($D_M(p)_\mathbf{x}$ は $x_1, \dots, x_M$ の関数に作用する 1 階の楯円 Ruijsenaars 作用素を表す). また、 $\langle 0|\phi_M^\dagger(\mathbf{x};p)$ と $\phi_N(\mathbf{y};p)|0\rangle$ からは

$$\bullet \langle 0|\phi_M^\dagger(\mathbf{x};p)\phi_N(\mathbf{y};p)|0\rangle=\Pi_{M,N}(\mathbf{x},\mathbf{y};q,t,p)=\prod_{\substack{1\leq i\leq M \\ 1\leq j\leq N}}\frac{\Gamma_{q,p}(x_i y_j)}{\Gamma_{q,p}(t x_i y_j)}$$

として楯円 Ruijsenaars 作用素の核関数 $\Pi_{M,N}(\mathbf{x},\mathbf{y};q,t,p)$ が出る ($\phi(z;p)$ と $\phi^\dagger(z;p)$ は ↑ これが成り立つように作っていた). よって、

$$\bullet \langle 0|\phi_M^\dagger(\mathbf{x};p)\text{CT}_z[\eta(z)]\phi_N(\mathbf{y};p)|0\rangle$$

を計算することで、楯円 Ruijsenaars 作用素とその核関数についての関係が何か得られそうである. 実際、これを次の 2 通りに計算することができる:

$$\begin{aligned} \bullet \langle 0|\phi_M^\dagger(\mathbf{x};p)\text{CT}_z[\eta(z)]\phi_N(\mathbf{y};p)|0\rangle \\ =\frac{t^{-M+1}\theta_p(t^{-1})}{(p;p)_\infty^2}D_M(p)_\mathbf{x}\Pi_{M,N}(\mathbf{x},\mathbf{y};q,t,p)+t^{-M}\langle 0|\phi_M^\dagger(\mathbf{x};p)\text{CT}_z[\eta^\vee(z)]\phi_N(\mathbf{y};p)|0\rangle \\ =\frac{t^{-N+1}\theta_p(t^{-1})}{(p;p)_\infty^2}D_N(p)_\mathbf{y}\Pi_{M,N}(\mathbf{x},\mathbf{y};q,t,p)+t^{-N}\langle 0|\phi_M^\dagger(\mathbf{x};p)\text{CT}_z[\tilde{\eta}(z)]\phi_N(\mathbf{y};p)|0\rangle. \end{aligned}$$

詳しくは後述するが、ここに現れた

$$\bullet \langle 0|\phi_M^\dagger(\mathbf{x};p)\text{CT}_z[\eta^\vee(z)]\phi_N(\mathbf{y};p)|0\rangle \quad \text{と} \quad \langle 0|\phi_M^\dagger(\mathbf{x};p)\text{CT}_z[\tilde{\eta}(z)]\phi_N(\mathbf{y};p)|0\rangle$$

は互いに等しく

$$\begin{aligned} & \bullet \langle 0 | \phi_M^\dagger(\mathbf{x}; p) \text{CT}_z [\eta^\vee(z)] \phi_N(\mathbf{y}; p) | 0 \rangle = \langle 0 | \phi_M^\dagger(\mathbf{x}; p) \text{CT}_z [\tilde{\eta}(z)] \phi_N(\mathbf{y}; p) | 0 \rangle \\ &= \oint_C \frac{dz}{2\pi i z} \prod_{i=1}^M \frac{\theta_p(t^{-1}x_i z)}{\theta_p(x_i z)} \prod_{j=1}^N \frac{\theta_p(z/y_j)}{\theta_p(t^{-1}z/y_j)} \times \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) \end{aligned}$$

が成り立つ (積分路 C のとり方は, 一般の場合と合わせて後述する). ここに現れた積分を

$$\bullet C_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; p) := \oint_C \frac{dz}{2\pi i z} \prod_{i=1}^M \frac{\theta_p(t^{-1}x_i z)}{\theta_p(x_i z)} \prod_{j=1}^N \frac{\theta_p(z/y_j)}{\theta_p(t^{-1}z/y_j)}$$

と書くことにすると, 1 階の楕円 Ruijsenaars 作用素 $D_N(p)$ と核関数 $\Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p)$ について次が成り立つことがわかった:

$$\begin{aligned} & \bullet \frac{t^{-M+1}\theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} D_M(p)_{\mathbf{x}} \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) + t^{-M} C_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; p) \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) \\ &= \frac{t^{-N+1}\theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} D_N(p)_{\mathbf{y}} \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) + t^{-N} C_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; p) \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p). \end{aligned}$$

特に, $M=N$ の場合には「お釣り」 $C_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; p)$ を含む項が落ちて

$$\bullet D_N(p)_{\mathbf{x}} \Pi_{N,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) = D_N(p)_{\mathbf{y}} \Pi_{N,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p)$$

という既に知られた結果を再現する.

以上のようなことを高階の楕円 Ruijsenaars 作用素に対しても考えられるであろう. 第 2 章の 2.4 「補足: 正規順序積の脱着」 で見た

$$\begin{aligned} & \bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet X(z_1) \cdots X(z_r) \bullet \right] \\ &= \sum_{k=0}^r (-t^{-N})^{r-k} \binom{r}{k} \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet \eta(z_1) \cdots \eta(z_k) \tilde{\eta}(z_{k+1}) \cdots \tilde{\eta}(z_r) \bullet \right] \end{aligned}$$

によって, 楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示は

$$\begin{aligned} & \bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z) \bullet \eta(z_1) \cdots \eta(z_r) \bullet \right] \phi_N(\mathbf{y}; p) | 0 \rangle \\ &= r! \left\{ \frac{t^{-N+1}\theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^r D_N^{(r)}(p)_{\mathbf{y}} \phi_N(\mathbf{y}; p) | 0 \rangle \\ &\quad - \sum_{k=0}^{r-1} (-t^{-N})^{r-k} \binom{r}{k} \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z) \bullet \eta(z_1) \cdots \eta(z_k) \tilde{\eta}(z_{k+1}) \cdots \tilde{\eta}(z_r) \bullet \right] \phi_N(\mathbf{y}; p) | 0 \rangle \end{aligned}$$

とも書ける ($f_p^{(r)}(z) = f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)$ である). この「双対版」は

$$\begin{aligned} & \bullet \langle 0 | \phi_M^\dagger(\mathbf{x}; p) \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z) \bullet \eta(z_1) \cdots \eta(z_r) \bullet \right] \\ &= r! \left\{ \frac{t^{-M+1}\theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^r D_M^{(r)}(p)_{\mathbf{x}} \langle 0 | \phi_M^\dagger(\mathbf{x}; p) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{r-1} (-t^{-M})^{r-k} \binom{r}{k} \langle 0 | \phi_M^\dagger(\mathbf{x}; p) \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z) \bullet \eta(z_1) \cdots \eta(z_k) \eta^\vee(z_{k+1}) \cdots \eta^\vee(z_r) \bullet \right] \end{aligned}$$

である. これらによって, $r \in \{1, \dots, \min\{M, N\}\}$ なる r に対して

$$\bullet \langle 0 | \phi_M^\dagger(\mathbf{x}; p) \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z) \bullet \eta(z_1) \cdots \eta(z_r) \bullet \right] \phi_N(\mathbf{y}; p) | 0 \rangle$$

を計算すると次のようになる:

$$\begin{aligned} & \bullet r! \left\{ \frac{t^{-M+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^r D_M^{(r)}(p) \mathbf{x} \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) \\ & - \sum_{k=0}^{r-1} (-t^{-M})^{r-k} \binom{r}{k} \langle 0 | \phi_M^\dagger(\mathbf{x}; p) \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z) \bullet \eta(z_1) \cdots \eta(z_k) \eta^\vee(z_{k+1}) \cdots \eta^\vee(z_r) \bullet \right] \phi_N(\mathbf{y}; p) | 0 \rangle \\ & = r! \left\{ \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^r D_N^{(r)}(p) \mathbf{y} \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) \\ & - \sum_{k=0}^{r-1} (-t^{-N})^{r-k} \binom{r}{k} \langle 0 | \phi_M^\dagger(\mathbf{x}; p) \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z) \bullet \eta(z_1) \cdots \eta(z_k) \tilde{\eta}(z_{k+1}) \cdots \tilde{\eta}(z_r) \bullet \right] \phi_N(\mathbf{y}; p) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

以上によって次のことが成り立つ「はず」である. 関数 $C_{M,N}^{(r,k)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; p)$ を

$$\begin{aligned} \bullet C_{M,N}^{(r,k)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; p) &:= \frac{\langle 0 | \phi_M^\dagger(\mathbf{x}; p) \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z) \bullet \eta(z_1) \cdots \eta(z_k) \tilde{\eta}(z_{k+1}) \cdots \tilde{\eta}(z_r) \bullet \right] \phi_N(\mathbf{y}; p) | 0 \rangle}{\Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p)} \\ &= \frac{\langle 0 | \phi_M^\dagger(\mathbf{x}; p) \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z) \bullet \eta(z_1) \cdots \eta(z_k) \eta^\vee(z_{k+1}) \cdots \eta^\vee(z_r) \bullet \right] \phi_N(\mathbf{y}; p) | 0 \rangle}{\Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p)} \end{aligned}$$

とおくとき (これら 2通りの表示が等しいことは後述する), $r \in \{0, 1, \dots, \min\{M, N\}\}$ に対し

$$\begin{aligned} & \bullet r! \left\{ \frac{t^{-M+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^r D_M^{(r)}(p) \mathbf{x} \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) \\ & - \sum_{k=0}^{r-1} (-t^{-M})^{r-k} \binom{r}{k} C_{M,N}^{(r,k)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; p) \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) \\ & = r! \left\{ \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^r D_N^{(r)}(p) \mathbf{y} \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) \\ & - \sum_{k=0}^{r-1} (-t^{-N})^{r-k} \binom{r}{k} C_{M,N}^{(r,k)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; p) \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p). \end{aligned}$$

1 階の楕円 Ruijsenaars 作用素 $D_N^{(1)}(p) = D_N(p)$ の場合と同様, $M=N$ の場合にはやはり「お釣り」 $C_{M,N}^{(r,k)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; p)$ を含む項が相殺して

$$\bullet D_N^{(r)}(p) \mathbf{x} \Pi_{N,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) = D_N^{(r)}(p) \mathbf{y} \Pi_{N,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) \quad (r \in \{0, 1, \dots, N\})$$

である. このように, 「 $M=N$ 」の場合には楕円 Ruijsenaars 作用素の核関数の満たす恒等式の格好が簡単になるが, この「 $M=N$ 」は「balancing condition」と呼ばれるものの一種である. 本文書では「楕円 Ruijsenaars 作用素の核関数 $\Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p)$ が存在する」ということを認めて話を進めてきたが,

• Y. Komori, M. Noumi, J. Shiraishi “Kernel functions for difference operators of Ruijsenaars type and their applications” (SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications 5 (2009): 054)

においては, 楕円 Ruijsenaars 作用素の核関数と balancing condition が同時に導かれる様子が初等的に解説されている.

先の $C_{M,N}^{(r,k)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; p)$ の 2 通りの表示が等しいことを確かめる. ここだけの用語であるが,

$$\bullet \frac{\langle 0 | \phi_M^\dagger(\mathbf{x}; p) \text{ CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z) \bullet \eta(z_1) \cdots \eta(z_k) \tilde{\eta}(z_{k+1}) \cdots \tilde{\eta}(z_r) \bullet \right] \phi_N(\mathbf{y}; p) | 0 \rangle}{\Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p)}$$

を「 $\tilde{\eta}$ -表示」と呼び, 一方の

$$\bullet \frac{\langle 0 | \phi_M^\dagger(\mathbf{x}; p) \text{ CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z) \bullet \eta(z_1) \cdots \eta(z_k) \eta^\vee(z_{k+1}) \cdots \eta^\vee(z_r) \bullet \right] \phi_N(\mathbf{y}; p) | 0 \rangle}{\Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p)}$$

を「 $\eta^\vee$ -表示」と呼ぶことにする. 更にここだけの記号として

$$\bullet f_M^\dagger(z) := \prod_{i=1}^M \frac{\theta_p(t^{-1}x_i z)}{\theta_p(x_i z)}, \quad \bullet f_N(z) := \prod_{i=1}^N \frac{\theta_p(y_i/z)}{\theta_p(ty_i/z)}$$

とおく. まずは「 $\tilde{\eta}$ -表示」について見ると, これは

$$\bullet (\text{「}\tilde{\eta}\text{-表示」}) \\ = \oint_{\tilde{C}_1^{(k)}} \frac{dz_1}{2\pi i z_1} \cdots \oint_{\tilde{C}_r^{(k)}} \frac{dz_r}{2\pi i z_r} f_p^{(r)}(z) f_M^\dagger(z_1) \cdots f_M^\dagger(z_r) f_N(z_1) \cdots f_N(z_k) f_N(p^{-1}z_{k+1}) \cdots f_N(p^{-1}z_r)$$

となる. ここに出た積分路 $\tilde{C}_1^{(k)}, \dots, \tilde{C}_r^{(k)}$ は, 楕円モジュラス p が

$$\bullet |p| < \frac{\min\{|x_1|^{-1}, \dots, |x_M|^{-1}\}}{\max\{|x_1|^{-1}, \dots, |x_M|^{-1}\}} |t|, \quad \bullet |p| < \frac{\min\{|y_1|, \dots, |y_N|\}}{\max\{|y_1|, \dots, |y_N|\}} |t|, \quad \bullet |p| < |t|^2$$

を満たすという仮定の下で次のように選ばねばならない.

• 「 $\tilde{\eta}$ -表示」. 任意の $z_1 \in \tilde{C}_1^{(k)}, \dots, z_r \in \tilde{C}_r^{(k)}$ に対し次が成り立つ:

- $|p| < |x_i z_a| < |t| \quad (1 \leq i \leq M, 1 \leq a \leq r),$
- $|t|^{-1} |p| < |y_i/z_a| < 1 \quad (1 \leq i \leq N, 1 \leq a \leq k),$
- $|t|^{-1} < |y_i/z_a| < |p|^{-1} \quad (1 \leq i \leq N, k+1 \leq a \leq r),$
- $|q|^{-1} |p| < |z_b/z_a| < |t| \quad (1 \leq a < b \leq k \text{ または } 1 \leq a \leq k, k+1 \leq b \leq r),$
- $|q|^{-1} < |z_b/z_a| < |t| \cdot |p|^{-1} \quad (k+1 \leq a < b \leq r),$
- $|t|^{-1} |p| < |z_b/z_a| < |t| \quad (1 \leq a < b \leq k \text{ または } 1 \leq a \leq k, k+1 \leq b \leq r),$
- $|t| < |z_b/z_a| < |t|^{-1} \quad (k+1 \leq a < b \leq r).$

青色で書いた「 $|t| < |z_b/z_a| < |t|^{-1} \quad (k+1 \leq a < b \leq r)$ 」は OPE の収束のための条件としては現れないものである. これは三角極限 $p \rightarrow 0$ をとった際に「三角の場合」の結果が正しく再現されるために必要である.

一方の「 $\eta^\vee$ -表示」は

$$\bullet (\text{「}\eta^\vee\text{-表示」}) \\ = \oint_{C_1^{\vee(k)}} \frac{dz_1}{2\pi i z_1} \cdots \oint_{C_r^{\vee(k)}} \frac{dz_r}{2\pi i z_r} f_p^{(r)}(z) f_M^\dagger(z_1) \cdots f_M^\dagger(z_k) f_M^\dagger(pz_{k+1}) \cdots f_M^\dagger(pz_r) f_N(z_1) \cdots f_N(z_r).$$

である. 積分路 $C_1^{\vee(k)}, \dots, C_r^{\vee(k)}$ は, 楕円モジュラス p が

$$\bullet |p| < \frac{\min\{|x_1|^{-1}, \dots, |x_M|^{-1}\}}{\max\{|x_1|^{-1}, \dots, |x_M|^{-1}\}} |t|, \quad \bullet |p| < \frac{\min\{|y_1|, \dots, |y_N|\}}{\max\{|y_1|, \dots, |y_N|\}} |t|, \quad \bullet |p| < |t|^2$$

を満たすという仮定の下, 次の条件を満たすようにとる.

- 「 $\eta^\vee$ -表示」. 任意の $z_1 \in C_1^{\vee(k)}, \dots, z_r \in C_r^{\vee(k)}$ に対し次が成り立つ :

- $|p| < |x_i z_a| < |t| \quad (1 \leq i \leq M, 1 \leq a \leq k),$
- $1 < |x_i z_a| < |t| \cdot |p|^{-1} \quad (1 \leq i \leq M, k+1 \leq a \leq r),$
- $|t|^{-1} |p| < |y_i / z_a| < 1 \quad (1 \leq i \leq N, 1 \leq a \leq r),$
- $|q|^{-1} |p| < |z_b / z_a| < |t| \quad (1 \leq a < b \leq k),$
- $|q|^{-1} < |z_b / z_a| < |t| \cdot |p|^{-1} \quad (1 \leq a \leq k, k+1 \leq b \leq r \text{ または } k+1 \leq a < b \leq r),$
- $|t|^{-1} |p| < |z_b / z_a| < |t| \quad (1 \leq a < b \leq k),$
- $|t|^{-1} < |z_b / z_a| < |t| \cdot |p|^{-1} \quad (1 \leq a \leq k, k+1 \leq b \leq r),$
- $|t| < |z_b / z_a| < |t|^{-1} \quad (k+1 \leq a < b \leq r).$

よく見ると、「 $\tilde{\eta}$ -表示」の条件において $z_{k+1}, \dots, z_r$ を p 倍すると「 $\eta^\vee$ -表示」の条件になることがわかる. このことを理解しつつ

- (「 $\tilde{\eta}$ -表示」)

$$= \oint_{\tilde{C}_1^{(k)}} \frac{dz_1}{2\pi i z_1} \cdots \oint_{\tilde{C}_r^{(k)}} \frac{dz_r}{2\pi i z_r} f_p^{(r)}(z) f_M^\dagger(z_1) \cdots f_M^\dagger(z_r) f_N(z_1) \cdots f_N(z_k) f_N(p^{-1} z_{k+1}) \cdots f_N(p^{-1} z_r),$$

- (「 $\eta^\vee$ -表示」)

$$= \oint_{C_1^{\vee(k)}} \frac{dz_1}{2\pi i z_1} \cdots \oint_{C_r^{\vee(k)}} \frac{dz_r}{2\pi i z_r} f_p^{(r)}(z) f_M^\dagger(z_1) \cdots f_M^\dagger(z_k) f_M^\dagger(p z_{k+1}) \cdots f_M^\dagger(p z_r) f_N(z_1) \cdots f_N(z_r)$$

を見比べると、「 $\tilde{\eta}$ -表示」の積分において $z_{k+1}, \dots, z_r$ をみな p 倍すると「 $\eta^\vee$ -表示」が得られる. こうして、「 $\tilde{\eta}$ -表示」と「 $\eta^\vee$ -表示」は等しいことがわかる.

命題 4.1 (楕円 Ruijsenaars 作用素の核関数の満たす恒等式). M 個の x -変数 $x_1, \dots, x_M$, N 個の y -変数 $y_1, \dots, y_N$ 及び p の関数 $C_{M,N}^{(r,k)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; p)$ ($r \in \{0, 1, \dots, \min\{M, N\}\}$, $0 \leq k \leq r-1$) を次で定める :

$$\begin{aligned} \bullet C_{M,N}^{(r,k)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; p) &:= \frac{\langle 0 | \phi_M^\dagger(\mathbf{x}; p) \text{ CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z) \bullet \eta(z_1) \cdots \eta(z_k) \tilde{\eta}(z_{k+1}) \cdots \tilde{\eta}(z_r) \bullet \right] \phi_N(\mathbf{y}; p) | 0 \rangle}{\Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p)} \\ &= \frac{\langle 0 | \phi_M^\dagger(\mathbf{x}; p) \text{ CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z) \bullet \eta(z_1) \cdots \eta(z_k) \eta^\vee(z_{k+1}) \cdots \eta^\vee(z_r) \bullet \right] \phi_N(\mathbf{y}; p) | 0 \rangle}{\Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p)}. \end{aligned}$$

このとき, 楕円 Ruijsenaars 作用素の核関数 $\Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p)$ について次が成り立つ :

$$\begin{aligned} \bullet r! \left\{ \frac{t^{-M+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^r D_M^{(r)}(p)_{\mathbf{x}} \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) \\ - \sum_{k=0}^{r-1} (-t^{-M})^{r-k} \binom{r}{k} C_{M,N}^{(r,k)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; p) \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) \\ = r! \left\{ \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^r D_N^{(r)}(p)_{\mathbf{y}} \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) \\ - \sum_{k=0}^{r-1} (-t^{-N})^{r-k} \binom{r}{k} C_{M,N}^{(r,k)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; p) \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) \quad (r \in \{0, 1, \dots, \min\{M, N\}\}). \end{aligned}$$

1 階の楕円 Ruijsenaars 作用素の核関数の恒等式に現れた

$$\bullet C_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; p) = \oint_C \frac{dz}{2\pi iz} \prod_{i=1}^M \frac{\theta_p(t^{-1}x_i z)}{\theta_p(x_i z)} \prod_{j=1}^N \frac{\theta_p(z/y_j)}{\theta_p(t^{-1}z/y_j)}$$

とは $C_{M,N}^{(1,0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; p)$ のことである.

4.2 「三角の場合」には「お釣り」はない !!

先の楕円 Ruijsenaars 作用素の核関数の満たす恒等式を見た者は、誰しもおそらく

「お釣り $C_{M,N}^{(r,k)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; p)$ を含む項が、何だかうっとうしいなあ」

と感じると思う。「うっとうしい」とはあんまりかもしれないが、このように表現する理由の 1 つとして「三角の場合」には↑上のような面倒な「お釣り」は出ない、ということがある. 詳しい説明は第 5 章「三角の場合」にて行うが、次のことが知られている.

(1) $\eta^\Delta(z) := \eta(z; 0)$, $\phi^\Delta(z) := \phi(z; 0)$ なる表記を用い, $\phi_N^\Delta(\mathbf{x}) := \prod_{j=1}^N \phi^\Delta(x_j)$ と書く. r 変数の有理関数 $f_0^{(r)}(z_1, \dots, z_r)$ を

$$\bullet f_0^{(r)}(z_1, \dots, z_r) := \prod_{1 \leq a < b \leq r} \frac{(z_a - z_b)^2}{(z_a - tz_b)(z_a - t^{-1}z_b)}$$

とおくとき、これらと q -差分作用素

$$\bullet E_N^{(r)} := r! t^{-Nr} (t-1)^r \sum_{k=0}^r \frac{(-1)^{r-k}}{(t; t)_{r-k}} D_N^{(k)} \quad (r \in \{0, 1, \dots, N\})$$

について次が成り立つ: $r \in \{0, 1, \dots, N\}$ に対し

$$\bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_0^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet \eta^\Delta(z_1) \cdots \eta^\Delta(z_r) \bullet \right] \phi_N^\Delta(\mathbf{x})|0\rangle = E_N^{(r)} \phi_N^\Delta(\mathbf{x})|0\rangle.$$

(2) Macdonald 作用素の核関数

$$\bullet \Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} \frac{(tx_i y_j; q)_\infty}{(x_i y_j; q)_\infty}$$

と q -差分作用素 $E_N^{(r)}$ ($r \in \{0, 1, \dots, N\}$) について次が成り立つ:

$$\bullet E_{M,\mathbf{x}}^{(r)} \Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t) = E_{N,\mathbf{y}}^{(r)} \Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t) \quad (r \in \{0, 1, \dots, \min\{M, N\}\})$$

ということかということ、先に見た楕円 Ruijsenaars 作用素の核関数の満たすごちゃごちゃした恒等式の三角極限は

$$\bullet E_{M,\mathbf{x}}^{(r)} \Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t) = E_{N,\mathbf{y}}^{(r)} \Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t)$$

というかなりすっきりした格好をしているのである (わざわざ「お釣り」と呼ばねばならないものがない).

先に「三角の場合にはお釣りはない」と書いたが、これは「三角の場合にはお釣りの意味がわかる」とも言うことができる. 実際, 「楕円の場合」である核関数 $\Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p)$ の恒等式は

$$\begin{aligned} & \bullet \left[r! \left\{ \frac{t^{-M+1}\theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^r D_M^{(r)}(p)_{\mathbf{x}} - r! \left\{ \frac{t^{-N+1}\theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^r D_N^{(r)}(p)_{\mathbf{y}} \right] \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} \left\{ (-t^{-M})^{r-k} - (-t^{-N})^{r-k} \right\} \binom{r}{k} C_{M,N}^{(r,k)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; p) \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) \end{aligned}$$

とも書けるが, この三角極限としての核関数 $\Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t)$ の恒等式は

$$\begin{aligned} & \bullet r!(t-1)^r \left[t^{-Mr} D_{M,\mathbf{x}}^{(r)} - t^{-Nr} D_{N,\mathbf{y}}^{(r)} \right] \Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t) \\ &= r!(t-1)^r \left[-t^{-Mr} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(-1)^{r-k}}{(t; t)_{r-k}} D_{M,\mathbf{x}}^{(k)} + t^{-Nr} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(-1)^{r-k}}{(t; t)_{r-k}} D_{N,\mathbf{y}}^{(k)} \right] \Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t) \end{aligned}$$

である. ここに見えている

$$\bullet r!(t-1)^r \left[-t^{-Mr} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(-1)^{r-k}}{(t; t)_{r-k}} D_{M,\mathbf{x}}^{(k)} + t^{-Nr} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(-1)^{r-k}}{(t; t)_{r-k}} D_{N,\mathbf{y}}^{(k)} \right]$$

が「三角の場合のお釣り」である. このように, r 階の Macdonald 作用素が現れるような状況を見ている場合, 「三角の場合のお釣り」は低階 (0 階から $(r-1)$ 階) の Macdonald 作用素たちによって書かれる. これより, 「楕円の場合のお釣り」は, 「三角の場合のお釣り」の中の (低階の) Macdonald 作用素たちが「化けてしまったもの」だとも言えるであろう. こういったことがあるので, 「楕円の場合」の核関数の恒等式があのようにごちゃごちゃしていることには

「本当にこれで何かわかったことになるのか？」

といったような不満を感じる.

4.3 楕円 Calogero-Moser 系との比較

先に見たように, 楕円 Ruijsenaars 作用素の核関数 $\Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p)$ の恒等式に現れる「お釣り」 $C_{M,N}^{(r,k)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; p)$ は, 例の「balancing condition」 $M=N$ の下では消えてしまう. 一方, 楕円 Ruijsenaars 系の微分極限である「楕円 Calogero-Moser 系」では, このハミルトニアンと核関数の満たす恒等式の「お釣り」として, 楕円モジュラスの微分を含む項が現れる. このことから,

「楕円の場合」の核関数の恒等式に現れる「お釣り」= 楕円モジュラスの変形の効果を表す項

であると考えられる.

結果のみ述べると次のような具合である (詳しい計算については 6.4 「付録 4: 楕円 Calogero-Moser 系に関する計算」を参照). 第 1 章「Introduction」で少し触れたように, 楕円 Calogero-Moser 系のハミルトニアンとは, $\beta \in \mathbb{C}^\times$ を含み, Eisenstein 関数 $E_2(z) = -D_z^2 \log \theta_p(z)$ をポテンシャル関数として含む

$$\bullet H_N^{\text{CM}}(\beta, p) := \sum_{i=1}^N D_i^2 - \beta(\beta-1) \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} E_2(x_i/x_j)$$

なる格好の微分作用素のことであった.

(1) 楢円 Calogero-Moser ハミルトニアン $H_N^{\text{CM}}(\beta, p)$ と関数

$$\bullet \psi_N(\mathbf{x}; \beta, p) := \prod_{1 \leq i \neq j \leq N} \theta_p(x_i/x_j)^{\beta/2}$$

について次が成り立つ： $c_1(p) \in \mathbb{C}$ 及び $C_N(\beta, p) \in \mathbb{C}$ を

$$\bullet c_1(p) := -D_p \log(p; p)_\infty, \quad \bullet C_N(\beta, p) := \frac{1}{12} (N^3 - N) \beta^2 - 2N(N-1)c_1(p)\beta^2$$

とおくとき

$$\bullet H_N^{\text{CM}}(\beta, p) \psi_N(\mathbf{x}; \beta, p) = [2N\beta D_p + C_N(\beta, p)] \psi_N(\mathbf{x}; \beta, p).$$

(2) 楢円 Calogero-Moser ハミルトニアン $H_N^{\text{CM}}(\beta, p)$ と関数

$$\bullet f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p) := \prod_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} \theta_p(x_i y_j)^{-\beta} \times \psi_M(\mathbf{x}; \beta, p) \psi_N(\mathbf{y}; \beta, p)$$

について次が成り立つ：

$$\begin{aligned} & \bullet \left[H_M^{\text{CM}}(\beta, p)_{\mathbf{x}} - M\beta \sum_{i=1}^M D_{x_i} - 2M\beta D_p - C_M(\beta, p) \right] f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p) \\ &= \left[H_N^{\text{CM}}(\beta, p)_{\mathbf{y}} - N\beta \sum_{i=1}^N D_{y_i} - 2N\beta D_p - C_N(\beta, p) \right] f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p). \end{aligned}$$

核関数 $f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p)$ について

$$\bullet \sum_{i=1}^M D_{x_i} f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p) = \sum_{i=1}^N D_{y_i} f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p)$$

が成り立つことに注意すると、先に述べた核関数 $f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p)$ の恒等式は、 $M=N$ の場合には

$$\bullet H_N^{\text{CM}}(\beta, p)_{\mathbf{x}} f_{N,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p) = H_N^{\text{CM}}(\beta, p)_{\mathbf{y}} f_{N,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p)$$

となる。よって、楢円 Ruijsenaars 作用素の核関数の恒等式との対比で、この楢円 Calogero-Moser 系の場合も「balancing condition」は $M=N$ で、恒等式

$$\begin{aligned} & \bullet \left[H_M^{\text{CM}}(\beta, p)_{\mathbf{x}} - M\beta \sum_{i=1}^M D_{x_i} - 2M\beta D_p - C_M(\beta, p) \right] f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p) \\ &= \left[H_N^{\text{CM}}(\beta, p)_{\mathbf{y}} - N\beta \sum_{i=1}^N D_{y_i} - 2N\beta D_p - C_N(\beta, p) \right] f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p) \end{aligned}$$

の中に見える

$$\bullet -M\beta \sum_{i=1}^M D_{x_i} - 2M\beta D_p - C_M(\beta, p) \quad \text{及び} \quad -N\beta \sum_{i=1}^N D_{y_i} - 2N\beta D_p - C_N(\beta, p)$$

がこの場合の「お釣り」なのだと理解できる（本文書では「balancing condition」という言葉を厳格に定義していないために、「balancing condition とはお釣りが落ちるための条件である」という内容と「お釣りとは balancing condition

によって落ちるものである」ということを同時に述べた格好になっている．本来はよくないことかもしれないが、内容は伝わらと思うので、今回はこれで済ませる). この「お釣り」の中には $D_p = p \frac{\partial}{\partial p}$ という楕円モジュラスの無限小変形の効果を表す作用素が含まれることに注意する．

第 1 章の 1.1 「背景について」で少し触れたように、楕円 Ruijsenaars 系は楕円 Calogero-Moser 系の q -変形として導入されたのであった．Ruijsenaars が導入した

$$\bullet H_N^R(q, t, p) = \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \left\{ \frac{\theta_p(tx_i/x_j) \theta_p(qt^{-1}x_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j) \theta_p(qx_i/x_j)} \right\}^{1/2} T_{q, x_i}$$

の「 $\hbar$ -展開」によって楕円 Calogero-Moser ハミルトニアン $H_N^{\text{CM}}(\beta, p)$ が現れることを思い出すと、先に見た核関数 $f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p)$ の満たす恒等式の q -変形として、楕円 Ruijsenaars ハミルトニアン $H_N^R(q, t, p)$ とある核関数についての恒等式が存在するはずである．それは、既に見た

$$\begin{aligned} \bullet & \frac{t^{-M+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} D_M(p)_{\mathbf{x}} \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) + t^{-M} C_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; p) \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) \\ &= \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} D_N(p)_{\mathbf{y}} \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) + t^{-N} C_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; p) \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) \end{aligned}$$

の両辺に、関数

$$\bullet \Psi_M(\mathbf{x}; q, t, p) = \prod_{1 \leq i \neq j \leq M} \left\{ \frac{\Gamma_{q,p}(tx_i/x_j)}{\Gamma_{q,p}(x_i/x_j)} \right\}^{1/2}$$

と $\Psi_N(\mathbf{y}; q, t, p)$ をかけることで次のようにして得られる：1 階の楕円 Ruijsenaars 作用素 $D_N(p)$ と $H_N^R(q, t, p)$ が

$$\bullet H_N^R(q, t, p) \circ \Psi_N(\mathbf{x}; q, t, p) = t^{-\frac{N+1}{2}} \Psi_N(\mathbf{x}; q, t, p) \circ D_N(p)$$

として関係していたことに注意し、核関数 $F_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p)$ を

$$\bullet F_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) := \Pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) \Psi_M(\mathbf{x}; q, t, p) \Psi_N(\mathbf{y}; q, t, p)$$

と定めると

$$\begin{aligned} \bullet & \left[t^{\frac{M-1}{2}} \frac{t^{-M+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} H_M^R(q, t, p)_{\mathbf{x}} + t^{-M} C_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; p) \right] F_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p) \\ &= \left[t^{\frac{N-1}{2}} \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} H_N^R(q, t, p)_{\mathbf{y}} + t^{-N} C_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; p) \right] F_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t, p). \end{aligned}$$

これが、楕円 Calogero-Moser ハミルトニアン $H_N^{\text{CM}}(\beta, p)$ の核関数 $f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p)$ の満たす

$$\begin{aligned} \bullet & \left[H_M^{\text{CM}}(\beta, p)_{\mathbf{x}} - M\beta \sum_{i=1}^M D_{x_i} - 2M\beta D_p - C_M(\beta, p) \right] f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p) \\ &= \left[H_N^{\text{CM}}(\beta, p)_{\mathbf{y}} - N\beta \sum_{i=1}^N D_{y_i} - 2N\beta D_p - C_N(\beta, p) \right] f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p) \end{aligned}$$

の「 q -変形」である．

先に「楕円 Ruijsenaars 作用素の核関数の恒等式に現れるお釣り $C_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; p)$ が何らかの楕円モジュラスの変形を表すものであることが期待される」と述べたのは、以上のような理由による．ただ、そうすると今度は

楕円 Ruijsenaars 系における楕円モジュラスの変形とは何か？

ということが問題になる．2026 年 7 月現在，筆者はこの問題についてはほとんど何もわかっておらず，長らく足止めを食らっているような状況である．

楕円 Calogero-Moser 系のハミルトニアンの核関数の恒等式に p -微分 $D_p = p \frac{\partial}{\partial p}$ が現れることが明確にわかるのは，テータ関数 $\theta_p(z)$ がいわゆる「熱方程式」を満たすからである．楕円 Ruijsenaars 作用素の核関数は楕円ガンマ関数 $\Gamma_{q,p}(z)$ によって書かれるので，「楕円 Ruijsenaars 系における楕円モジュラスの変形」は，楕円ガンマ関数 $\Gamma_{q,p}(z)$ の楕円モジュラス p を「何らかのやり方」で動かすときに「何か」が成り立っていて，それによって理解可能なものかもしれない．残念ながら，その「何か」が何なのか，そもそもそういったものが存在するかどうかともわかっていない．楕円ガンマ関数の楕円モジュラスの変化をうまく記述し，かつ，楕円 Ruijsenaars 系における楕円モジュラスの変形ともうまく調和するような「熱方程式の q -変形」のようなものが存在してくれていれば，話は進むのであろうが……

三角の場合

楯円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示において楯円モジュラスを (適当に) 0 にすることで, 「Macdonald 作用素の自由場表示」として既に知られている結果が再現される.

5.1 準備 1 : 何が成り立つのか

「(高階の) Macdonald 作用素の自由場表示」が可能であるとすれば, それはこういったもので, その結果としてどういう格好の q -差分作用素が現れるのであろう? それは「Macdonald 作用素の核関数の満たす恒等式」を見ればわかる. N 変数の r 階の Macdonald 作用素とは

$$\bullet D_N^{(r)} = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ \#I=r}} A_I^{(r)}(\mathbf{x}) \prod_{i \in I} T_{q, x_i}, \quad \bullet A_I^{(r)}(\mathbf{x}) = t^{\frac{r(r-1)}{2}} \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j}$$

のことであったが, これと核関数

$$\bullet \Pi_{M,N}^{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} \frac{(tx_i y_j; q)_{\infty}}{(x_i y_j; q)_{\infty}}$$

について「 x -変数と y -変数の個数が等しい場合」に次が成り立つ: $r \in \{0, 1, \dots, N\}$ について

$$\bullet D_{N,\mathbf{x}}^{(r)} \Pi_{N,N}^{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t) = D_{N,\mathbf{y}}^{(r)} \Pi_{N,N}^{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t).$$

我々が真に欲しいのは, 例えば「 x -変数は M 個, y -変数は N 個」といったような, より一般の場合の恒等式である. これは「Macdonald 作用素の母関数」と呼ばれる

$$\bullet G_N(u) = \sum_{k=0}^N (-u)^k D_N^{(k)}$$

を使えば簡単にわかる. これを使うと

$$\bullet G_N(u)_{\mathbf{x}} \Pi_{N,N}^{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t) = G_N(u)_{\mathbf{y}} \Pi_{N,N}^{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t)$$

であるが, ここで「Macdonald 作用素の変数の個数を減らす」ことを考える. それは次のようにして素朴にやればよい. ここで $x_N = 0$ とすることを考えつつ

$$\bullet D_N^{(r)} = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ \#I=r, N \notin I}} A_I^{(r)}(\mathbf{x}) \prod_{i \in I} T_{q, x_i} + \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ \#I=r, N \in I}} A_I^{(r)}(\mathbf{x}) \prod_{i \in I} T_{q, x_i}$$

と見る. このように分けるときに, $I \subset \{1, \dots, N\}$ が N を含むのかどうかに応じて

$$\bullet A_I^{(r)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} t^{\frac{r(r-1)}{2}} \prod_{\substack{i \in I \setminus \{N\} \\ j \notin I}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \prod_{j' \notin I} \frac{tx_N - x_{j'}}{x_N - x_{j'}} & (N \in I), \\ t^{\frac{r(r-1)}{2}} \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I, j \neq N}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \prod_{i' \in I} \frac{tx_{i'} - x_N}{x_{i'} - x_N} & (N \notin I) \end{cases}$$

であるので次が成り立つ：

$$\begin{aligned}
 \bullet D_N^{(r)} \Big|_{x_N=0} &= \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N-1, N\} \\ \#I=r, N \notin I}} t^{\frac{r(r-1)}{2}} t^r \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I, j \neq N}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \prod_{i' \in I} T_{q, x_{i'}} \\
 &+ \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N-1, N\} \\ \#I=r, N \in I}} t^{\frac{r(r-1)}{2}} \prod_{\substack{i \in I \setminus \{N\} \\ j \notin I}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \prod_{i' \in I \setminus \{N\}} T_{q, x_{i'}} \\
 &= t^r D_{N-1}^{(r)} + t^{r-1} D_{N-1}^{(r-1)}.
 \end{aligned}$$

これによって、 N 変数の Macdonald 作用素の母関数 $G_N(u)$ において $x_N=0$ とするときに

$$\begin{aligned}
 \bullet G_N(u) \Big|_{x_N=0} &= 1 + \sum_{k=1}^N (-u)^k D_N^{(k)} \Big|_{x_N=0} = 1 + \sum_{k=1}^N (-u)^k (t^k D_{N-1}^{(k)} + t^{k-1} D_{N-1}^{(k-1)}) \\
 &= G_{N-1}(ut) - u \sum_{k=1}^N (-ut)^{k-1} D_{N-1}^{(k-1)} = (1-u) G_{N-1}(ut)
 \end{aligned}$$

がわかる。これを繰り返し使えば、 $M, N \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $M < N$ なるものについて

$$\bullet G_N(u) \Big|_{x_N=0, x_{N-1}=0, \dots, x_{M+1}=0} = (u; t)_{N-M} G_M(ut^{N-M}) = \frac{(u; t)_{\infty}}{(t^{N-M}u; t)_{\infty}} G_M(ut^{N-M})$$

を得る。これによって、「 x -変数が M 個、 y -変数が N 個」の場合の Macdonald 作用素の核関数の恒等式が得られる。引き続き $M < N$ とすると、上に述べたことから

$$\bullet G_N(u) {}_{\mathbf{x}}\Pi_{N,N}^{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t) = G_N(u) {}_{\mathbf{y}}\Pi_{N,N}^{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t)$$

において $x_N=0, x_{N-1}=0, \dots, x_{M+1}=0$ とすることで次を得る：

$$\bullet \frac{(u; t)_{\infty}}{(t^{N-M}u; t)_{\infty}} G_M(ut^{N-M}) {}_{\mathbf{x}}\Pi_{M,N}^{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t) = G_N(u) {}_{\mathbf{y}}\Pi_{M,N}^{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t).$$

ここで $u \mapsto ut^{-N}$ として、 M 個の x -変数と N 個の y -変数の釣り合いをとると

$$\bullet \frac{1}{(t^{-M}u; t)_{\infty}} G_M(ut^{-M}) {}_{\mathbf{x}}\Pi_{M,N}^{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t) = \frac{1}{(t^{-N}u; t)_{\infty}} G_N(ut^{-N}) {}_{\mathbf{y}}\Pi_{M,N}^{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t)$$

となる（この時点で M, N の大小についての仮定が外れる）。これが目的のものである。また、いわゆる「Euler の公式」と呼ばれる

$$\bullet \frac{1}{(z; q)_{\infty}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(q; q)_k} \quad (|z| < 1)$$

から、上の恒等式の中には

$$\begin{aligned}
 \bullet \frac{1}{(t^{-M}u; t)_{\infty}} G_M(ut^{-M}) {}_{\mathbf{x}} &= \sum_{a=0}^{\infty} \frac{(ut^{-M})^a}{(t; t)_a} \sum_{b=0}^M (-ut^{-M})^b D_{M,\mathbf{x}}^{(b)} \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} (-u)^r t^{-Mr} \sum_{k=0}^r \frac{(-1)^{r-k}}{(t; t)_{r-k}} D_{M,\mathbf{x}}^{(k)}
 \end{aligned}$$

なる q -差分作用素が見えている。よって、Macdonald 作用素の核関数の満たす恒等式は次のようにも書ける： $r \in \{0, 1, \dots, \min\{M, N\}\}$ について

$$\bullet t^{-Mr} \sum_{k=0}^r \frac{(-1)^{r-k}}{(t; t)_{r-k}} D_{M, \mathbf{x}}^{(k)} \Pi_{M, N}^{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t) = t^{-Nr} \sum_{k=0}^r \frac{(-1)^{r-k}}{(t; t)_{r-k}} D_{N, \mathbf{y}}^{(k)} \Pi_{M, N}^{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t).$$

以上のことから, Macdonald 作用素の自由場表示によって現れるのは, この核関数の恒等式に見えている q -差分作用素であろうということが予想できる. 実際には

$$\bullet E_N^{(r)} := r! t^{-Nr} (t-1)^r \sum_{k=0}^r \frac{(-1)^{r-k}}{(t; t)_{r-k}} D_N^{(k)} \quad (r \in \{0, 1, \dots, N\})$$

が自由場表示を通じて現れることを後に見る.

q -差分作用素 $E_N^{(r)}$ ($r \in \{0, 1, \dots, N\}$) について, 次の命題が重要な働きをする.

命題 5.1. (1) 任意の $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$\bullet \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(q; q)_k (q; q)_{N-k}} q^{(-N+1)k} = \delta_{N,0}.$$

(2) q -差分作用素 $E_N^{(r)}$ ($r \in \{0, 1, \dots, N\}$) を

$$\bullet E_N^{(r)} := r! t^{-Nr} (t-1)^r \sum_{k=0}^r \frac{(-1)^{r-k}}{(t; t)_{r-k}} D_N^{(k)}$$

と定めるとき, これについて次が成り立つ:

$$\bullet r! \sum_{k=0}^r \frac{(-t^{-N})^{r-k} t^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}}}{k! [r-k]_t!} E_N^{(k)} = r! t^{-Nr} (t-1)^r D_N^{(r)}.$$

証明. (1) いわゆる「 q -2 項定理」と呼ばれる

$$\bullet \frac{(az; q)_{\infty}}{(z; q)_{\infty}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a; q)_k}{(q; q)_k} z^k \quad (|z| < 1)$$

を, 「Euler の公式」として知られる

$$\bullet (z; q)_{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(q; q)_k} z^k, \quad \bullet \frac{1}{(z; q)_{\infty}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(q; q)_k} \quad (|z| < 1)$$

によって書き換えると次のようになる:

$$\bullet \frac{(az; q)_{\infty}}{(z; q)_{\infty}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m q^{\frac{m(m-1)}{2}}}{(q; q)_m} (az)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q; q)_n} = \sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(q; q)_k (q; q)_{N-k}} a^k \quad (|z| < 1).$$

これらのことによって

$$\bullet \frac{(a; q)_N}{(q; q)_N} = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(q; q)_k (q; q)_{N-k}} a^k \quad (N \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

がわかる. 特に $a=q^{-N+1}$ の場合には $(q^{-N+1}; q)_N = \delta_{N,0}$ なので次を得る :

$$\bullet \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(q; q)_k (q; q)_{N-k}} q^{(-N+1)k} = \delta_{N,0} \quad (N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

(2) まず $[n]_t! = \frac{(t; t)_n}{(1-t)^n}$ に注意すると

$$\begin{aligned} & \bullet r! \sum_{k=0}^r \frac{(-t^{-N})^{r-k} t^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}}}{k! [r-k]_t!} E_N^{(k)} \\ &= r! \sum_{k=0}^r \frac{(-t^{-N})^{r-k} t^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}}}{k! [r-k]_t!} \times k! t^{-Nk} (t-1)^k \sum_{a=0}^k \frac{(-1)^{k-a}}{(t; t)_{k-a}} D_N^{(a)} \\ &= r! t^{-Nr} \sum_{k=0}^r \sum_{a=0}^k \frac{(-1)^{r-a} (t-1)^k t^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}}}{[r-k]_t! (t; t)_{k-a}} D_N^{(a)} \\ &= r! t^{-Nr} \sum_{k=0}^r \sum_{a=0}^k (-1)^{r-a} (t-1)^k (1-t)^{r-k} \frac{t^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}}}{(t; t)_{r-k} (t; t)_{k-a}} D_N^{(a)} \\ &= r! t^{-Nr} (t-1)^r \sum_{k=0}^r \sum_{a=0}^k \frac{(-1)^{k-a} t^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}}}{(t; t)_{r-k} (t; t)_{k-a}} D_N^{(a)}. \end{aligned}$$

ここで和の順序を交換すると

$$\begin{aligned} & \bullet r! \sum_{k=0}^r \frac{(-t^{-N})^{r-k} t^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}}}{k! [r-k]_t!} E_N^{(k)} \\ &= r! t^{-Nr} (t-1)^r \sum_{a=0}^r \sum_{k=a}^r \frac{(-1)^{k-a} t^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}}}{(t; t)_{r-k} (t; t)_{k-a}} D_N^{(a)} \\ &= r! t^{-Nr} (t-1)^r \sum_{a=0}^r D_N^{(a)} \sum_{k=a}^r \frac{(-1)^{k-a} t^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}}}{(t; t)_{r-k} (t; t)_{k-a}} \end{aligned}$$

となる. ここに見えている k についての和において $\ell = k-a$ として和を書き換えると

$$\bullet \sum_{k=a}^r \frac{(-1)^{k-a} t^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}}}{(t; t)_{r-k} (t; t)_{k-a}} \stackrel{\ell=k-a}{=} \sum_{\ell=0}^{r-a} \frac{(-1)^{\ell} t^{\frac{(r-\ell-a)(r-\ell-a-1)}{2}}}{(t; t)_{\ell} (t; t)_{r-a-\ell}}$$

であるが, この和の各項の分子にある t のべきを

$$\begin{aligned} \bullet (r-\ell-a)(r-\ell-a-1) &= (\ell-r+a)(\ell-r+a+1) \\ &= \ell^2 + (-2r+2a+1)\ell + (-r+a)(-r+a+1) \\ &= \ell(\ell-1) + (-2r+2a+2)\ell + (-r+a)(-r+a+1) \end{aligned}$$

と書き換えることで次を得る :

$$\bullet \sum_{k=a}^r \frac{(-1)^{k-a} t^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}}}{(t; t)_{r-k} (t; t)_{k-a}} = t^{\frac{(-r+a)(-r+a+1)}{2}} \sum_{\ell=0}^{r-a} \frac{(-1)^{\ell} t^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}}}{(t; t)_{\ell} (t; t)_{r-a-\ell}} t^{(-r+a+1)\ell}.$$

ここで (1) において見たように

$$\bullet \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(q; q)_k (q; q)_{N-k}} q^{(-N+1)k} = \delta_{N,0} \quad (N \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

が成り立つことを使うと

$$\bullet \sum_{k=a}^r \frac{(-1)^{k-a} t^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}}}{(t; t)_{r-k} (t; t)_{k-a}} = t^{\frac{(-r+a)(-r+a+1)}{2}} \delta_{r-a,0} = \delta_{r-a,0}$$

なので, 最終的に次を得る :

$$\begin{aligned} & \bullet r! \sum_{k=0}^r \frac{(-t^{-N})^{r-k} t^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}}}{k! [r-k]_t!} E_N^{(k)} \\ &= r! t^{-Nr} (t-1)^r \sum_{a=0}^r D_N^{(a)} \underbrace{\sum_{k=a}^r \frac{(-1)^{k-a} t^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}}}{(t; t)_{r-k} (t; t)_{k-a}}}_{\delta_{r-a,0}} = r! t^{-Nr} (t-1)^r D_N^{(r)}. \quad \square \end{aligned}$$

5.2 準備 2 : ある積分

$\eta(z; p)$, $\phi(z; p)$ において $p=0$ としたものをそれぞれ $\eta^\Delta(z)$, $\phi^\Delta(z)$ と書く :

$$\bullet \eta^\Delta(z) = \exp \left(- \sum_{n \neq 0} (1-t^n) a_{n,0} \frac{z^{-n}}{n} \right), \quad \bullet \phi^\Delta(z) = \exp \left(\sum_{n > 0} \frac{1-t^n}{1-q^n} a_{-n,0} \frac{z^n}{n} \right).$$

こうするとき, 楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示において $p=0$ とできれば, それは自然に Macdonald 作用素の自由場表示になっているはずである. そういうつもりで

$$\begin{aligned} & \bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z) \bullet \eta(z_1) \cdots \eta(z_r) \bullet \right] \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\ &= r! \left\{ \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^r D_N^{(r)}(p) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\ & \quad - \sum_{k=0}^{r-1} (-t^{-N})^{r-k} \binom{r}{k} \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z) \bullet \eta(z_1) \cdots \eta(z_k) \tilde{\eta}(z_{k+1}) \cdots \tilde{\eta}(z_r) \bullet \right] \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \end{aligned}$$

を見ると (スペースの節約のために $f_p^{(r)}(z) = f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)$ も使う), $\tilde{\eta}(z) = \eta_-(z) \eta_+(p^{-1}z)$ であったので, 直ちに $p=0$ とすることはできない. ただ,

$$\begin{aligned} & \bullet \tilde{\eta}(z) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \\ &= \left[\prod_{i=1}^N \frac{\theta_p(z/x_i)}{\theta_p(t^{-1}z/x_i)} \right]_{|t|^{-1} < |x_i/z| < |p|^{-1} \atop (1 \leq i \leq N)} \eta_-(z) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \quad \left(|p| < \frac{\min\{|x_1|, \dots, |x_N|\}}{\max\{|x_1|, \dots, |x_N|\}} |t| \right) \end{aligned}$$

であることは既に知っている. ここでなら $p \rightarrow 0$ とできる. その結果は

$$\bullet \tilde{\eta}(z) \phi_N(\mathbf{x}; p) |0\rangle \xrightarrow{p \rightarrow 0} \left[\prod_{i=1}^N \frac{1-(z/x_i)}{1-t^{-1}(z/x_i)} \right]_{|t^{-1}z/x_i| < 1 \atop (1 \leq i \leq N)} \eta_-^\Delta(z) \phi_N^\Delta(\mathbf{x}) |0\rangle$$

である. ここで

$$\begin{aligned} & \bullet \widetilde{g}^\Delta(z) := \left[\prod_{i=1}^N \frac{1-(z/x_i)}{1-t^{-1}(z/x_i)} \right]_{|t^{-1}z/x_i| < 1 \atop (1 \leq i \leq N)} = 1 + (z \text{ の } 1 \text{ 乗以上の項}), \\ & \bullet \eta_-^\Delta(z) = 1 + (z \text{ の } 1 \text{ 乗以上の項}) \end{aligned}$$

であることから, 例えば

$$\bullet \text{CT}_{\tilde{z}}[\tilde{\eta}(z)]\phi_N(\mathbf{x};p)|0\rangle \xrightarrow{p \rightarrow 0} \text{CT}_{\tilde{z}}\left[\widetilde{g^{\Delta}}(z)\eta_{-}^{\Delta}(z)\right]\phi_N^{\Delta}(\mathbf{x})|0\rangle = \phi_N^{\Delta}(\mathbf{x})|0\rangle$$

である. こうして, 1 階の楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示から, $E_N^{(1)} = t^{-N} \{(t-1)D_N^{(1)} + 1\}$ の自由場表示である

$$\bullet \text{CT}_{\tilde{z}}[\eta^{\Delta}(z)]\phi_N^{\Delta}(\mathbf{x})|0\rangle = E_N^{(1)}\phi_N^{\Delta}(\mathbf{x})|0\rangle$$

が得られることはわかる. 高階の Macdonald 作用素の自由場表示を得ようとする際には, これから解説するようなちょっと面倒なことがある.

こうして, 次が成り立てば, 楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示において $p \rightarrow 0$ とするとき, Macdonald 作用素の自由場表示が自然に得られることがわかる:

$$\bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z) \bullet \eta(z_1) \cdots \eta(z_k) \tilde{\eta}(z_{k+1}) \cdots \tilde{\eta}(z_r) \bullet \right] \phi_N(\mathbf{x}; p) | 0 \rangle \\ \xrightarrow{p \rightarrow 0} \frac{(r-k)!}{[r-k]_t!} t^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}} \text{CT}_{z_1, \dots, z_k} \left[f_0^{(k)}(z) \bullet \eta^{\Delta}(z_1) \cdots \eta^{\Delta}(z_k) \bullet \right] \phi_N^{\Delta}(\mathbf{x}) | 0 \rangle.$$

実際, ↑これが正しいとすると, 楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示において $p \rightarrow 0$ とすることで

$$\bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_0^{(r)}(z) \bullet \eta^{\Delta}(z_1) \cdots \eta^{\Delta}(z_r) \bullet \right] \phi_N^{\Delta}(\mathbf{x}) | 0 \rangle \\ = r! t^{-Nr} (t-1)^r D_N^{(r)} \phi_N^{\Delta}(\mathbf{x}) | 0 \rangle \\ - \sum_{k=0}^{r-1} \left(-t^{-N} \right)^{r-k} \binom{r}{k} \frac{(r-k)!}{[r-k]_t!} t^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}} \text{CT}_{z_1, \dots, z_k} \left[f_0^{(k)}(z) \bullet \eta^{\Delta}(z_1) \cdots \eta^{\Delta}(z_k) \bullet \right] \phi_N^{\Delta}(\mathbf{x}) | 0 \rangle$$

を得るが, これは単に

$$\bullet r! \sum_{k=0}^r \frac{(-t^{-N})^{r-k} t^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}}}{k! [r-k]_t!} \text{CT}_{z_1, \dots, z_k} \left[f_0^{(k)}(z) \bullet \eta^{\Delta}(z_1) \cdots \eta^{\Delta}(z_k) \bullet \right] \phi_N^{\Delta}(\mathbf{x}) | 0 \rangle \\ = r! t^{-Nr} (t-1)^r D_N^{(r)} \phi_N^{\Delta}(\mathbf{x}) | 0 \rangle$$

とも書ける. これは, 先に見た $E_N^{(r)}$ ($r \in \{0, 1, \dots, N\}$) の満たす

$$\bullet r! \sum_{k=0}^r \frac{(-t^{-N})^{r-k} t^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}}}{k! [r-k]_t!} E_N^{(k)} = r! t^{-Nr} (t-1)^r D_N^{(r)}$$

なる関係と同じ格好をしている. よって, ↑上に述べたことが正しいのであれば

$$\bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_0^{(r)}(z) \bullet \eta^{\Delta}(z_1) \cdots \eta^{\Delta}(z_r) \bullet \right] \phi_N^{\Delta}(\mathbf{x}) | 0 \rangle = E_N^{(r)} \phi_N^{\Delta}(\mathbf{x}) | 0 \rangle \quad (r \in \{0, 1, \dots, N\})$$

が成り立つはずである.

上の内容を示すのがこの先の目的である. 先に定めた $\widetilde{g^{\Delta}}(z)$ を使うと

$$\bullet \lim_{p \rightarrow 0} \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_p^{(r)}(z) \bullet \eta(z_1) \cdots \eta(z_k) \tilde{\eta}(z_{k+1}) \cdots \tilde{\eta}(z_r) \bullet \right] \phi_N(\mathbf{x}; p) | 0 \rangle \\ = \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_0^{(r)}(z) \prod_{j=k+1}^r \widetilde{g^{\Delta}}(z_j) \eta_{-}^{\Delta}(z_j) \bullet \eta^{\Delta}(z_1) \cdots \eta^{\Delta}(z_k) \bullet \right] \phi_N^{\Delta}(\mathbf{x}) | 0 \rangle$$

である. $z_{k+1}, \dots, z_r$ のみを含む部分を分離することを考えると,

$$\bullet f_0(z) := \frac{(1-z)^2}{(1-tz)(1-t^{-1}z)}$$

とにおいて $f_0^{(r)}(z_1, \dots, z_r) = \prod_{1 \leq a < b \leq r} f_0(z_b/z_a)$ と書くとき

$$\begin{aligned} \bullet f_0^{(r)}(z_1, \dots, z_{r-1}, z_r) &= f_0^{(r-1)}(z_1, \dots, z_{r-2}, z_{r-1}) \prod_{a=1}^{r-1} f_0\left(\frac{z_r}{z_a}\right) \\ &= f_0^{(r-2)}(z_1, \dots, z_{r-3}, z_{r-2}) \prod_{a'=1}^{r-2} f_0\left(\frac{z_{r-1}}{z_{a'}}\right) \prod_{a=1}^{r-1} f_0\left(\frac{z_r}{z_a}\right) \\ &= \dots = f_0^{(k)}(z_1, \dots, z_k) \prod_{i=k+1}^r \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0\left(\frac{z_i}{z_{a_i}}\right) \end{aligned}$$

であることから, 次のようにできる:

$$\begin{aligned} \bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_0^{(r)}(z) \prod_{j=k+1}^r \widetilde{g}^\Delta(z_j) \eta_-^\Delta(z_j) \bullet \eta^\Delta(z_1) \dots \eta^\Delta(z_k) \bullet \right] \\ = \text{CT}_{z_1, \dots, z_k} \left[\text{CT}_{z_{k+1}, \dots, z_r} \left[\prod_{i=k+1}^r \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0\left(\frac{z_i}{z_{a_i}}\right) \prod_{j=k+1}^r \widetilde{g}^\Delta(z_j) \eta_-^\Delta(z_j) \right] f_0^{(k)}(z) \bullet \eta^\Delta(z_1) \dots \eta^\Delta(z_k) \bullet \right]. \end{aligned}$$

この $\text{CT}_{z_{k+1}, \dots, z_r} [\dots]$ の中にあるもののうち

$$\bullet \prod_{j=k+1}^r \widetilde{g}^\Delta(z_j) \eta_-^\Delta(z_j)$$

は $z_{k+1}, \dots, z_r$ についての積分で 1 になる因子しか生じさせないので, 結局, 示すべきは次のことであると言える.

命題 5.2.

$$\bullet \text{CT}_{z_{k+1}, \dots, z_r} \left[\prod_{i=k+1}^r \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0\left(\frac{z_i}{z_{a_i}}\right) \right] = \frac{(r-k)!}{[r-k]_t!} t^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}}.$$

ただし, 積分は $z_r, z_{r-1}, z_{r-2}, \dots, z_{k+1}$ という順に行う. このとき, $z_r=0$ 及び $z_r=tz_j$ ($k+1 \leq j \leq r-1$) からの寄与を拾い, 次に $z_{r-1}=0$ 及び $z_{r-1}=tz_j$ ($k+1 \leq j \leq r-2$) からの寄与を拾い, 更に $z_{r-2}=0$ 及び $z_{r-2}=tz_j$ ($k+1 \leq j \leq r-3$) からの寄与を拾い $\dots$ という風に計算するものとする (条件 $|t| < |z_b/z_a| < |t|^{-1}$ ($k+1 \leq a < b \leq r$) を満たすように積分路をとるということ. 2.4「補足: 正規順序積の脱着」にて見た例の「OPE の収束のための条件としては現れないもの」である).

実は, 示すべき命題はもう少し簡単にできる. 上では積分変数 $z_{k+1}, \dots, z_r$ の k が 0 でない場合も考えているが, 少し工夫すると $k=0$ の場合に帰着できる. 実際,

$$\bullet \prod_{i=k+1}^r \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0\left(\frac{z_i}{z_{a_i}}\right) = \prod_{i=k+1}^r \prod_{a_i=1}^k f_0\left(\frac{z_i}{z_{a_i}}\right) \times \prod_{j=k+1}^r \prod_{a_j=k+1}^{j-1} f_0\left(\frac{z_j}{z_{a_j}}\right)$$

と書けるが、このうち

$$\bullet \prod_{i=k+1}^r \prod_{a_i=1}^k f_0\left(\frac{z_i}{z_{a_i}}\right)$$

は $z_{k+1}, \dots, z_r$ についての例の積分によって 1 を生じさせる因子に過ぎないから (「最終的には 1 を生じさせる因子にしかならないから」という意味)

$$\bullet \text{CT}_{z_{k+1}, \dots, z_r} \left[\prod_{i=k+1}^r \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0\left(\frac{z_i}{z_{a_i}}\right) \right] = \text{CT}_{z_{k+1}, \dots, z_r} \left[\prod_{j=k+1}^r \prod_{a_j=k+1}^{j-1} f_0\left(\frac{z_j}{z_{a_j}}\right) \right]$$

が成り立つ。ここで $z_{k+1} \rightarrow z_1, z_{k+2} \rightarrow z_2, \dots, z_r \rightarrow z_{r-k}$ と変数の番号のつけ換えを行うと

$$\bullet \text{CT}_{z_{k+1}, \dots, z_r} \left[\prod_{i=k+1}^r \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0\left(\frac{z_i}{z_{a_i}}\right) \right] = \text{CT}_{z_1, \dots, z_{r-k}} \left[\prod_{j=1}^{r-k} \prod_{a_j=1}^{j-1} f_0\left(\frac{z_j}{z_{a_j}}\right) \right]$$

となる。これは、考えるべき積分が $k=0$ の場合に帰着されたことを意味する。

例 5.3. 以下、問題の積分を次のように書く：

$$\bullet ((r)) := \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[\prod_{i=1}^r \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0\left(\frac{z_i}{z_{a_i}}\right) \right] \quad (r \in \mathbb{Z}_{>0}) \quad \left(f_0(z) = \frac{(1-z)^2}{(1-tz)(1-t^{-1}z)} \right).$$

ここで $((0)) := 1$ と理解する。 $((1)) = \text{CT}_{z_1} \left[\prod_{i=1}^1 \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0\left(\frac{z_i}{z_{a_i}}\right) \right] = \text{CT}_{z_1} [1] = 1$ も明らかである。

最初の非自明な例は

$$\bullet ((2)) = \text{CT}_{z_1, z_2} \left[\prod_{i=1}^2 \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0\left(\frac{z_i}{z_{a_i}}\right) \right] = \text{CT}_{z_1, z_2} \left[f_0\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \right]$$

である。 z_2 から積分することになると、積分路は $|tz_1| < |z_2| < |t^{-1}z_1|$ を満たすようにとり、 $z_2=0$ 及び $z_2=tz_1$ からの寄与を拾う。そうすると $(f_0(z_2/z_1) = \frac{(z_2-z_1)^2}{(z_2-tz_1)(z_2-t^{-1}z_1)})$ に注意

$$\bullet ((2)) = \text{CT}_{z_1, z_2} \left[f_0\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \right] = \text{CT}_{z_1} \left[1 + \frac{(tz_1-z_1)^2}{tz_1(tz_1-t^{-1}z_1)} \right] = ((1)) - \frac{(1-t)^2}{1-t^2} ((0)) = \frac{2t}{[2]_t}$$

である。以下、ここに見えている $-\frac{(1-t)^2}{1-t^2}$ が頻出する。

例 5.4. 次は $((3))$ を見てみる。これは

$$\bullet ((3)) = \text{CT}_{z_1, z_2, z_3} \left[\prod_{i=1}^3 \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0\left(\frac{z_i}{z_{a_i}}\right) \right] = \text{CT}_{z_1, z_2, z_3} \left[f_0\left(\frac{z_2}{z_1}\right) f_0\left(\frac{z_3}{z_1}\right) f_0\left(\frac{z_3}{z_2}\right) \right]$$

である。 z_3 から積分することになると、積分路は $|tz_1| < |z_3| < |t^{-1}z_1|$ 及び $|tz_2| < |z_3| < |t^{-1}z_2|$ を満たすようにとる。その際、 $z_3=0$ 及び $z_3=tz_1, tz_2$ からの寄与を拾う。そうすると、まずは次を得る：

$$\begin{aligned} \bullet ((3)) &= \text{CT}_{z_1, z_2, z_3} \left[f_0\left(\frac{z_2}{z_1}\right) f_0\left(\frac{z_3}{z_1}\right) f_0\left(\frac{z_3}{z_2}\right) \right] \\ &= \text{CT}_{z_1, z_2} \left[f_0\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \left\{ 1 - \frac{(1-t)^2}{1-t^2} f_0\left(\frac{tz_1}{z_2}\right) - \frac{(1-t)^2}{1-t^2} f_0\left(\frac{tz_2}{z_1}\right) \right\} \right] \\ &= ((2)) - \frac{(1-t)^2}{1-t^2} \text{CT}_{z_1, z_2} \left[f_0\left(\frac{z_2}{z_1}\right) f_0\left(\frac{tz_1}{z_2}\right) \right] - \frac{(1-t)^2}{1-t^2} \text{CT}_{z_1, z_2} \left[f_0\left(\frac{z_2}{z_1}\right) f_0\left(\frac{tz_2}{z_1}\right) \right]. \end{aligned}$$

ここに z_1, z_2 についてのある積分が後ろに 2 つ残っているが, これは $z_1 \leftrightarrow z_2$ とすることで同一視できるので

$$\bullet ((3)) = ((2)) - 2 \frac{(1-t)^2}{1-t^2} \text{CT}_{z_1, z_2} \left[f_0 \left(\frac{z_2}{z_1} \right) f_0 \left(\frac{tz_2}{z_1} \right) \right]$$

を得る (次に行う積分の変数が $f_0(z)$ の中に「 t の 0 以上のべきを伴って現れる」ようにするとよい. 今回の場合は $f_0(z_2/z_1)f_0(tz_2/z_1)$ である). 次に z_2 について積分するが, 積分路は $|tz_1| < |z_2| < |t^{-1}z_1|$ を満たすようにとり, $z_2=0$ 及び $z_2=tz_1$ からの寄与を拾うと

$$\begin{aligned} \bullet ((3)) &= ((2)) - 2 \frac{(1-t)^2}{1-t^2} \text{CT}_{z_1} \left[1 - \frac{(1-t)^2}{1-t^2} f_0(t^2) \right] \\ &= ((2)) - 2 \frac{(1-t)^2}{1-t^2} ((1)) + 2 \frac{(1-t)^4}{(1-t^2)^2} f_0(t^2) \end{aligned}$$

となる. ここで $f_0(t^2) = \frac{(1-t^2)^2}{(1-t^3)(1-t)}$ から $\frac{(1-t)^4}{(1-t^2)^2} f_0(t^2) = \frac{(1-t)^3}{1-t^3}$ なので

$$\bullet ((3)) = ((2)) - 2 \frac{(1-t)^2}{1-t^2} ((1)) + 2 \frac{(1-t)^3}{1-t^3} ((0))$$

を得る. 先ほどの例 5.3 では $((2)) = ((1)) - \frac{(1-t)^2}{1-t^2} ((0))$ を見たので, $((r))$ ($r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) について何かしらの関係が成り立っていることが期待される.

例 5.5. 今度は $((4))$ を調べる. $((4))$ とは

$$\bullet ((4)) = \text{CT}_{z_1, z_2, z_3, z_4} \left[f_0 \left(\frac{z_2}{z_1} \right) f_0 \left(\frac{z_3}{z_1} \right) f_0 \left(\frac{z_3}{z_2} \right) f_0 \left(\frac{z_4}{z_1} \right) f_0 \left(\frac{z_4}{z_2} \right) f_0 \left(\frac{z_4}{z_3} \right) \right]$$

のことである. 例によって z_4 から積分する. その際, $z_4=0$ 及び $z_4=tz_1, tz_2, tz_3$ からの寄与を拾うと

$$\begin{aligned} \bullet ((4)) &= \text{CT}_{z_1, z_2, z_3} \left[f_0 \left(\frac{z_2}{z_1} \right) f_0 \left(\frac{z_3}{z_1} \right) f_0 \left(\frac{z_3}{z_2} \right) \left\{ 1 - 3 \frac{(1-t)^2}{1-t^2} f_0 \left(\frac{tz_3}{z_1} \right) f_0 \left(\frac{tz_3}{z_2} \right) \right\} \right] \\ &= ((3)) - 3 \frac{(1-t)^2}{1-t^2} \text{CT}_{z_1, z_2, z_3} \left[f_0 \left(\frac{z_2}{z_1} \right) f_0 \left(\frac{z_3}{z_1} \right) f_0 \left(\frac{z_3}{z_2} \right) f_0 \left(\frac{tz_3}{z_1} \right) f_0 \left(\frac{tz_3}{z_2} \right) \right] \end{aligned}$$

となる (例によって, z_1, z_2, z_3 の適当な入れ換えで同一視できる積分をそのように見ている). 今度は z_3 で積分する. $z_3=0$ 及び $z_3=tz_1, tz_2$ からの寄与を拾うと

$$\begin{aligned} \bullet ((4)) &= ((3)) - 3 \frac{(1-t)^2}{1-t^2} \text{CT}_{z_1, z_2} \left[f_0 \left(\frac{z_2}{z_1} \right) \left\{ 1 - 2 \frac{(1-t)^2}{1-t^2} f_0 \left(\frac{tz_2}{z_1} \right) f_0 \left(\frac{t^2 z_2}{z_1} \right) f_0(t^2) \right\} \right] \\ &= ((3)) - 3 \frac{(1-t)^2}{1-t^2} ((2)) + 6 \frac{(1-t)^3}{1-t^3} \text{CT}_{z_1, z_2} \left[f_0 \left(\frac{z_2}{z_1} \right) f_0 \left(\frac{tz_2}{z_1} \right) f_0 \left(\frac{t^2 z_2}{z_1} \right) \right] \end{aligned}$$

となる (ここで $\frac{(1-t)^4}{(1-t^2)^2} f_0(t^2) = \frac{(1-t)^3}{1-t^3}$ を使った). 更に z_2 についての積分として $z_2=0$ 及び $z_2=tz_1$ からの寄与を拾うと

$$\begin{aligned} \bullet ((4)) &= ((3)) - 3 \frac{(1-t)^2}{1-t^2} ((2)) + 6 \frac{(1-t)^3}{1-t^3} \text{CT}_{z_1} \left[1 - \frac{(1-t)^2}{1-t^2} f_0(t^2) f_0(t^3) \right] \\ &= ((3)) - 3 \frac{(1-t)^2}{1-t^2} ((2)) + 6 \frac{(1-t)^3}{1-t^3} ((1)) - 6 \frac{(1-t)^5}{(1-t^2)(1-t^3)} f_0(t^2) f_0(t^3) \end{aligned}$$

となる. ここで

$$\bullet \frac{(1-t)^5}{(1-t^2)(1-t^3)} f_0(t^2) f_0(t^3) = \frac{(1-t)^5}{(1-t^2)(1-t^3)} \cdot \frac{(1-t^2)^2}{(1-t^3)(1-t)} \cdot \frac{(1-t^3)^2}{(1-t^4)(1-t^2)} = \frac{(1-t)^4}{1-t^4}$$

であることから次を得る:

$$\bullet ((4)) = ((3)) - 3 \frac{(1-t)^2}{1-t^2} ((2)) + 6 \frac{(1-t)^3}{1-t^3} ((1)) - 6 \frac{(1-t)^4}{1-t^4} ((0)).$$

例 5.6. ((5)) についても同様にできる. 軽く述べると, ((5)) とは

$$\bullet ((5)) = \text{CT}_{z_1, \dots, z_5} \left[f_0\left(\frac{z_2}{z_1}\right) f_0\left(\frac{z_3}{z_1}\right) f_0\left(\frac{z_3}{z_2}\right) f_0\left(\frac{z_4}{z_1}\right) f_0\left(\frac{z_4}{z_2}\right) f_0\left(\frac{z_4}{z_3}\right) f_0\left(\frac{z_5}{z_1}\right) f_0\left(\frac{z_5}{z_2}\right) f_0\left(\frac{z_5}{z_3}\right) f_0\left(\frac{z_5}{z_4}\right) \right]$$

なので, z_5 について積分すると ($z_5=0$ 及び $z_5=tz_1, tz_2, tz_3, tz_4$ からの寄与を拾う)

$$\begin{aligned} \bullet ((5)) &= \text{CT}_{z_1, \dots, z_4} \left[f_0\left(\frac{z_2}{z_1}\right) f_0\left(\frac{z_3}{z_1}\right) f_0\left(\frac{z_3}{z_2}\right) f_0\left(\frac{z_4}{z_1}\right) f_0\left(\frac{z_4}{z_2}\right) f_0\left(\frac{z_4}{z_3}\right) \left\{ 1 - 4 \frac{(1-t)^2}{1-t^2} f_0\left(\frac{tz_4}{z_1}\right) f_0\left(\frac{tz_4}{z_2}\right) f_0\left(\frac{tz_4}{z_3}\right) \right\} \right] \\ &= ((4)) - 4 \frac{(1-t)^2}{1-t^2} \text{CT}_{z_1, \dots, z_4} \left[f_0\left(\frac{z_2}{z_1}\right) f_0\left(\frac{z_3}{z_1}\right) f_0\left(\frac{z_3}{z_2}\right) f_0\left(\frac{z_4}{z_1}\right) f_0\left(\frac{z_4}{z_2}\right) f_0\left(\frac{z_4}{z_3}\right) f_0\left(\frac{tz_4}{z_1}\right) f_0\left(\frac{tz_4}{z_2}\right) f_0\left(\frac{tz_4}{z_3}\right) \right] \end{aligned}$$

となる. 次に z_4 について積分すると ($z_4=0$ 及び $z_4=tz_1, tz_2, tz_3$ からの寄与を拾う)

$$\begin{aligned} \bullet ((5)) &= ((4)) - 4 \frac{(1-t)^2}{1-t^2} \text{CT}_{z_1, z_2, z_3} \left[f_0\left(\frac{z_2}{z_1}\right) f_0\left(\frac{z_3}{z_1}\right) f_0\left(\frac{z_3}{z_2}\right) \left\{ 1 - 3 \frac{(1-t)^2}{1-t^2} f_0\left(\frac{tz_3}{z_1}\right) f_0\left(\frac{tz_3}{z_2}\right) f_0\left(\frac{t^2 z_3}{z_1}\right) f_0\left(\frac{t^2 z_3}{z_2}\right) f_0(t^2) \right\} \right] \\ &= ((4)) - 4 \frac{(1-t)^2}{1-t^2} ((3)) + 12 \frac{(1-t)^3}{1-t^3} \text{CT}_{z_1, z_2, z_3} \left[f_0\left(\frac{z_2}{z_1}\right) f_0\left(\frac{z_3}{z_1}\right) f_0\left(\frac{z_3}{z_2}\right) f_0\left(\frac{tz_3}{z_1}\right) f_0\left(\frac{tz_3}{z_2}\right) f_0\left(\frac{t^2 z_3}{z_1}\right) f_0\left(\frac{t^2 z_3}{z_2}\right) \right] \end{aligned}$$

となる. 今度は z_3 について積分すると ($z_3=0$ 及び $z_3=tz_1, tz_2$ からの寄与を拾う)

$$\begin{aligned} \bullet ((5)) &= ((4)) - 4 \frac{(1-t)^2}{1-t^2} ((3)) \\ &\quad + 12 \frac{(1-t)^3}{1-t^3} \text{CT}_{z_1, z_2} \left[f_0\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \left\{ 1 - 2 \frac{(1-t)^2}{1-t^2} f_0\left(\frac{tz_2}{z_1}\right) f_0\left(\frac{t^2 z_2}{z_1}\right) f_0\left(\frac{t^3 z_2}{z_1}\right) f_0(t^2) f_0(t^3) \right\} \right] \\ &= ((4)) - 4 \frac{(1-t)^2}{1-t^2} ((3)) + 12 \frac{(1-t)^3}{1-t^3} ((2)) - 24 \frac{(1-t)^4}{1-t^4} \text{CT}_{z_1, z_2} \left[f_0\left(\frac{z_2}{z_1}\right) f_0\left(\frac{tz_2}{z_1}\right) f_0\left(\frac{t^2 z_2}{z_1}\right) f_0\left(\frac{t^3 z_2}{z_1}\right) \right] \end{aligned}$$

となる. 最後に z_2 で積分すると ($z_2=0$ 及び $z_2=tz_1$ からの寄与を拾う)

$$\begin{aligned} \bullet ((5)) &= ((4)) - 4 \frac{(1-t)^2}{1-t^2} ((3)) + 12 \frac{(1-t)^3}{1-t^3} ((2)) - 24 \frac{(1-t)^4}{1-t^4} \text{CT}_{z_1} \left[1 - \frac{(1-t)^2}{1-t^2} f_0(t^2) f_0(t^3) f_0(t^4) \right] \\ &= ((4)) - 4 \frac{(1-t)^2}{1-t^2} ((3)) + 12 \frac{(1-t)^3}{1-t^3} ((2)) - 24 \frac{(1-t)^4}{1-t^4} ((1)) + 24 \frac{(1-t)^6}{(1-t^4)(1-t^2)} f_0(t^2) f_0(t^3) f_0(t^4) \end{aligned}$$

が出るが, ここで

$$\begin{aligned} \bullet \frac{(1-t)^6}{(1-t^4)(1-t^2)} f_0(t^2) f_0(t^3) f_0(t^4) \\ = \frac{(1-t)^6}{(1-t^4)(1-t^2)} \cdot \frac{(1-t^2)^2}{(1-t^3)(1-t)} \cdot \frac{(1-t^3)^2}{(1-t^4)(1-t^2)} \cdot \frac{(1-t^4)^2}{(1-t^5)(1-t^3)} = \frac{(1-t)^5}{1-t^5} \end{aligned}$$

であることによって, 最終的に次を得る:

$$\bullet ((5)) = ((4)) - 4 \frac{(1-t)^2}{1-t^2} ((3)) + 12 \frac{(1-t)^3}{1-t^3} ((2)) - 24 \frac{(1-t)^4}{1-t^4} ((1)) + 24 \frac{(1-t)^5}{1-t^5} ((0)).$$

この辺りまで来れば, $((r))$ について

$$\bullet ((r)) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \frac{(r-1)!}{(r-k)!} \cdot \frac{(1-t)^k}{1-t^k} ((r-k))$$

が成り立つことが予想できるであろう. これが実際に正しいことを以下で確かめる.

途中で何度か出てきた

$$\bullet \frac{(1-t)^4}{(1-t^2)^2} f_0(t^2) = \frac{(1-t)^3}{1-t^3}, \quad \bullet \frac{(1-t)^5}{(1-t^2)(1-t^3)} f_0(t^2) f_0(t^3) = \frac{(1-t)^4}{1-t^4}$$

などであるが, 一般には次が成り立つ:

• 2 以上の自然数 n に対し

$$\bullet \frac{(1-t)^2}{1-t^2} \cdot \frac{(1-t)^n}{1-t^n} \prod_{a=2}^n f_0(t^a) = \frac{(1-t)^{n+1}}{1-t^{n+1}}.$$

これを示すには, あとは帰納法の例のステップを済ませればよい. ある 3 以上の自然数 n に対して

$$\bullet \frac{(1-t)^2}{1-t^2} \cdot \frac{(1-t)^{n-1}}{1-t^{n-1}} \prod_{a=2}^{n-1} f_0(t^a) = \frac{(1-t)^n}{1-t^n}$$

が成り立つとき, 次のようにできる:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{(1-t)^2}{1-t^2} \cdot \frac{(1-t)^n}{1-t^n} \prod_{a=2}^n f_0(t^a) &= \frac{(1-t)^2}{1-t^2} \cdot \frac{(1-t)^{n-1}}{1-t^{n-1}} \prod_{a=2}^{n-1} f_0(t^a) \times \frac{1-t^{n-1}}{(1-t)^{n-1}} \cdot \frac{(1-t)^n}{1-t^n} f_0(t^n) \\ &= \frac{(1-t)^n}{1-t^n} \times \frac{1-t^{n-1}}{(1-t)^{n-1}} \cdot \frac{(1-t)^n}{1-t^n} \cdot \frac{(1-t^n)^2}{(1-t^{n+1})(1-t^{n-1})} = \frac{(1-t)^{n+1}}{1-t^{n+1}}. \end{aligned}$$

よって, 上に述べたことは正しい.

目的の命題の証明は, 次のような二段構えで行う.

命題 5.7. (1) $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $((r)) \in \mathbb{C}$ を次によって定める:

$$\bullet ((0)) := 1, \quad \bullet ((r)) := \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[\prod_{i=1}^r \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0\left(\frac{z_i}{z_{a_i}}\right) \right] \quad (r \in \mathbb{Z}_{>0}).$$

$((r))$ の $z_1, \dots, z_r$ についての積分は先に述べた通りに行う (すなわち, $z_r=0$ 及び $z_r=tz_j$ ($1 \leq j \leq r-1$) からの寄与を拾い, 次に $z_{r-1}=0$ 及び $z_{r-1}=tz_j$ ($1 \leq j \leq r-2$) からの寄与を拾い という具合にやっていく). このとき, $((r))$ ($r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) について次が成り立つ:

$$\bullet ((r)) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \frac{(r-1)!}{(r-k)!} \cdot \frac{(1-t)^k}{1-t^k} ((r-k)).$$

$$(2) \quad \frac{r!}{[r]_t!} t^{\frac{r(r-1)}{2}} = r! \frac{(1-t)^r}{(t; t)_r} t^{\frac{r(r-1)}{2}} \quad (r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \text{ は (1) に述べた関係を満たす.}$$

証明. (1) 以下, スペースの節約のために $\langle r \rangle := \frac{((r))}{r!}$ ($r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) とおく. 示すべきは

$$\bullet r \langle r \rangle = \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \frac{(1-t)^k}{1-t^k} \langle r-k \rangle \quad (r \in \mathbb{Z}_{>0})$$

である．まず，単純に計算すると次のようになる：

$$\begin{aligned}
& \bullet \ r \langle r \rangle = \frac{1}{(r-1)!} \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[\prod_{i=1}^{r-1} \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0 \left(\frac{z_i}{z_{a_i}} \right) \prod_{b=1}^{r-1} f_0 \left(\frac{z_r}{z_b} \right) \right] \\
&= \langle r-1 \rangle - \frac{1}{(r-2)!} \cdot \frac{(1-t)^2}{1-t^2} \text{CT}_{z_1, \dots, z_{r-1}} \left[\prod_{i=1}^{r-1} \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0 \left(\frac{z_i}{z_{a_i}} \right) \prod_{b=1}^{r-2} f_0 \left(\frac{tz_{r-1}}{z_b} \right) \right] \\
&= \langle r-1 \rangle - \frac{1}{(r-2)!} \cdot \frac{(1-t)^2}{1-t^2} \text{CT}_{z_1, \dots, z_{r-1}} \left[\prod_{i=1}^{r-2} \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0 \left(\frac{z_i}{z_{a_i}} \right) \prod_{b=1}^{r-2} f_0 \left(\frac{z_{r-1}}{z_b} \right) f_0 \left(\frac{tz_{r-1}}{z_b} \right) \right] \\
&= \langle r-1 \rangle - \frac{(1-t)^2}{1-t^2} \langle r-2 \rangle + \frac{1}{(r-3)!} \cdot \frac{(1-t)^3}{1-t^3} \text{CT}_{z_1, \dots, z_{r-2}} \left[\prod_{i=1}^{r-2} \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0 \left(\frac{z_i}{z_{a_i}} \right) \prod_{b=1}^{r-3} f_0 \left(\frac{tz_{r-2}}{z_b} \right) f_0 \left(\frac{t^2 z_{r-2}}{z_b} \right) \right] \\
&= \langle r-1 \rangle - \frac{(1-t)^2}{1-t^2} \langle r-2 \rangle + \frac{1}{(r-3)!} \cdot \frac{(1-t)^3}{1-t^3} \text{CT}_{z_1, \dots, z_{r-2}} \left[\prod_{i=1}^{r-3} \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0 \left(\frac{z_i}{z_{a_i}} \right) \prod_{b=1}^{r-3} f_0 \left(\frac{z_{r-2}}{z_b} \right) f_0 \left(\frac{tz_{r-2}}{z_b} \right) f_0 \left(\frac{t^2 z_{r-2}}{z_b} \right) \right] \\
&= \langle r-1 \rangle - \frac{(1-t)^2}{1-t^2} \langle r-2 \rangle + \frac{(1-t)^3}{1-t^3} \langle r-3 \rangle \\
&\quad - \frac{1}{(r-4)!} \cdot \frac{(1-t)^4}{1-t^4} \text{CT}_{z_1, \dots, z_{r-3}} \left[\prod_{i=1}^{r-3} \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0 \left(\frac{z_i}{z_{a_i}} \right) \prod_{b=1}^{r-4} f_0 \left(\frac{tz_{r-3}}{z_b} \right) f_0 \left(\frac{t^2 z_{r-3}}{z_b} \right) f_0 \left(\frac{t^3 z_{r-3}}{z_b} \right) \right] \\
&= \langle r-1 \rangle - \frac{(1-t)^2}{1-t^2} \langle r-2 \rangle + \frac{(1-t)^3}{1-t^3} \langle r-3 \rangle \\
&\quad - \frac{1}{(r-4)!} \cdot \frac{(1-t)^4}{1-t^4} \text{CT}_{z_1, \dots, z_{r-3}} \left[\prod_{i=1}^{r-4} \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0 \left(\frac{z_i}{z_{a_i}} \right) \prod_{b=1}^{r-4} f_0 \left(\frac{z_{r-3}}{z_b} \right) f_0 \left(\frac{tz_{r-3}}{z_b} \right) f_0 \left(\frac{t^2 z_{r-3}}{z_b} \right) f_0 \left(\frac{t^3 z_{r-3}}{z_b} \right) \right] \\
&= \langle r-1 \rangle - \frac{(1-t)^2}{1-t^2} \langle r-2 \rangle + \frac{(1-t)^3}{1-t^3} \langle r-3 \rangle - \frac{(1-t)^4}{1-t^4} \langle r-4 \rangle \\
&\quad + \frac{1}{(r-5)!} \cdot \frac{(1-t)^5}{1-t^5} \text{CT}_{z_1, \dots, z_{r-4}} \left[\prod_{i=1}^{r-4} \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0 \left(\frac{z_i}{z_{a_i}} \right) \prod_{b=1}^{r-5} f_0 \left(\frac{tz_{r-4}}{z_b} \right) f_0 \left(\frac{t^2 z_{r-4}}{z_b} \right) f_0 \left(\frac{t^3 z_{r-4}}{z_b} \right) f_0 \left(\frac{t^4 z_{r-4}}{z_b} \right) \right] = \dots
\end{aligned}$$

これより，次が成り立つことが予想される： $1 \leq j \leq r-1$ なる $j \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し

$$\begin{aligned}
& \bullet \ r \langle r \rangle = \sum_{k=1}^j (-1)^{k-1} \frac{(1-t)^k}{1-t^k} \langle r-k \rangle \\
&\quad + \frac{(-1)^j}{(r-j-1)!} \cdot \frac{(1-t)^{j+1}}{1-t^{j+1}} \text{CT}_{z_1, \dots, z_{r-j}} \left[\prod_{i=1}^{r-j} \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0 \left(\frac{z_i}{z_{a_i}} \right) \prod_{b=1}^{r-j-1} \prod_{c=1}^j f_0 \left(\frac{t^c z_{r-j}}{z_b} \right) \right].
\end{aligned}$$

これを示すには，例の帰納法のステップを確かめればよい． $1 \leq j \leq r-1$ なるある $j \in \mathbb{Z}_{>0}$ について上
が成り立つとすると，まず

$$\begin{aligned}
& \bullet \ \text{CT}_{z_1, \dots, z_{r-j}} \left[\prod_{i=1}^{r-j} \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0 \left(\frac{z_i}{z_{a_i}} \right) \prod_{b=1}^{r-j-1} \prod_{c=1}^j f_0 \left(\frac{t^c z_{r-j}}{z_b} \right) \right] \\
&= \text{CT}_{z_1, \dots, z_{r-j}} \left[\prod_{i=1}^{r-j-1} \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0 \left(\frac{z_i}{z_{a_i}} \right) \prod_{b'=1}^{r-j-1} f_0 \left(\frac{z_{r-j}}{z_{b'}} \right) \prod_{b=1}^{r-j-1} \prod_{c=1}^j f_0 \left(\frac{t^c z_{r-j}}{z_b} \right) \right] \\
&= ((r-j-1)) \\
&\quad - (r-j-1) \frac{(1-t)^2}{1-t^2} \text{CT}_{z_1, \dots, z_{r-j-1}} \left[\prod_{i=1}^{r-j-1} \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0 \left(\frac{z_i}{z_{a_i}} \right) \prod_{b'=1}^{r-j-2} f_0 \left(\frac{tz_{r-j-1}}{z_{b'}} \right) \prod_{b=1}^{r-j-1} \prod_{c=1}^j f_0 \left(\frac{t^{c+1} z_{r-j-1}}{z_b} \right) \right]
\end{aligned}$$

であるが, ここで

$$\bullet \prod_{b'=1}^{r-j-2} f_0\left(\frac{tz_{r-j-1}}{z_{b'}}\right) \prod_{b=1}^{r-j-1} \prod_{c=1}^j f_0\left(\frac{t^{c+1}z_{r-j-1}}{z_b}\right) = \prod_{c=1}^j f_0(t^{c+1}) \prod_{b=1}^{r-j-2} \prod_{c=1}^{j+1} f_0\left(\frac{t^c z_{r-j-1}}{z_b}\right)$$

なので次が成り立つ:

$$\begin{aligned} & \bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_{r-j}} \left[\prod_{i=1}^{r-j} \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0\left(\frac{z_i}{z_{a_i}}\right) \prod_{b=1}^{r-j-1} \prod_{c=1}^j f_0\left(\frac{t^c z_{r-j-1}}{z_b}\right) \right] \\ &= ((r-j-1)) \\ & - (r-j-1) \frac{(1-t)^2}{1-t^2} \prod_{c=1}^j f_0(t^{c+1}) \text{CT}_{z_1, \dots, z_{r-j-1}} \left[\prod_{i=1}^{r-j-1} \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0\left(\frac{z_i}{z_{a_i}}\right) \prod_{b=1}^{r-j-2} \prod_{c=1}^{j+1} f_0\left(\frac{t^c z_{r-j-1}}{z_b}\right) \right] \\ &= ((r-j-1)) \\ & - (r-j-1) \frac{1-t^{j+1}}{(1-t)^{j+1}} \cdot \frac{(1-t)^{j+2}}{1-t^{j+2}} \text{CT}_{z_1, \dots, z_{r-j-1}} \left[\prod_{i=1}^{r-j-1} \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0\left(\frac{z_i}{z_{a_i}}\right) \prod_{b=1}^{r-j-2} \prod_{c=1}^{j+1} f_0\left(\frac{t^c z_{r-j-1}}{z_b}\right) \right]. \end{aligned}$$

これによって

$$\begin{aligned} \bullet r \langle r \rangle &= \sum_{k=1}^j (-1)^{k-1} \frac{(1-t)^k}{1-t^k} \langle r-k \rangle + (-1)^j \frac{(1-t)^{j+1}}{1-t^{j+1}} \langle r-j-1 \rangle \\ &+ \frac{(-1)^{j+1}}{(r-j-2)!} \cdot \frac{(1-t)^{j+2}}{1-t^{j+2}} \text{CT}_{z_1, \dots, z_{r-j-1}} \left[\prod_{i=1}^{r-j-1} \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0\left(\frac{z_i}{z_{a_i}}\right) \prod_{b=1}^{r-j-2} \prod_{c=1}^{j+1} f_0\left(\frac{t^c z_{r-j-1}}{z_b}\right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{k-1} \frac{(1-t)^k}{1-t^k} \langle r-k \rangle \\ &+ \frac{(-1)^{j+1}}{(r-j-2)!} \cdot \frac{(1-t)^{j+2}}{1-t^{j+2}} \text{CT}_{z_1, \dots, z_{r-j-1}} \left[\prod_{i=1}^{r-j-1} \prod_{a_i=1}^{i-1} f_0\left(\frac{z_i}{z_{a_i}}\right) \prod_{b=1}^{r-j-2} \prod_{c=1}^{j+1} f_0\left(\frac{t^c z_{r-j-1}}{z_b}\right) \right] \end{aligned}$$

を得るので, 先に述べた予想は正しい.

(2) $\frac{r!}{[r]_t!} t^{\frac{r(r-1)}{2}}$ が (1) で見た関係を満たすことを確かめる. まずは

$$\begin{aligned} & \bullet \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \frac{(r-1)!}{(r-k)!} \cdot \frac{(1-t)^k}{1-t^k} \cdot \frac{(r-k)!}{[r-k]_t!} t^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}} \\ &= (r-1)! (1-t)^r \sum_{k=1}^r \frac{(-1)^{k-1}}{1-t^k} \cdot \frac{t^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}}}{(t; t)_{r-k}} \end{aligned}$$

とできるが, ここに現れた $\sum_{k=1}^r \frac{(-1)^{k-1}}{1-t^k} \cdot \frac{t^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}}}{(t; t)_{r-k}}$ について

$$\begin{aligned} & \bullet \sum_{k=1}^r \frac{(-1)^{k-1}}{1-t^k} \cdot \frac{t^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}}}{(t; t)_{r-k}} = \sum_{\substack{m \geq 1, n \geq 0 \\ m+n=r}} \frac{(-1)^{m-1}}{1-t^m} \cdot \frac{t^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(t; t)_n} \\ &= (-1)^{r-1} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{1-t^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(t; t)_n} z^n \text{ の } z^r \text{ の係数} \right) \end{aligned}$$

とできるので

$$\begin{aligned} & \bullet \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \frac{(r-1)!}{(r-k)!} \cdot \frac{(1-t)^k}{1-t^k} \cdot \frac{(r-k)!}{[r-k]_t!} t^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}} \\ & = (r-1)!(1-t)^r (-1)^{r-1} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{1-t^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(t; t)_n} z^n \text{ の } z^r \text{ の係数} \right) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $(z; q)_{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(q; q)_k} z^k$ 及び

$$\bullet (z; q)_{\infty} = \exp \left(- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^m} \cdot \frac{z^m}{m} \right) \quad (|z| < 1)$$

から得られる

$$\bullet -D_z \log(z; q)_{\infty} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{1-q^m} \quad (|z| < 1)$$

によって次が成り立つ:

$$\begin{aligned} & \bullet \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \frac{(r-1)!}{(r-k)!} \cdot \frac{(1-t)^k}{1-t^k} \cdot \frac{(r-k)!}{[r-k]_t!} t^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}} \\ & = (-1)^{r-1} (r-1)! (1-t)^r (-D_z \log(z; t)_{\infty} \times (z; t)_{\infty} \text{ の } |z| < 1 \text{ での展開の } z^r \text{ の係数}) \\ & = (-1)^{r-1} (r-1)! (1-t)^r (-D_z (z; t)_{\infty} \text{ の } |z| < 1 \text{ での展開の } z^r \text{ の係数}) \\ & = (-1)^{r-1} (r-1)! (1-t)^r \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(t; t)_k} \cdot (-k) z^k \text{ の } z^r \text{ の係数} \right) \\ & = (-1)^{r-1} (r-1)! (1-t)^r \times \frac{(-1)^r t^{\frac{r(r-1)}{2}}}{(t; t)_r} \cdot (-r) = r! \frac{(1-t)^r}{(t; t)_r} t^{\frac{r(r-1)}{2}} = \frac{r!}{[r]_t!} t^{\frac{r(r-1)}{2}}. \quad \square \end{aligned}$$

5.3 Macdonald 作用素の自由場表示

Macdonald 作用素の自由場表示の話に戻る. 既に何度か触れたことではあったが, スペースの節約のために

$$\bullet |\psi_r\rangle := \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_0^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet \eta^{\Delta}(z_1) \cdots \eta^{\Delta}(z_r) \bullet \right] \phi_N^{\Delta}(\mathbf{x}) |0\rangle \quad (r \in \{0, 1, \dots, N\})$$

とおくと $|\psi_0\rangle = \phi_N^{\Delta}(\mathbf{x}) |0\rangle$ と理解する, 以上のことによって

$$\bullet r! \sum_{k=0}^r \frac{(-t^{-N})^{r-k} t^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}}}{k! [r-k]_t!} |\psi_k\rangle = r! t^{-Nr} (t-1)^r D_N^{(r)} \phi_N^{\Delta}(\mathbf{x}) |0\rangle$$

が成り立つ. この $|\psi_r\rangle$ についての関係は (このような関係式が出てきてくれるというのが, 「三角の場合」の嬉しい話である. 「楕円の場合」にはこうはいかない, 先に見た q -差分作用素

$$\bullet E_N^{(r)} := r! t^{-Nr} (t-1)^r \sum_{k=0}^r \frac{(-1)^{r-k}}{(t; t)_{r-k}} D_N^{(k)} \quad (r \in \{0, 1, \dots, N\})$$

が満たすものと同じ格好をしている. よって, これは次のように解くことができる.

命題 5.8 (Macdonald 作用素の自由場表示). r 変数関数 $f_0^{(r)}(z_1, \dots, z_r) = f_0^{(r)}(\mathbf{z})$ を

$$\bullet f_0^{(r)}(z_1, \dots, z_r) = f_0^{(r)}(\mathbf{z}) := \prod_{1 \leq a < b \leq r} \frac{(z_a - z_b)^2}{(z_a - tz_b)(z_a - t^{-1}z_b)}$$

とおくとき, q -差分作用素 $E_N^{(r)}$ ($r \in \{0, 1, \dots, N\}$) は次のように自由場表示される :

$$\bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_0^{(r)}(\mathbf{z}) \bullet \eta^\Delta(z_1) \cdots \eta^\Delta(z_r) \bullet \right] \phi_N^\Delta(\mathbf{x}) |0\rangle = E_N^{(r)} \phi_N^\Delta(\mathbf{x}) |0\rangle \quad (r \in \{0, 1, \dots, N\}).$$

Macdonald 作用素の自由場表示の「双対版」として

$$\bullet \langle 0 | \phi_N^{\dagger\Delta}(\mathbf{x}) \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_0^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet \eta^\Delta(z_1) \cdots \eta^\Delta(z_r) \bullet \right] = E_N^{(r)} \langle 0 | \phi_N^{\dagger\Delta}(\mathbf{x}) \quad (r \in \{0, 1, \dots, N\})$$

も成り立つ.

以上のことから, $r \in \{0, 1, \dots, \min\{M, N\}\}$ に対し

$$\bullet \langle 0 | \phi_M^{\dagger\Delta}(\mathbf{x}) \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[f_0^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \bullet \eta^\Delta(z_1) \cdots \eta^\Delta(z_r) \bullet \right] \phi_N^\Delta(\mathbf{y}) |0\rangle$$

を 2 通りに計算することで次を得る.

命題 5.9 (Macdonald 作用素の核関数の満たす恒等式). Macdonald 作用素の核関数

$$\bullet \Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} \frac{(tx_i y_j; q)_\infty}{(x_i y_j; q)_\infty}$$

と q -差分作用素 $E_N^{(r)}$ ($r \in \{0, 1, \dots, N\}$) について次が成り立つ :

$$\bullet E_{M,\mathbf{x}}^{(r)} \Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t) = E_{N,\mathbf{y}}^{(r)} \Pi_{M,N}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q, t) \quad (r \in \{0, 1, \dots, \min\{M, N\}\}).$$

今回は Macdonald 作用素の自由場表示を楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示を経由して導いた. これまで「FHHSY」と呼んできた

• B. Feigin, K. Hashizume, A. Hoshino, J. Shiraishi, S. Yanagida “A commutative algebra on degenerate $\mathbb{CP}^1$ and Macdonald polynomials” (Journal of mathematical physics 50.9 (2009))

にも, 上の命題 5.8 と等価な結果が載っている.

6.1 付録 1 : Macdonald 多項式について

ここでは Macdonald 多項式について簡単に述べておく.

Macdonald 多項式についてのより詳しいことは, 例えば次の文献を参照してほしい :

- M. Noumi 『Macdonald Polynomials Commuting Family of q -Difference Operators and Their Joint Eigenfunctions』 (Springer, 2023)
- 野海 正俊 (述), 齋藤 洋介 (記) 「Macdonald 多項式入門」 (OCAMI Preprint Series, 2023)

文字 $x_1, \dots, x_N$ の多項式のうち, 文字 $x_1, \dots, x_N$ の入れ換えとしての対称群 $\mathfrak{S}_N$ の作用の下で不変なものを対称多項式といい, その全体を $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^{\mathfrak{S}_N}$ と書く. $\ell(\lambda) \leq N$ である分割 λ に対し

$$\bullet m_\lambda(\mathbf{x}) = m_\lambda(x_1, \dots, x_N) := \sum_{\substack{\mu \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^N \\ \mu \text{ は } \lambda \text{ の置換}}} x_1^{\mu_1} \cdots x_N^{\mu_N}$$

をモノミアル対称多項式と呼ぶ. $\mathcal{P}_N := \{\lambda \in \mathcal{P} \mid \ell(\lambda) \leq N\}$ と書くと, $\{m_\lambda(\mathbf{x})\}_{\lambda \in \mathcal{P}_N}$ は対称多項式の空間 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^{\mathfrak{S}_N}$ の基底であることが知られている. すなわち

$$\bullet \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^{\mathfrak{S}_N} = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_N} \mathbb{C} m_\lambda(\mathbf{x}).$$

ここで, $\mathcal{P}_N = \{\lambda \in \mathcal{P} \mid \ell(\lambda) \leq N\}$ に以下のような順序を設ける :

$$\bullet \lambda \geq \mu \stackrel{\text{定義}}{\iff} \begin{cases} |\lambda| = |\mu|, \\ \text{任意の } 1 \leq i \leq N \text{ に対し } \lambda_1 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \cdots + \mu_i \text{ が成り立つ.} \end{cases}$$

この順序 $\leq$ は $\mathcal{P}_N$ の dominance ordering と呼ばれる.

q -シフト作用素を $T_{q,z}f(z) = f(qz)$ と書くとき, Macdonald 作用素 D_N を次で定める :

$$\bullet D_N := \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} T_{q,x_i}.$$

命題 6.1. (1) Macdonald 作用素 D_N は $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^{\mathfrak{S}_N}$ に作用する.

(2) Macdonald 作用素 D_N はモノミアル対称多項式 $m_\lambda(\mathbf{x})$ ($\lambda \in \mathcal{P}_N$) に次のように働く : 各 $\lambda \in \mathcal{P}_N$ と $\mu < \lambda$ なる分割 $\mu \in \mathcal{P}_N$ に対し複素数 $c_{\lambda\mu}$ が決まって

$$\bullet D_N m_\lambda(\mathbf{x}) = \varepsilon_\lambda m_\lambda(\mathbf{x}) + \sum_{\mu < \lambda} c_{\lambda\mu} m_\mu(\mathbf{x}), \quad \bullet \varepsilon_\lambda := \sum_{i=1}^N q^{\lambda_i} t^{N-i}.$$

この性質は「Macdonald 作用素の上三角性」と呼ばれる.

Macdonald 多項式は Macdonald 作用素の固有関数として次のように定義される.

命題 6.2 (Macdonald 多項式). 任意の分割 $\lambda \in \mathcal{P}_N$ に対し, 以下の条件を満たす対称多項式 $P_\lambda(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^{\mathfrak{S}_N}$ がただ 1 つ存在する :

- (i) $P_\lambda(\mathbf{x})$ は $P_\lambda(\mathbf{x}) = m_\lambda(\mathbf{x}) + \sum_{\mu < \lambda} c_{\lambda\mu} m_\mu(\mathbf{x})$ ($c_{\lambda\mu} \in \mathbb{C}$) なる格好に展開される.
- (ii) $D_N P_\lambda(\mathbf{x}) = \varepsilon_\lambda P_\lambda(\mathbf{x})$, $\varepsilon_\lambda = \sum_{i=1}^N q^{\lambda_i} t^{N-i}$ が成り立つ.

これら (i), (ii) によって定義される対称多項式 $P_\lambda(\mathbf{x})$ を Macdonald 多項式と呼ぶ.

Macdonald 多項式と高階の Macdonald 作用素は次の関係にある. $r \in \{0, 1, \dots, N\}$ に対し

$$\bullet D_N^{(r)} := t^{\frac{r(r-1)}{2}} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ \#I=r}} \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \prod_{k \in I} T_{q, x_k}$$

とおく ($D_N^{(0)} = 1, D_N^{(1)} = D_N$ である). $D_N^{(r)}$ を「 r 階の Macdonald 作用素」と呼ぶ. $D_N^{(r)}$ ($r \in \{0, 1, \dots, N\}$) は対称多項式の空間 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^{\mathfrak{S}_N}$ に作用しており, 1 階の Macdonald 作用素 $D_N^{(1)} = D_N$ と同様に「上三角性」を有する. このとき次が成り立つ: 任意の $r \in \{0, 1, \dots, N\}$ 及び $\lambda \in \mathcal{P}_N$ に対し

$$\bullet D_N^{(r)} P_\lambda(\mathbf{x}) = e_r(q^\lambda t^{\delta_N}) P_\lambda(\mathbf{x}).$$

ここで $\delta_N = (N-1, N-2, \dots, 2, 1, 0) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^N$ であり, $e_r(q^\lambda t^{\delta_N})$ は基本対称式

$$\bullet e_r(\mathbf{x}) = e_r(x_1, \dots, x_N) := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq N} x_{i_1} \cdots x_{i_r} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^{\mathfrak{S}_N} \quad (r \in \{0, 1, \dots, N\})$$

に $x_i = q^{\lambda_i} t^{N-i}$ ($1 \leq i \leq N$) なる代入を行ったものを表す.

6.2 付録 2 : 「テータ関数とデルタ関数の関係」の要約

ここでは, 本文書で何度か用いた「テータ関数とデルタ関数の関係」やテータ関数についての恒等式について軽くまとめる (例えば「より多くの具体例を見たい」という読者は, 筆者による文書「テータ関数とデルタ関数の関係」(OCAMI Preprint Series, 2025) も参照してほしい).

形式的デルタ関数 $\delta(z) \in \mathbb{C}[[z, z^{-1}]]$ (以下では単に「デルタ関数」と呼ぶ) を

$$\bullet \delta(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}$$

と定める. ここにはそれぞれ, 有理関数 $\frac{1}{1-z}$ を

$$\bullet \frac{1}{1-z} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} z^n & (|z| < 1), \\ -\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} & (|z| > 1) \end{cases}$$

と展開した結果が見えている. そこで, この事実を次のように書くことにする:

$$\bullet \left[\frac{1}{1-z} \right]_{|z| < 1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \in \mathbb{C}[[z, z^{-1}]], \quad \bullet \left[\frac{1}{1-z} \right]_{|z| > 1} = -\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \in \mathbb{C}[[z, z^{-1}]].$$

すなわち, ある条件 (*) によって定まる複素平面 $\mathbb{C}$ の部分集合において正則な関数 $f(z)$ を z について展開したものを z の形式べき級数と思い直して

$$\bullet [f(z)]_{(*)} \in \mathbb{C}[[z, z^{-1}]]$$

と書く, ということである (本来は「複素変数としての z 」と「形式べき級数の不定元 z 」を区別すべきかもしれないが, 同じ「 z 」を使っても特に問題は生じないと思うので, そのようにする). この記法によれば次が成り立つ:

$$\bullet \left[\frac{1}{1-z} \right]_{|z|<1} - \left[\frac{1}{1-z} \right]_{|z|>1} = \delta(z).$$

正の実数 a, b で $a < b$ なるものによってできる $\{z \in \mathbb{C} \mid a < |z| < b\} \subset \mathbb{C}$ というタイプの $\mathbb{C}$ の部分集合をアニュラスと呼ぶ (本文書では, アニュラスとしてはこのような $\mathbb{C}$ の原点を中心としたものしか考えない). アニュラスで正則な関数については次が成り立つ.

- アニュラス $A \subset \mathbb{C}$ において正則な関数 $f(z)$ は次のような格好の展開を持つ:

$$\bullet f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k \quad (z \in A), \quad \bullet c_k = \oint_C \frac{dz}{2\pi i z} z^{-k} f(z).$$

積分路 C はアニュラス A の中で $\mathbb{C}$ の原点を反時計回りに一周するものであれば何でもよい.

デルタ関数についてよく目にする “ $f(z)\delta\left(\frac{a}{z}\right) = f(a)\delta\left(\frac{a}{z}\right)$ ” は次のように述べられる.

命題 6.3. $a \in \mathbb{C}^\times$ 及び円周 $\{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = |a|\}$ を含むアニュラス $A \subset \mathbb{C}$ を任意にとる. 関数 $f(z)$ がアニュラス A において正則であるとき, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} &\bullet [f(z)]_{|z|<|a|} - [f(z)]_{|z|>|a|} = 0, \\ &\bullet \left[\frac{f(z)}{1-(a/z)} \right]_{|z|<|a|} - \left[\frac{f(z)}{1-(a/z)} \right]_{|z|>|a|} = f(a)\delta\left(\frac{a}{z}\right). \end{aligned}$$

証明. 1 つ目の式は, アニュラス A で正則な関数 $f(z)$ が $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k$ ($z \in A$) なる格好の展開を持つことから従う. この展開は「 $|z| < |a|$ かつ $z \in A$ 」でも「 $|z| > |a|$ かつ $z \in A$ 」でも使えるので

$$\bullet [f(z)]_{|z|<|a|} - [f(z)]_{|z|>|a|} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k - \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k = 0.$$

2 つ目の式は, $\frac{f(z)}{1-(a/z)} = \frac{f(a)}{1-(a/z)} + z \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ とするときに現れる $g(z) := z \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ がアニュラス A で正則であることに気がつけばわかる:

$$\begin{aligned} &\bullet \left[\frac{f(z)}{1-(a/z)} \right]_{|z|<|a|} - \left[\frac{f(z)}{1-(a/z)} \right]_{|z|>|a|} \\ &= \left[\frac{f(a)}{1-(a/z)} + g(z) \right]_{|z|<|a|} - \left[\frac{f(a)}{1-(a/z)} + g(z) \right]_{|z|>|a|} \\ &= \left[\frac{f(a)}{1-(a/z)} \right]_{|z|<|a|} - \left[\frac{f(a)}{1-(a/z)} \right]_{|z|>|a|} = f(a)\delta\left(\frac{a}{z}\right). \quad \square \end{aligned}$$

既に見たように $\left[\frac{1}{1-z} \right]_{|z|<1} - \left[\frac{1}{1-z} \right]_{|z|>1} = \delta(z)$ なのであったが, これは符号 $\beta=\pm 1$ についての和として

$$\bullet \sum_{\beta=\pm 1} \beta \left[\frac{1}{1-z} \right]_{|z|^\beta < 1} = \delta(z)$$

とも書ける. 以下では, スペースの都合上, このような表記をすることもある.

命題 6.4. N を自然数とする. N 個の相異なる $\mathbb{C}^\times$ の元 $a_1, \dots, a_N$ 及び N 個の円周 $|z|=|a_i|$ ($1 \leq i \leq N$) を内部に含むアニュラス $A \subset \mathbb{C}$ を任意にとる. 関数 $f(z)$ がアニュラス A において正則であるとき, 次が成り立つ:

$$\bullet \sum_{\beta=\pm 1} \beta \left[\frac{f(z)}{\{1-(a_1/z)\} \cdots \{1-(a_N/z)\}} \right]_{\substack{|a_i/z|^\beta < 1 \\ (1 \leq i \leq N) \\ z \in A}} = \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{1}{1-(a_j/a_i)} f(a_i) \delta\left(\frac{a_i}{z}\right).$$

証明. まず, z の有理関数 $\frac{1}{\{1-(a_1/z)\} \cdots \{1-(a_N/z)\}}$ について

$$\bullet \frac{1}{\{1-(a_1/z)\} \cdots \{1-(a_N/z)\}} = \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{1}{1-(a_j/a_i)} \cdot \frac{1}{1-(a_i/z)}$$

が成り立つことに注意する (部分分数分解). これを見つつ次のようにする:

$$\begin{aligned} & \bullet \frac{f(z)}{\{1-(a_1/z)\} \cdots \{1-(a_N/z)\}} \\ &= \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{1}{1-(a_j/a_i)} \cdot \frac{f(a_i)}{1-(a_i/z)} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{1}{1-(a_j/a_i)} \cdot \frac{f(z)-f(a_i)}{1-(a_i/z)}}_{g(z) \text{ とおく}}. \end{aligned}$$

ここで定めた $g(z)$ はアニュラス A において正則であるので次が成り立つ:

$$\begin{aligned} & \bullet \sum_{\beta=\pm 1} \beta \left[\frac{f(z)}{\{1-(a_1/z)\} \cdots \{1-(a_N/z)\}} \right]_{\substack{|a_i/z|^\beta < 1 \\ (1 \leq i \leq N) \\ z \in A}} \\ &= \sum_{\beta=\pm 1} \beta \left[\sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{1}{1-(a_j/a_i)} \cdot \frac{f(a_i)}{1-(a_i/z)} + g(z) \right]_{\substack{|a_i/z|^\beta < 1 \\ (1 \leq i \leq N) \\ z \in A}} \\ &= \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{1}{1-(a_j/a_i)} f(a_i) \sum_{\beta=\pm 1} \beta \left[\frac{1}{1-(a_i/z)} \right]_{\substack{|a_i/z|^\beta < 1 \\ (1 \leq i \leq N) \\ z \in A}} = \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{1}{1-(a_j/a_i)} f(a_i) \delta\left(\frac{a_i}{z}\right). \quad \square \end{aligned}$$

形式ベキ級数 $\tilde{f}(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k \in \mathbb{C}[[z, z^{-1}]]$ の定数項 $c_0 \in \mathbb{C}$ を拾う操作を

$$\bullet \text{CT}_z[\tilde{f}(z)] := c_0$$

と書くことにする. ここで, あるアニュラス A で正則な関数 $f(z)$ の z についてのベキ展開を形式ベキ級数と思い直したもの $[f(z)]_{z \in A} \in \mathbb{C}[[z, z^{-1}]]$ の定数項 $\text{CT}_z[[f(z)]_{z \in A}]$ について見てみる. 先に少

し触れた通り, A の中を通りながら $\mathbb{C}$ の原点を反時計回りに取り囲む積分路 C を 1 つとるとき

$$\bullet f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k \quad (z \in A), \quad \bullet c_k = \oint_C \frac{dz}{2\pi i z} z^{-k} f(z)$$

なる表示ができる. このとき $[f(z)]_{z \in A} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k \in \mathbb{C}[[z, z^{-1}]]$ なので, この定数項は

$$\bullet \text{CT}_z[[f(z)]_{z \in A}] = c_0 = \oint_C \frac{dz}{2\pi i z} f(z)$$

である. 直感的には “ $\text{CT}_z \sim \oint_C \frac{dz}{2\pi i z}$ ” ということだが, 本文書ではこの程度の認識で十分である.

例 6.5. デルタ関数 $\delta(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} z^k \in \mathbb{C}[[z, z^{-1}]]$ の定数項は 1 である: $\text{CT}_z[\delta(z)] = 1$. 一方で

$$\bullet \left[\frac{1}{1-z} \right]_{|z|<1} - \left[\frac{1}{1-z} \right]_{|z|>1} = \delta(z)$$

であったので, この左辺の定数項を積分によって計算しても正しい結果が得られるはずである. これを実際にやってみる. その際, 例えば

$$\bullet \text{CT}_z \left[\left[\frac{1}{1-z} \right]_{|z|<1} \right]$$

を積分として計算する場合, 「開円盤 $|z|<1$ の中を通りながら $\mathbb{C}$ の原点を反時計回りに取り囲む積分路 C を 1 つとる」などと述べて

$$\bullet \text{CT}_z \left[\left[\frac{1}{1-z} \right]_{|z|<1} \right] = \oint_C \frac{dz}{2\pi i z} \cdot \frac{1}{1-z}$$

とするのが普通なのであろうが, 以下では単に

$$\bullet \text{CT}_z \left[\left[\frac{1}{1-z} \right]_{|z|<1} \right] = \oint_{|z|<1} \frac{dz}{2\pi i z} \cdot \frac{1}{1-z}$$

として済ませる (「被積分関数が正則なところでは積分路を変形できる」という性質から, 積分路は開円盤 $|z|<1$ の中を通りながら $\mathbb{C}$ の原点を反時計回りに取り囲むものであれば何でもよいので, このように書いてよい). これは

$$\bullet \text{CT}_z \left[\left[\frac{1}{1-z} \right]_{|z|<1} \right] = \oint_{|z|<1} \frac{dz}{2\pi i z} \cdot \frac{1}{1-z} = \oint_{|z|<1} \frac{dz}{2\pi i} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} \right) = 1$$

と求められる. 同様にすると

$$\bullet \text{CT}_z \left[\left[\frac{1}{1-z} \right]_{|z|>1} \right] = \oint_{|z|>1} \frac{dz}{2\pi i z} \cdot \frac{1}{1-z} = \oint_{|z|>1} \frac{dz}{2\pi i} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} \right) = 1 - 1 = 0$$

もわかる. これらによって

$$\bullet \text{CT}_z \left[\left[\frac{1}{1-z} \right]_{|z|<1} \right] - \text{CT}_z \left[\left[\frac{1}{1-z} \right]_{|z|>1} \right] = 1$$

であるが, これは確かに $\text{CT}_z[\delta(z)] = 1$ と一致する.

例 6.6. 先に述べた通り, 点 $a \in \mathbb{C}^\times$ が乗った円周 $|z|=|a|$ を含むアニュラス $A \subset \mathbb{C}$ において正則な関数 $f(z)$ について次が成り立つ:

$$\bullet \left[\frac{f(z)}{1-(a/z)} \right]_{\substack{|a/z|<1 \\ z \in A}} - \left[\frac{f(z)}{1-(a/z)} \right]_{\substack{|a/z|>1 \\ z \in A}} = f(a) \delta\left(\frac{a}{z}\right).$$

この左辺の定数項を拾うと次のようになる: 先に触れた例と同様の記法を用いると

$$\begin{aligned} & \bullet \text{CT}_z \left[\left[\frac{f(z)}{1-(a/z)} \right]_{\substack{|a/z|<1 \\ z \in A}} - \left[\frac{f(z)}{1-(a/z)} \right]_{\substack{|a/z|>1 \\ z \in A}} \right] \\ &= \oint_{\substack{|a/z|<1 \\ z \in A}} \frac{dz}{2\pi i z} \cdot \frac{f(z)}{1-(a/z)} - \oint_{\substack{|a/z|>1 \\ z \in A}} \frac{dz}{2\pi i z} \cdot \frac{f(z)}{1-(a/z)} \\ &= \oint_{|z|>|a|} \frac{dz}{2\pi i} \cdot \frac{f(z)}{z-a} - \oint_{\substack{|z|<|a| \\ z \in A}} \frac{dz}{2\pi i} \cdot \frac{f(z)}{z-a} = f(a). \end{aligned}$$

$|p|<1$ なる $p \in \mathbb{C}^\times$ によって定まる関数 $\theta_p(z) := (z; p)_\infty (pz^{-1}; p)_\infty$ ($z \in \mathbb{C}^\times$) をテータ関数と呼ぶ. ここで次のようなことを考える. $\mathbb{C}^\times$ 上の有理型関数 $\frac{1}{\theta_p(z)} = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{(pz; p)_\infty (pz^{-1}; p)_\infty}$ について, $f(z) := \frac{1}{(pz; p)_\infty (pz^{-1}; p)_\infty}$ はアニュラス $|p|<|z|<|p|^{-1}$ で正則で

$$\bullet \frac{1}{\theta_p(z)} = \frac{f(z)}{1-z} = \frac{f(1)}{1-z} + \frac{f(z)-f(1)}{1-z}$$

とできる ($f(1)=(p; p)_\infty^{-2}$). ここに現れた $g(z) := \frac{f(z)-f(1)}{1-z}$ はアニュラス $|p|<|z|<|p|^{-1}$ で正則なので次が成り立つ:

$$\begin{aligned} & \bullet \left[\frac{1}{\theta_p(z)} \right]_{|p|<|z|<1} - \left[\frac{1}{\theta_p(z)} \right]_{1<|z|<|p|^{-1}} \\ &= \left[\frac{f(1)}{1-z} + g(z) \right]_{|p|<|z|<1} - \left[\frac{f(1)}{1-z} + g(z) \right]_{1<|z|<|p|^{-1}} \\ &= \left[\frac{f(1)}{1-z} \right]_{|p|<|z|<1} - \left[\frac{f(1)}{1-z} \right]_{1<|z|<|p|^{-1}} = \frac{\delta(z)}{(p; p)_\infty^2}. \end{aligned}$$

この事実が, 楕円関数を分解する際に特に有効に働く.

命題 6.7. $a \in \mathbb{C}^\times$ と, 円周 $|z|=|a|$ を含み, かつアニュラス $|p|<|a/z|<|p|^{-1}$ に含まれるアニュラス $A \subset \mathbb{C}$ を任意にとる. 関数 $f(z)$ がアニュラス A で正則であるとき, 次が成り立つ:

$$\bullet \left[\frac{f(z)}{\theta_p(a/z)} \right]_{\substack{|p|<|a/z|<1 \\ z \in A}} - \left[\frac{f(z)}{\theta_p(a/z)} \right]_{\substack{1<|a/z|<|p|^{-1} \\ z \in A}} = \frac{f(a)}{(p; p)_\infty^2} \delta\left(\frac{a}{z}\right).$$

証明. 証明はこれまでやってきたようなことを繰り返せばよい. 関数 $\frac{f(z)}{\theta_p(a/z)}$ について

$$\bullet \frac{f(z)}{\theta_p(a/z)} = \frac{1}{1-(a/z)} \cdot \frac{f(z)}{(pz; p)_\infty (pz^{-1}; p)_\infty}$$

とでき, ここに現れた $g(z) := \frac{f(z)}{(pz; p)_\infty (pz^{-1}; p)_\infty}$ はアニュラス A で正則である. 更に

$$\bullet \frac{f(z)}{\theta_p(a/z)} = \frac{g(z)}{1-(a/z)} = \frac{g(a)}{1-(a/z)} + \frac{g(z)-g(a)}{1-(a/z)}$$

とできるが, ここにある $h(z) := \frac{g(z) - g(a)}{1 - (a/z)}$ もアニュラス A で正則なので次が成り立つ:

$$\begin{aligned} & \bullet \left[\frac{f(z)}{\theta_p(a/z)} \right]_{\substack{|p| < |a/z| < 1 \\ z \in A}} - \left[\frac{f(z)}{\theta_p(a/z)} \right]_{\substack{1 < |a/z| < |p|^{-1} \\ z \in A}} \\ &= \left[\frac{g(a)}{1 - (a/z)} + h(z) \right]_{\substack{|p| < |a/z| < 1 \\ z \in A}} - \left[\frac{g(a)}{1 - (a/z)} + h(z) \right]_{\substack{1 < |a/z| < |p|^{-1} \\ z \in A}} = g(a) \delta\left(\frac{a}{z}\right) = \frac{f(a)}{(p; p)_\infty^2} \delta\left(\frac{a}{z}\right). \quad \square \end{aligned}$$

今度は, N 個の複素数 $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}^\times$ で $a_i/a_j \notin p^{\mathbb{Z}}$ ($1 \leq i \neq j \leq N$) を満たすものと適当なアニュラスで正則な関数 $f(z)$ を含む

$$\bullet f(z) \prod_{i=1}^N \frac{1}{\theta_p(a_i/z)}$$

なる格好の関数について考える. この場合も「テータ関数とデルタ関数の関係」によってある結果が得られるが, その前に少し注意することがある. この場合に考えるのは, 適当なアニュラス A を含む

$$\bullet \left[f(z) \prod_{i=1}^N \frac{1}{\theta_p(a_i/z)} \right]_{\substack{|p| < |a_i/z| < 1 \\ (1 \leq i \leq N) \\ z \in A}}$$

なのであるが, ここで注意せねばならないのは, アニュラスたちの共通部分

$$\bullet \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |p| < |a_i/z| < 1 \ (1 \leq i \leq N)\} = \bigcap_{i=1}^N \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |p| < |a_i/z| < 1\}$$

が空集合になってしまっは困る, ということである. $\uparrow$ これが空でないための条件は落ち着けばわかる. 仮に $\{z \in \mathbb{C}^\times \mid |p| < |a_i/z| < 1 \ (1 \leq i \leq N)\} \neq \emptyset$ ならば, ある $z \in \mathbb{C}^\times$ があって $|p| < |a_i/z| < 1$ ($1 \leq i \leq N$) である. これは

$$\bullet \max\{|a_1|, \dots, |a_N|\} < |z| < \min\{|a_1|, \dots, |a_N|\} |p|^{-1}$$

とも書けるので, $\{z \in \mathbb{C}^\times \mid |p| < |a_i/z| < 1 \ (1 \leq i \leq N)\} \neq \emptyset$ であるならば

$$\bullet |p| < \frac{\min\{|a_1|, \dots, |a_N|\}}{\max\{|a_1|, \dots, |a_N|\}}$$

が必要である. 逆に $\uparrow$ これが満たされる場合には

$$\begin{aligned} & \bullet \emptyset \neq \{z \in \mathbb{C}^\times \mid \max\{|a_1|, \dots, |a_N|\} < |z| < \min\{|a_1|, \dots, |a_N|\} |p|^{-1}\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |p| < |a_i/z| < 1 \ (1 \leq i \leq N)\} \end{aligned}$$

が従う.

命題 6.8. $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}^\times$ 及び $|p| < 1$ なる $p \in \mathbb{C}^\times$ が条件 $a_i/a_j \notin p^{\mathbb{Z}}$ ($1 \leq i \neq j \leq N$) 及び

$$\bullet |p| < \frac{\min\{|a_1|, \dots, |a_N|\}}{\max\{|a_1|, \dots, |a_N|\}}$$

を満たすとする. このとき, 任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\bullet \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |p|^{k+1} < |a_i/z| < |p|^k \ (1 \leq i \leq N)\} \neq \emptyset.$$

最後の「任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対し …」の部分だけ補足する. $|p| < \frac{\min\{|a_1|, \dots, |a_N|\}}{\max\{|a_1|, \dots, |a_N|\}}$ ならば

$$\bullet \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |p| < |a_i/z| < 1 \ (1 \leq i \leq N)\} \neq \emptyset$$

なのは既に知っている. そこで $x \in \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |p| < |a_i/z| < 1 \ (1 \leq i \leq N)\}$ 及び $k \in \mathbb{Z}$ を任意にとると

$$\bullet |p|^{k+1} < |a_i/p^{-k}x| < |p|^k \quad (1 \leq i \leq N)$$

が成り立つので $p^{-k}x \in \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |p|^{k+1} < |a_i/z| < |p|^k \ (1 \leq i \leq N)\}$ である (よって空でない).

命題 6.9. $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}^\times$ 及び $|p| < 1$ なる $p \in \mathbb{C}^\times$ が条件 $a_i/a_j \notin p^{\mathbb{Z}}$ ($1 \leq i \neq j \leq N$) 及び

$$\bullet |p| < \frac{\min\{|a_1|, \dots, |a_N|\}}{\max\{|a_1|, \dots, |a_N|\}}$$

を満たすとする. 更にアニュラス $A \subset \mathbb{C}$ で, N 個の円周 $|z| = |a_i|$ ($1 \leq i \leq N$) を含み, かつ

$$\bullet \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |p| < |a_i/z| < |p|^{-1} \ (1 \leq i \leq N)\}$$

に含まれるものをとる. 関数 $f(z)$ がアニュラス A で正則であるとき, 次が成り立つ:

$$\bullet \sum_{\beta=\pm 1} \beta \left[f(z) \prod_{i=1}^N \frac{1}{\theta_p(a_i/z)} \right]_{\substack{|p| < |a_i/z|^\beta < 1 \\ (1 \leq i \leq N) \\ z \in A}} = \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{1}{\theta_p(a_j/a_i)} \cdot \frac{f(a_i)}{(p; p)_\infty^2} \delta\left(\frac{a_i}{z}\right).$$

証明. 基本的には既に見た命題と同様にすればよい. まず

$$\bullet g(z) := f(z) \prod_{i=1}^N \frac{1}{(pa_i/z; p)_\infty (pz/a_i; p)_\infty}$$

とおくと, この $g(z)$ はアニュラス A で正則で次のようにできる:

$$\begin{aligned} \bullet f(z) \prod_{i=1}^N \frac{1}{\theta_p(a_i/z)} &= g(z) \prod_{i=1}^N \frac{1}{1-(a_i/z)} = \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{1}{1-(a_j/a_i)} \cdot \frac{g(z)}{1-(a_i/z)} \\ &= \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{1}{1-(a_j/a_i)} \cdot \frac{g(a_i)}{1-(a_i/z)} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{1}{1-(a_j/a_i)} \cdot \frac{g(z)-g(a_i)}{1-(a_i/z)}}_{h(z) \text{ とおく}}. \end{aligned}$$

更に, この $h(z)$ はアニュラス A で正則なので次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{\beta=\pm 1} \beta \left[f(z) \prod_{i=1}^N \frac{1}{\theta_p(a_i/z)} \right]_{\substack{|p| < |a_i/z|^\beta < 1 \\ (1 \leq i \leq N) \\ z \in A}} &= \sum_{\beta=\pm 1} \beta \left[\sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{1}{1-(a_j/a_i)} \cdot \frac{g(a_i)}{1-(a_i/z)} + h(z) \right]_{\substack{|p| < |a_i/z|^\beta < 1 \\ (1 \leq i \leq N) \\ z \in A}} \\ &= \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{1}{1-(a_j/a_i)} \cdot g(a_i) \sum_{\beta=\pm 1} \beta \left[\frac{1}{1-(a_i/z)} \right]_{\substack{|p| < |a_i/z|^\beta < 1 \\ (1 \leq i \leq N) \\ z \in A}} \\ &= \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{1}{\theta_p(a_j/a_i)} \cdot \frac{f(a_i)}{(p; p)_\infty^2} \delta\left(\frac{a_i}{z}\right). \quad \square \end{aligned}$$

以下, 本文書で必要となる楕円関数の展開や分解について述べる.

例 6.10. $a \in \mathbb{C}^\times \setminus p^\mathbb{Z}$ とする. このとき, まず次が成り立つ:

$$\bullet \left[\frac{\theta_p(az)}{\theta_p(z)} \right]_{|p| < |z| < 1} - \left[\frac{\theta_p(az)}{\theta_p(z)} \right]_{1 < |z| < |p|^{-1}} = \frac{\theta_p(a)}{(p; p)_\infty^2} \delta(z).$$

ここで $\tilde{f}(z) := \left[\frac{\theta_p(az)}{\theta_p(z)} \right]_{|p| < |z| < 1} \in \mathbb{C}[[z, z^{-1}]]$ とおくと

$$\bullet \tilde{f}(pz) = \left[\frac{\theta_p(paz)}{\theta_p(pz)} \right]_{|p| < |pz| < 1} = a^{-1} \left[\frac{\theta_p(az)}{\theta_p(z)} \right]_{1 < |z| < |p|^{-1}}$$

なので, $\tilde{f}(z)$ について

$$\bullet \tilde{f}(z) - a\tilde{f}(pz) = \frac{\theta_p(a)}{(p; p)_\infty^2} \delta(z)$$

がわかる. ここで $\tilde{f}(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k$ なる展開を仮定すると

$$\bullet c_k - ap^k c_k = \frac{\theta_p(a)}{(p; p)_\infty^2} \Leftrightarrow c_k = \frac{\theta_p(a)}{(p; p)_\infty^2} \cdot \frac{1}{1 - ap^k} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

を得る ($a \in \mathbb{C}^\times \setminus p^\mathbb{Z}$ なので $1 - ap^k \neq 0$ ($k \in \mathbb{Z}$) である). こうして

$$\bullet \tilde{f}(z) = \left[\frac{\theta_p(az)}{\theta_p(z)} \right]_{|p| < |z| < 1} = \frac{\theta_p(a)}{(p; p)_\infty^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{z^k}{1 - ap^k} \in \mathbb{C}[[z, z^{-1}]]$$

であることがわかったが, 言い換えると, $\mathbb{C}^\times$ 上の有理型関数 $\frac{\theta_p(az)}{\theta_p(z)}$ について

$$\bullet \frac{\theta_p(az)}{\theta_p(z)} = \frac{\theta_p(a)}{(p; p)_\infty^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{z^k}{1 - ap^k} \quad (|p| < |z| < 1)$$

が成り立つ, ということである.

例 6.11. 複素数たち $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}^\times$, $b_1, \dots, b_N \in \mathbb{C}^\times$ 及び $p \in \mathbb{C}^\times$ について

$$\bullet a_i/a_j \notin p^\mathbb{Z} \quad (1 \leq i \neq j \leq N), \quad \bullet a_i/b_j \notin p^\mathbb{Z} \quad (1 \leq i, j \leq N),$$

$$\bullet |p| < \frac{\min\{|a_1|, \dots, |a_N|\}}{\max\{|a_1|, \dots, |a_N|\}}$$

が成り立つとする. このとき

$$\bullet \left[\prod_{i=1}^N \frac{\theta_p(b_i/z)}{\theta_p(a_i/z)} \right]_{|p| < |a_i/z| < 1 \atop (1 \leq i \leq N)} - \left[\prod_{i=1}^N \frac{\theta_p(b_i/z)}{\theta_p(a_i/z)} \right]_{1 < |a_i/z| < |p|^{-1} \atop (1 \leq i \leq N)}$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{\prod_{j=1}^N \theta_p(b_j/a_i)}{(p; p)_\infty^2 \prod_{j \neq i} \theta_p(a_j/a_i)} \delta\left(\frac{a_i}{z}\right) = \sum_{i=1}^N \frac{\theta_p(b_i/a_i)}{(p; p)_\infty^2} \prod_{j \neq i} \frac{\theta_p(b_j/a_i)}{\theta_p(a_j/a_i)} \delta\left(\frac{a_i}{z}\right)$$

が成り立つ. これは

$$\bullet \tilde{F}(z) := \left[\prod_{i=1}^N \frac{\theta_p(b_i/z)}{\theta_p(a_i/z)} \right]_{|p| < |a_i/z| < 1 \atop (1 \leq i \leq N)} \in \mathbb{C}[[z, z^{-1}]]$$

を使うとき, $c:=b_1 \cdots b_N / a_1 \cdots a_N$ とおくと

$$\bullet \tilde{F}(z) - c\tilde{F}(p^{-1}z) = \sum_{i=1}^N \frac{\theta_p(b_i/a_i)}{(p; p)_\infty^2} \prod_{j \neq i} \frac{\theta_p(b_j/a_i)}{\theta_p(a_j/a_i)} \delta\left(\frac{a_i}{z}\right)$$

と書ける. ここから先は c が $p^\mathbb{Z}$ に属するか否かによって場合分けが生じる.

(i) $c \notin p^\mathbb{Z}$ の場合. $\tilde{F}(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k z^{-k}$ なる展開を仮定すると

$$\bullet (1 - cp^k) A_k = \sum_{i=1}^N \frac{\theta_p(b_i/a_i)}{(p; p)_\infty^2} \prod_{j \neq i} \frac{\theta_p(b_j/a_i)}{\theta_p(a_j/a_i)} \cdot a_i^k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

である. $c \notin p^\mathbb{Z}$ なので $1 - cp^k \neq 0$ ($k \in \mathbb{Z}$) であることから, 展開の係数 A_k ($k \in \mathbb{Z}$) は

$$\bullet A_k = \sum_{i=1}^N \frac{\theta_p(b_i/a_i)}{(p; p)_\infty^2} \prod_{j \neq i} \frac{\theta_p(b_j/a_i)}{\theta_p(a_j/a_i)} \cdot \frac{a_i^k}{1 - cp^k} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

と求められる. これと先に触れた $\frac{\theta_p(az)}{\theta_p(z)} = \frac{\theta_p(a)}{(p; p)_\infty^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{z^k}{1 - ap^k}$ ($|p| < |z| < 1$) によって

$$\bullet \prod_{i=1}^N \frac{\theta_p(b_i/z)}{\theta_p(a_i/z)} = \sum_{i=1}^N \frac{\theta_p(b_i/a_i)}{\theta_p(c)} \prod_{j \neq i} \frac{\theta_p(b_j/a_i)}{\theta_p(a_j/a_i)} \cdot \frac{\theta_p(ca_i/z)}{\theta_p(a_i/z)}$$

が条件 $|p| < \frac{\min\{|a_1|, \dots, |a_N|\}}{\max\{|a_1|, \dots, |a_N|\}}, |p| < |a_i/z| < 1$ ($1 \leq i \leq N$) の下で成り立つことがわかった. ただ, ここまで来れば, これら p, z に対する条件は外せるので, $\uparrow$ これは $\mathbb{C}^\times$ 上の有理型関数の恒等式であると理解できる.

(ii) $c \in p^\mathbb{Z}$ の場合. ある $k_0 \in \mathbb{Z}$ があって $c = p^{k_0}$ であったとすると, $\tilde{G}(z) := z^{-k_0} \tilde{F}(z)$ は

$$\bullet \tilde{G}(z) - \tilde{G}(p^{-1}z) = \sum_{i=1}^N \frac{\theta_p(b_i/a_i)}{(p; p)_\infty^2} \prod_{j \neq i} \frac{\theta_p(b_j/a_i)}{\theta_p(a_j/a_i)} \cdot a_i^{-k_0} \delta\left(\frac{a_i}{z}\right)$$

を満たす. $\tilde{G}(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k z^{-k}$ なる展開を仮定すると, B_0 を除いて

$$\bullet B_k = \sum_{i=1}^N \frac{\theta_p(b_i/a_i)}{(p; p)_\infty^2} \prod_{j \neq i} \frac{\theta_p(b_j/a_i)}{\theta_p(a_j/a_i)} \cdot \frac{a_i^{-k_0+k}}{1 - p^k} \quad (k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

と求まる. ここで, Eisenstein の楕円関数 $E_1(z) := -D_z \log \theta_p(z)$ について

$$\bullet E_1(z) = \sum_{n \neq 0} \frac{z^n}{1 - p^n} \quad (|p| < |z| < 1)$$

が成り立つことから, 今回の $c = p^{k_0}$ の場合には

$$\bullet z^{-k_0} \prod_{i=1}^N \frac{\theta_p(b_i/z)}{\theta_p(a_i/z)} = B_0 + \sum_{i=1}^N \frac{\theta_p(b_i/a_i)}{(p; p)_\infty^2} \prod_{j \neq i} \frac{\theta_p(b_j/a_i)}{\theta_p(a_j/a_i)} a_i^{-k_0} E_1(a_i/z)$$

が条件 $|p| < \frac{\min\{|a_1|, \dots, |a_N|\}}{\max\{|a_1|, \dots, |a_N|\}}, |p| < |a_i/z| < 1$ ($1 \leq i \leq N$) の下で成り立つ (例によって, これらの条件は外せる). 定数 B_0 は, 例えば $\uparrow$ この両辺に $z = b_1$ を代入したりすれば決められる.

例 6.12. 先の例 6.11 において $t \in \mathbb{C}^\times$ 及び $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{C}^\times$ によって $a_i \rightarrow tx_i$, $b_i \rightarrow x_i$ と置き換えたものを考える. そうすると, これら $t, x_1, \dots, x_N$ について

$$\begin{aligned} & \bullet t \notin p^{\mathbb{Z}}, \quad \bullet x_i/x_j \notin p^{\mathbb{Z}} \quad (1 \leq i \neq j \leq N), \quad \bullet tx_i/x_j \notin p^{\mathbb{Z}} \quad (1 \leq i \neq j \leq N), \\ & \bullet |p| < \frac{\min\{|x_1|, \dots, |x_N|\}}{\max\{|x_1|, \dots, |x_N|\}} \end{aligned}$$

であるが, この状況下で次が成り立つ:

$$\begin{aligned} & \bullet \left[\prod_{i=1}^N \frac{\theta_p(x_i/z)}{\theta_p(tx_i/z)} \right]_{|p| < |tx_i/z| < 1 \atop (1 \leq i \leq N)} - \left[\prod_{i=1}^N \frac{\theta_p(x_i/z)}{\theta_p(tx_i/z)} \right]_{1 < |tx_i/z| < |p|^{-1} \atop (1 \leq i \leq N)} \\ &= \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)} \delta\left(t \frac{x_i}{z}\right). \end{aligned}$$

ここで $\tilde{f}(z) := \left[\prod_{i=1}^N \frac{\theta_p(x_i/z)}{\theta_p(tx_i/z)} \right]_{|p| < |tx_i/z| < 1 \atop (1 \leq i \leq N)}$ とおくと, これは

$$\bullet \tilde{f}(z) - t^{-N} \tilde{f}(p^{-1}z) = \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)} \delta\left(t \frac{x_i}{z}\right)$$

と書かれる. ここで一般に, 形式べき級数 $\tilde{F}(z) \in \mathbb{C}[[z, z^{-1}]]$ と $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ について

$$\bullet \text{CT}_z[\tilde{F}(\lambda z)] = \text{CT}_z[\tilde{F}(z)]$$

であることから, 上の両辺の z についての定数項を拾うことで次を得る:

$$\begin{aligned} & \bullet (1-t^{-N}) \text{CT}_z[\tilde{f}(z)] = (1-t^{-N}) \text{CT}_z \left[\left[\prod_{i=1}^N \frac{\theta_p(x_i/z)}{\theta_p(tx_i/z)} \right]_{|p| < |tx_i/z| < 1 \atop (1 \leq i \leq N)} \right] \\ &= \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)}. \end{aligned}$$

t が p と独立であるとき, $p \rightarrow 0$ とすると

$$\bullet (1-t^{-N}) \text{CT}_z \left[\left[\prod_{i=1}^N \frac{1-(x_i/z)}{1-t(x_i/z)} \right]_{|tx_i/z| < 1 \atop (1 \leq i \leq N)} \right] = t^{-N+1} (1-t^{-1}) \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j}$$

である. また

$$\bullet \left[\prod_{i=1}^N \frac{1-(x_i/z)}{1-t(x_i/z)} \right]_{|tx_i/z| < 1 \atop (1 \leq i \leq N)} = 1 + \left(\frac{x_1}{z}, \dots, \frac{x_N}{z} \text{ の } 1 \text{ 乗以上の項たち} \right)$$

であることから

$$\bullet (1-t^{-N}) \text{CT}_z \left[\left[\prod_{i=1}^N \frac{1-(x_i/z)}{1-t(x_i/z)} \right]_{|tx_i/z| < 1 \atop (1 \leq i \leq N)} \right] = 1 - t^{-N} = t^{-N} (t-1) \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j}$$

となる. これを整理すると次を得る :

$$\bullet \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} = \frac{1-t^N}{1-t}.$$

例 6.13. 例 6.11 の (ii) の場合の最も簡単ものとして次がある : $q \notin p^{\mathbb{Z}}, t \notin p^{\mathbb{Z}}, qt^{-1} \notin p^{\mathbb{Z}}$ なる複素数 $q, t \in \mathbb{C}^\times$ と Eisenstein の楕円関数 $E_1(z) = -D_z \log \theta_p(z)$ について

$$\bullet \frac{\theta_p(tz)\theta_p(qt^{-1}z)}{\theta_p(z)\theta_p(qz)} = \frac{\theta_p(t)\theta_p(qt^{-1})}{(p;p)_\infty^2 \theta_p(q)} \{E_1(z) - E_1(qz)\} + (z \text{ を含まない定数}).$$

楕円 Ruijsenaars 作用素たちの可換性の証明に必要な「Ruijsenaars 恒等式」は, 本質的には ↑ これによって成り立つ.

6.3 付録 3 : 楕円 Ruijsenaars 作用素が空間 $\Lambda_N(p)$ に作用すること

ここでは第 1 章の 1.2 「楕円 Ruijsenaars 作用素について」にて述べた「楕円 Ruijsenaars 作用素が多変数関数の空間 $\Lambda_N(p)$ に作用すること」の証明を述べる.

命題 6.14. $|p| < 1$ なる $p \in \mathbb{C}^\times$ 及び

$$\bullet x_i/x_j \notin p^{\mathbb{Z}} \quad (1 \leq i \neq j \leq N)$$

である $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{C}^\times)^N$ の組 $(\mathbf{x}, p) \in (\mathbb{C}^\times)^{N+1}$ の全体で定義された $(N+1)$ 変数関数 $f(\mathbf{x}; p)$ のうち, ある $0 < \delta \leq 1$ がとれて,

$$\bullet |p| < \delta, \quad \bullet \delta \leq \frac{\min\{|x_1|, \dots, |x_N|\}}{\max\{|x_1|, \dots, |x_N|\}}$$

なる条件を満たす点 $(\mathbf{x}, p) \in (\mathbb{C}^\times)^{N+1}$ においては

$$\bullet f(\mathbf{x}; p) = \sum_{d \geq 0} p^d \sum_{\substack{\lambda, \mu \in \mathcal{P} \\ |\mu| \leq d}} c_{\lambda, \mu}^d p_\lambda(\mathbf{x}) p_{-\mu}(\mathbf{x}) = \sum_{d \geq 0} p^d \sum_{\substack{\mu \in \mathcal{P} \\ |\mu| \leq d}} p_{-\mu}(\mathbf{x}) \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} c_{\lambda, \mu}^d p_\lambda(\mathbf{x})$$

なる展開が可能で, かつ, 各 $d \geq 0, \mu \in \mathcal{P}$ に対し

$$\bullet \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} c_{\lambda, \mu}^d p_\lambda(\mathbf{x})$$

が有限和になるようなものの全体を $\Lambda_N(p)$ と書く. 楕円 Ruijsenaars 作用素 $D_N^{(r)}(p)$ ($r \in \{0, 1, \dots, N\}$) はこの $\Lambda_N(p)$ に作用する.

証明. 以下, 楕円 Ruijsenaars 作用素 $D_N^{(r)}(p)$ ($r \in \{0, 1, \dots, N\}$) を

$$\bullet D_N^{(r)}(p) = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ \#I=r}} A_I^{(r)}(\mathbf{x}; p) \prod_{i \in I} T_{q, x_i}, \quad \bullet A_I^{(r)}(\mathbf{x}; p) := t^{\frac{r(r-1)}{2}} \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} \frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)}$$

と表記する. また $q_k(\mathbf{x}) := p^{\max\{0, -k\}} p_k(\mathbf{x}) \in \Lambda_N(p)$ ($k \in \mathbb{Z}$) とおく.

上の命題を示すには, 任意の $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\bullet D_N^{(r)}(p) q_{k_1}(\mathbf{x}) \cdots q_{k_m}(\mathbf{x}) \in \Lambda_N(p)$$

が成り立つことを示せばよいが, ここで

$$\bullet D_N^{(r)}(p)q_{k_1}(\mathbf{x})\cdots q_{k_m}(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ \#I=r}} A_I^{(r)}(\mathbf{x}; p) \prod_{a=1}^m \left\{ p^{\max\{0, -k_a\}} (q^{k_a} - 1) \sum_{j_a \in I} x_{j_a}^{k_a} + q_{k_a}(\mathbf{x}) \right\}$$

なので, 目的のためには, $\#I=r$ なる $I \subset \{1, \dots, N\}$ に対し $p_k^I(\mathbf{x}) := \sum_{i \in I} x_i^k$ ($k \in \mathbb{Z}$) とおくとき

$$\bullet p^{\sum_{a=1}^m \max\{0, -k_a\}} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ \#I=r}} A_I^{(r)}(\mathbf{x}; p) p_{k_1}^I(\mathbf{x}) \cdots p_{k_m}^I(\mathbf{x}) \in \Lambda_N(p) \quad (k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z})$$

であることを示せばよい. 更にそのためには, $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ であるとき

$$\bullet p_{k_1}^I(\mathbf{x}) \cdots p_{k_m}^I(\mathbf{x})$$

が $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$ について対称であることに注意すると, 任意の $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\bullet p^{\sum_{a=1}^r \max\{0, -k_a\}} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ \#I=r}} A_I^{(r)}(\mathbf{x}; p) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} x_{i_1}^{k_{\sigma(1)}} \cdots x_{i_r}^{k_{\sigma(r)}} \in \Lambda_N(p)$$

であることを示せば十分である.

先に, 複素数 $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{C}^\times$ と楕円モジュラス $p \in \mathbb{C}^\times$ を

$$\bullet x_i/x_j \notin p^\mathbb{Z} \quad (1 \leq i \neq j \leq N), \quad \bullet |p| < \frac{\min\{|x_1|, \dots, |x_N|\}}{\max\{|x_1|, \dots, |x_N|\}}$$

を満たすようにとるとき,

$$\bullet \tilde{f}(z) := \left[\prod_{i=1}^N \frac{\theta_p(x_i/z)}{\theta_p(tx_i/z)} \right]_{\substack{|p| < |tx_i/z| < 1 \\ (1 \leq i \leq N)}} \in \mathbb{C}[[z, z^{-1}]]$$

について

$$\bullet \tilde{f}(z) - t^{-N} \tilde{f}(p^{-1}z) = \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \sum_{i=1}^N A_i(\mathbf{x}; p) \delta\left(t \frac{x_i}{z}\right)$$

が成り立つことを述べたが, これをうまく使う. また,

$$\bullet f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) := \prod_{1 \leq a < b \leq r} \frac{\theta_p(z_b/z_a)^2}{\theta_p(tz_b/z_a) \theta_p(t^{-1}z_b/z_a)}$$

とおくと次が成り立つ: $I = \{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, N\}$ に対し

$$\bullet A_{i_1}(\mathbf{x}; p) \cdots A_{i_r}(\mathbf{x}; p) f_p^{(r)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) = A_I^{(r)}(\mathbf{x}; p).$$

これは次のようにして確かめられる:

$$\begin{aligned} & \bullet A_{i_1}(\mathbf{x}; p) \cdots A_{i_r}(\mathbf{x}; p) f_p^{(r)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) \\ &= A_{i_1}(\mathbf{x}; p) \cdots A_{i_r}(\mathbf{x}; p) \prod_{1 \leq a < b \leq r} \frac{\theta_p(x_{i_b}/x_{i_a})^2}{\theta_p(tx_{i_b}/x_{i_a}) \theta_p(t^{-1}x_{i_b}/x_{i_a})} \\ &= t^{\frac{r(r-1)}{2}} \prod_{i \in I} \prod_{j \neq i} \frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)} \prod_{\substack{k, \ell \in I \\ k \neq \ell}} \frac{\theta_p(x_k/x_\ell)}{\theta_p(tx_k/x_\ell)} \\ &= t^{\frac{r(r-1)}{2}} \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} \frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)} \times \prod_{\substack{i, j \in I \\ j \neq i}} \frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)} \prod_{\substack{k, \ell \in I \\ k \neq \ell}} \frac{\theta_p(x_k/x_\ell)}{\theta_p(tx_k/x_\ell)} = A_I^{(r)}(\mathbf{x}; p). \end{aligned}$$

これらのことによって

$$\begin{aligned} & \bullet f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \left\{ \tilde{f}(z_1) - t^{-N} \tilde{f}(p^{-1} z_1) \right\} \cdots \left\{ \tilde{f}(z_r) - t^{-N} \tilde{f}(p^{-1} z_r) \right\} \\ &= \left\{ \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^r \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ \#I=r}} A_I^{(r)}(\mathbf{x}; p) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \delta\left(t \frac{x_{i_{\sigma(1)}}}{z_1}\right) \cdots \delta\left(t \frac{x_{i_{\sigma(r)}}}{z_r}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ. この両辺に $z_1^{k_1} \cdots z_r^{k_r}$ をかけると

$$\begin{aligned} & \bullet z_1^{k_1} \cdots z_r^{k_r} f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \prod_{i=1}^r \left\{ \tilde{f}(z_i) - t^{-N} \tilde{f}(p^{-1} z_i) \right\} \\ &= \left\{ \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^r t^{k_1 + \cdots + k_r} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ \#I=r}} A_I^{(r)}(\mathbf{x}; p) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} x_{i_{\sigma(1)}}^{k_1} \cdots x_{i_{\sigma(r)}}^{k_r} \delta\left(t \frac{x_{i_{\sigma(1)}}}{z_1}\right) \cdots \delta\left(t \frac{x_{i_{\sigma(r)}}}{z_r}\right) \end{aligned}$$

であるが, $z_1, \dots, z_r$ についての定数項を拾うと次のようになる :

$$\begin{aligned} & \bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[z_1^{k_1} \cdots z_r^{k_r} f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \prod_{i=1}^r \left\{ \tilde{f}(z_i) - t^{-N} \tilde{f}(p^{-1} z_i) \right\} \right] \\ &= \left\{ \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^r t^{k_1 + \cdots + k_r} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ \#I=r}} A_I^{(r)}(\mathbf{x}; p) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} x_{i_{\sigma(1)}}^{k_1} \cdots x_{i_{\sigma(r)}}^{k_r} \\ &= \left\{ \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^r t^{k_1 + \cdots + k_r} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ \#I=r}} A_I^{(r)}(\mathbf{x}; p) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} x_{i_1}^{k_{\sigma(1)}} \cdots x_{i_r}^{k_{\sigma(r)}}. \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} & \bullet p^{\sum_{a=1}^r \max\{0, -k_a\}} \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[z_1^{k_1} \cdots z_r^{k_r} f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r) \prod_{i=1}^r \left\{ \tilde{f}(z_i) - t^{-N} \tilde{f}(p^{-1} z_i) \right\} \right] \\ &= \left\{ \frac{t^{-N+1} \theta_p(t^{-1})}{(p; p)_\infty^2} \right\}^r t^{k_1 + \cdots + k_r} p^{\sum_{a=1}^r \max\{0, -k_a\}} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ \#I=r}} A_I^{(r)}(\mathbf{x}; p) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} x_{i_1}^{k_{\sigma(1)}} \cdots x_{i_r}^{k_{\sigma(r)}} \end{aligned}$$

であるが, あとは左辺の元が $\Lambda_N(p)$ に入ることを確かめればよい. ここで次のことに注意する :

$$\begin{aligned} & \bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[z_1^{k_1} \cdots z_r^{k_r} f_p^{(r)}(z) \prod_{i=1}^r \left\{ \tilde{f}(z_i) - t^{-N} \tilde{f}(p^{-1} z_i) \right\} \right] \\ &= \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[\text{Sym}_r(z_1^{k_1} \cdots z_r^{k_r}) f_p^{(r)}(z) \prod_{i=1}^r \left\{ \tilde{f}(z_i) - t^{-N} \tilde{f}(p^{-1} z_i) \right\} \right] \\ &= \sum_{a=0}^r (-t^{-N})^{r-a} \binom{r}{a} \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[\text{Sym}_r(z_1^{k_1} \cdots z_r^{k_r}) f_p^{(r)}(z) \tilde{f}(z_1) \cdots \tilde{f}(z_a) \tilde{f}(p^{-1} z_{a+1}) \cdots \tilde{f}(p^{-1} z_r) \right]. \end{aligned}$$

上に現れた積分

$$\begin{aligned} & \bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[\text{Sym}_r(z_1^{k_1} \cdots z_r^{k_r}) f_p^{(r)}(z) \tilde{f}(z_1) \cdots \tilde{f}(z_a) \tilde{f}(p^{-1} z_{a+1}) \cdots \tilde{f}(p^{-1} z_r) \right] \\ &= \oint_{C_1^{(a)}} \frac{dz_1}{2\pi i z_1} \cdots \oint_{C_r^{(a)}} \frac{dz_r}{2\pi i z_r} \text{Sym}_r(z_1^{k_1} \cdots z_r^{k_r}) f_p^{(r)}(z) \tilde{f}(z_1) \cdots \tilde{f}(z_a) \tilde{f}(p^{-1} z_{a+1}) \cdots \tilde{f}(p^{-1} z_r) \end{aligned}$$

において $|t| < |q|$ 及び $|p| < |t|^2$ を仮定し, 積分路たち $C_1^{(a)}, \dots, C_r^{(a)}$ は次の条件を満たすようにとる :

- 任意の $z_1 \in C_1^{(a)}, z_2 \in C_2^{(a)}, \dots, z_r \in C_r^{(a)}$ について次が成り立つ :
 - $|p| < |tx_i/z_k| < 1 \quad (1 \leq i \leq N, 1 \leq k \leq a),$
 - $1 < |tx_i/z_k| < |p|^{-1} \quad (1 \leq i \leq N, a+1 \leq k \leq r),$
 - $|q|^{-1}|p| < |z_\ell/z_k| < |t| \quad (1 \leq k < \ell \leq a \text{ または } 1 \leq k \leq a, a+1 \leq \ell \leq r),$
 - $|q|^{-1}|p| < |z_\ell/z_k| < |t| \cdot |p|^{-1} \quad (a+1 \leq k < \ell \leq r),$
 - $|t|^{-1}|p| < |z_\ell/z_k| < |t| \quad (1 \leq k < \ell \leq a \text{ または } 1 \leq k \leq a, a+1 \leq \ell \leq r),$
 - $|t| < |z_\ell/z_k| < |t|^{-1} \quad (a+1 \leq k < \ell \leq r).$

よって, 目的のためには

$$\bullet p^{\sum_{i=1}^r \max\{0, -k_i\}} \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[\text{Sym}_r(z_1^{k_1} \dots z_r^{k_r}) f_p^{(r)}(z) \tilde{f}(z_1) \dots \tilde{f}(z_a) \tilde{f}(p^{-1}z_{a+1}) \dots \tilde{f}(p^{-1}z_r) \right] \in \Lambda_N(p)$$

が示せればよいが, ここで更に

$$\begin{aligned} & \bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[\text{Sym}_r(z_1^{k_1} \dots z_r^{k_r}) f_p^{(r)}(z) \tilde{f}(z_1) \dots \tilde{f}(z_a) \tilde{f}(p^{-1}z_{a+1}) \dots \tilde{f}(p^{-1}z_r) \right] \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[z_1^{k_{\sigma(1)}} \dots z_r^{k_{\sigma(r)}} f_p^{(r)}(z) \tilde{f}(z_1) \dots \tilde{f}(z_a) \tilde{f}(p^{-1}z_{a+1}) \dots \tilde{f}(p^{-1}z_r) \right] \end{aligned}$$

から, 結局は次を示せばよいことがわかる.

- 任意の $\ell_1, \dots, \ell_r \in \mathbb{Z}$ 及び $0 \leq a \leq r$ なる $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し
- $p^{\sum_{i=1}^r \max\{0, -\ell_i\}} \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[z_1^{\ell_1} \dots z_r^{\ell_r} f_p^{(r)}(z) \tilde{f}(z_1) \dots \tilde{f}(z_a) \tilde{f}(p^{-1}z_{a+1}) \dots \tilde{f}(p^{-1}z_r) \right] \in \Lambda_N(p).$

以下, これを示すつもりで話を進める. ここで $z_{a+1}, \dots, z_r$ をみな p 倍すると

$$\begin{aligned} & \bullet p^{\sum_{i=1}^r \max\{0, -\ell_i\}} \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[z_1^{\ell_1} \dots z_r^{\ell_r} f_p^{(r)}(z) \tilde{f}(z_1) \dots \tilde{f}(z_a) \tilde{f}(p^{-1}z_{a+1}) \dots \tilde{f}(p^{-1}z_r) \right] \\ &= p^{\sum_{i=1}^r \max\{0, -\ell_i\}} p^{\ell_{a+1}} \dots p^{\ell_r} \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[z_1^{\ell_1} \dots z_r^{\ell_r} T_{p, z_{a+1}} \dots T_{p, z_r} f_p^{(r)}(z) \times \tilde{f}(z_1) \dots \tilde{f}(z_r) \right] \\ &= p^{\sum_{i=1}^a \max\{0, -\ell_i\} + \sum_{j=a+1}^r \max\{0, \ell_j\}} \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[z_1^{\ell_1} \dots z_r^{\ell_r} f_p^{(r)}(z) \tilde{f}(z_1) \dots \tilde{f}(z_r) \right] \end{aligned}$$

となる. ここで $\max\{0, -x\} + x = \max\{0, x\}$ ($x \in \mathbb{R}$) を用いた.

ここに現れた

$$\bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[z_1^{\ell_1} \dots z_r^{\ell_r} f_p^{(r)}(z) \tilde{f}(z_1) \dots \tilde{f}(z_r) \right] = \oint_{C_1^{(a)}} \frac{dz_1}{2\pi i z_1} \dots \oint_{C_r^{(a)}} \frac{dz_r}{2\pi i z_r} z_1^{\ell_1} \dots z_r^{\ell_r} f_p^{(r)}(z) \tilde{f}(z_1) \dots \tilde{f}(z_r)$$

においては $|t| < |q|$ 及び $|p| < |t|^2$ を仮定し, この中の積分路 $C_1^{(a)}, \dots, C_r^{(a)}$ は次のようにとる:

- 任意の $z_1 \in C_1'^{(a)}, z_2 \in C_2'^{(a)}, \dots, z_r \in C_r'^{(a)}$ について次が成り立つ :
 - $|p| < |tx_i/z_k| < 1 \quad (1 \leq i \leq N, 1 \leq k \leq r),$
 - $|q|^{-1}|p| < |z_\ell/z_k| < |t| \quad (1 \leq k < \ell \leq a),$
 - $|q|^{-1}|p| < |z_\ell/z_k| < |t| \cdot |p|^{-1} \quad (1 \leq k \leq a, a+1 \leq \ell \leq r \text{ または } a+1 \leq k < \ell \leq r),$
 - $|t|^{-1}|p| < |z_\ell/z_k| < |t| \quad (1 \leq k < \ell \leq a),$
 - $|t|^{-1}|p| < |z_\ell/z_k| < |t| \cdot |p|^{-1} \quad (1 \leq k \leq a, a+1 \leq \ell \leq r),$
 - $|t| < |z_\ell/z_k| < |t|^{-1} \quad (a+1 \leq k < \ell \leq r).$

あとは $\text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[z_1^{\ell_1} \dots z_r^{\ell_r} f_p^{(r)}(\mathbf{z}) \tilde{f}(z_1) \dots \tilde{f}(z_r) \right] \in \Lambda_N(p)$ が示せばよい. そこで

$$\begin{aligned} \bullet \tilde{f}(z) &= \left[\prod_{i=1}^N \frac{\theta_p(x_i/z)}{\theta_p(tx_i/z)} \right]_{\substack{|p| < |tx_i/z| < 1 \\ (1 \leq i \leq N)}} = \exp \left(- \sum_{n>0} \frac{1-t^n}{1-p^n} p_n(\mathbf{x}) \frac{z^{-n}}{n} - \sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{1-p^n} p_n p_{-n}(\mathbf{x}) \frac{z^n}{n} \right) \\ &= \sum_{\lambda, \mu \in \mathcal{P}} c_{\lambda, \mu}(p) p^{|\mu|} p_{\lambda}(\mathbf{x}) p_{-\mu}(\mathbf{x}) z^{-|\lambda|+|\mu|} \end{aligned}$$

とできることを使う ($c_{\lambda, \mu}(p)$ は $|p| < 1$ で正則なある有理関数である). そうすると

$$\begin{aligned} \bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[z_1^{\ell_1} \dots z_r^{\ell_r} f_p^{(r)}(\mathbf{z}) \tilde{f}(z_1) \dots \tilde{f}(z_r) \right] \\ = \sum_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathcal{P} \\ \mu_1, \dots, \mu_r \in \mathcal{P}}} c_{\lambda_1, \mu_1}(p) \dots c_{\lambda_r, \mu_r}(p) p^{|\mu_1| + \dots + |\mu_r|} p_{\lambda_1}(\mathbf{x}) \dots p_{\lambda_r}(\mathbf{x}) p_{-\mu_1}(\mathbf{x}) \dots p_{-\mu_r}(\mathbf{x}) \\ \times \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[z_1^{\ell_1 - |\lambda_1| + |\mu_1|} \dots z_r^{\ell_r - |\lambda_r| + |\mu_r|} f_p^{(r)}(\mathbf{z}) \right] \end{aligned}$$

となる. ここで

$$\bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[z_1^{\ell_1 - |\lambda_1| + |\mu_1|} \dots z_r^{\ell_r - |\lambda_r| + |\mu_r|} f_p^{(r)}(\mathbf{z}) \right] \dots (*)$$

を見ると, $f_p^{(r)}(z_1, \dots, z_r)$ は $z_1, \dots, z_r$ の比しか含まないこと, 及び「定数項は変数のつけ換えで不変である」ことから, $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ によって $z_i \mapsto \alpha z_i$ ($1 \leq i \leq r$) としても $\uparrow$ この $(*)$ は不変である. よって

$$\begin{aligned} \bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[z_1^{\ell_1 - |\lambda_1| + |\mu_1|} \dots z_r^{\ell_r - |\lambda_r| + |\mu_r|} f_p^{(r)}(\mathbf{z}) \right] \\ = \alpha^{\sum_{i=1}^r \{\ell_i - |\lambda_i| + |\mu_i|\}} \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[z_1^{\ell_1 - |\lambda_1| + |\mu_1|} \dots z_r^{\ell_r - |\lambda_r| + |\mu_r|} f_p^{(r)}(\mathbf{z}) \right] \end{aligned}$$

であるが, $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ は何でもよかったので, $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_r \in \mathcal{P}$ が $\sum_{i=1}^r \{\ell_i - |\lambda_i| + |\mu_i|\} = 0$ を満たす

場合にのみ, $(*)$ は 0 でない値をとり得る. ここで $\sum_{i=1}^r |\lambda_i| \geq 0$ なので

$$\bullet 0 \leq \sum_{i=1}^r |\lambda_i| = \sum_{i=1}^r \{|\mu_i| + \ell_i\} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^r |\mu_i| \geq - \sum_{i=1}^r \ell_i$$

が成り立つ. $\sum_{i=1}^r |\mu_i|$ は当然 0 以上であるから, $\sum_{i=1}^r |\mu_i| \geq \max \left\{ 0, - \sum_{i=1}^r \ell_i \right\}$ を満たす分割たち $\mu_1, \dots, \mu_r \in \mathcal{P}$ が和に寄与することがわかる. また,

$$\bullet c_{\lambda_1, \mu_1}(p) \dots c_{\lambda_r, \mu_r}(p) p^{|\mu_1| + \dots + |\mu_r|} \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[z_1^{\ell_1 - |\lambda_1| + |\mu_1|} \dots z_r^{\ell_r - |\lambda_r| + |\mu_r|} f_p^{(r)}(\mathbf{z}) \right]$$

は $|p| < \frac{\min\{|x_1|, \dots, |x_N|\}}{\max\{|x_1|, \dots, |x_N|\}} \leq 1$ で正則なので, ある $C_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_r \\ \mu_1, \dots, \mu_r \in \mathbb{C} \\ \ell_1, \dots, \ell_r}}^d$ があって

$$\begin{aligned} \bullet c_{\lambda_1, \mu_1}(p) \dots c_{\lambda_r, \mu_r}(p) p^{|\mu_1| + \dots + |\mu_r|} \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[z_1^{\ell_1 - |\lambda_1| + |\mu_1|} \dots z_r^{\ell_r - |\lambda_r| + |\mu_r|} f_p^{(r)}(\mathbf{z}) \right] \\ = \sum_{d \geq |\mu_1| + \dots + |\mu_r|} C_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_r \\ \mu_1, \dots, \mu_r \in \mathbb{C} \\ \ell_1, \dots, \ell_r}}^d p^d \end{aligned}$$

と書ける. こうして次を得る :

$$\begin{aligned}
& \bullet \text{CT}_{z_1, \dots, z_r} \left[z_1^{\ell_1} \dots z_r^{\ell_r} f_p^{(r)}(z) \tilde{f}(z_1) \dots \tilde{f}(z_r) \right] \\
&= \sum_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_r \in \mathcal{P} \\ |\mu_1| + \dots + |\mu_r| \geq \max\{0, -\ell_1 - \dots - \ell_r\} \\ |\lambda_1| + \dots + |\lambda_r| = |\mu_1| + \dots + |\mu_r| + \ell_1 + \dots + \ell_r}} \sum_{d \geq |\mu_1| + \dots + |\mu_r|} C_{\ell_1, \dots, \ell_r}^{\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_r, d} p^d \prod_{i=1}^r p_{\lambda_i}(\mathbf{x}) p_{-\mu_i}(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{d \geq \max\{0, -\ell_1, \dots, -\ell_r\}} p^d \sum_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_r \in \mathcal{P} \\ \max\{0, -\ell_1 - \dots - \ell_r\} \leq |\mu_1| + \dots + |\mu_r| \leq d \\ |\lambda_1| + \dots + |\lambda_r| = |\mu_1| + \dots + |\mu_r| + \ell_1 + \dots + \ell_r}} C_{\ell_1, \dots, \ell_r}^{\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_r, d} \prod_{i=1}^r p_{\lambda_i}(\mathbf{x}) p_{-\mu_i}(\mathbf{x}) \in \Lambda_N(p).
\end{aligned}$$

以上によって, 楕円 Ruijsenaars 作用素 $D_N^{(r)}(p)$ ($r \in \{0, 1, \dots, N\}$) が $\Lambda_N(p)$ に作用していることがわかった. $\square$

6.4 付録 4 : 楕円 Calogero-Moser 系に関する計算

ここでは, 本文中では結果を述べるのみであった楕円 Calogero-Moser 系の計算を紹介する.

$D_z := z \frac{\partial}{\partial z}$ とおく (Euler 微分). $\mathbb{C}^\times$ 上の有理型関数 $E_k(z)$ ($k \in \mathbb{Z}_{>0}$) を

$$\bullet E_k(z) := -D_z^k \log \theta_p(z)$$

と定め, これを「Eisenstein の楕円関数」と呼ぶ (以下, 単に「Eisenstein 関数」と呼んでいく). Eisenstein 関数について次が成り立つ :

$$\begin{aligned}
& \bullet E_1(pz) = E_1(z) + 1, \quad \bullet E_1(z^{-1}) = -E_1(z) - 1, \\
& \bullet E_k(pz) = E_k(z), \quad \bullet E_k(z^{-1}) = (-1)^k E_k(z) \quad (k \geq 2).
\end{aligned}$$

Eisenstein 関数 $E_k(z)$ ($k \in \mathbb{Z}_{>0}$) の極の全体は $p^{\mathbb{Z}}$ であり, 各極の位数は k である.

Eisenstein 関数 $E_1(z), E_2(z)$ は

$$\bullet E_2(z) = E_1(z)^2 + E_1(z) - 2D_p \log \theta_p(z) - 2D_p \log(p; p)_\infty$$

なる関係を満たす.

命題 6.15. (1) $a, b \in \mathbb{C}^\times$ について $a/b \notin p^{\mathbb{Z}}$ であるとき, 次の $\mathbb{C}^\times$ 上の有理型関数の恒等式が成り立つ :

$$\begin{aligned}
& \bullet E_1\left(\frac{a}{z}\right) E_1\left(\frac{b}{z}\right) - D_p \log \theta_p(b/a) \\
&= E_1\left(\frac{b}{a}\right) E_1\left(\frac{a}{z}\right) + E_1\left(\frac{a}{b}\right) E_1\left(\frac{b}{z}\right) + D_p \log \theta_p(a/z) + D_p \log \theta_p(b/z).
\end{aligned}$$

(2) $x, y, z \in \mathbb{C}^\times \setminus p^{\mathbb{Z}}$ で $xyz=1$ なるものに対し

$$\begin{aligned}
& \bullet E_1(x)E_1(y) + E_1(y)E_1(z) + E_1(z)E_1(x) + E_1(x) + E_1(y) + E_1(z) \\
&= -D_p \log \theta_p(x) - D_p \log \theta_p(y) - D_p \log \theta_p(z) - 1.
\end{aligned}$$

↑ この証明は筆者による次の文書を参照されたい :

- 齋藤 洋介「テータ関数とデルタ関数の関係」(OCAMI Preprint Series, 2025)

楕円 Calogero-Moser 系のハミルトニアン $H_N^{\text{CM}}(\beta, p)$ を

$$\bullet H_N^{\text{CM}}(\beta, p) := \sum_{i=1}^N D_i^2 - \beta(\beta-1) \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} E_2(x_i/x_j)$$

とおく. これを次の関数 $\psi_N(\mathbf{x}; \beta, p)$ に作用させることを考える :

$$\bullet \psi_N(\mathbf{x}; \beta, p) := \prod_{1 \leq i \neq j \leq N} \theta_p(x_i/x_j)^{\beta/2}.$$

命題 6.16. 楕円 Calogero-Moser ハミルトニアン $H_N^{\text{CM}}(\beta, p)$ と $\psi_N(\mathbf{x}; \beta, p)$ について次が成り立つ : $c_1(p) \in \mathbb{C}$ 及び $C_N(\beta, p) \in \mathbb{C}$ を

$$\bullet c_1(p) := -D_p \log(p; p)_\infty, \quad \bullet C_N(\beta, p) := \frac{1}{12} (N^3 - N) \beta^2 - 2N(N-1)c_1(p)\beta^2$$

とおくとき

$$\bullet H_N^{\text{CM}}(\beta, p) \psi_N(\mathbf{x}; \beta, p) = [2N\beta D_p + C_N(\beta, p)] \psi_N(\mathbf{x}; \beta, p).$$

証明. $\log$ 微分をうまく使えばよい. まず, ある $i \in \{1, \dots, N\}$ を 1 つ決めたとき

$$\begin{aligned} \bullet \log \psi_N(\mathbf{x}; \beta, p) &= \frac{\beta}{2} \sum_{j \neq i} \{ \log \theta_p(x_i/x_j) + \log \theta_p(x_j/x_i) \} + (x_i \text{ を含まない和}) \\ &= \frac{\beta}{2} \sum_{j \neq i} \{ \log \theta_p(x_i/x_j) + \log \theta_p(px_i/x_j) \} + (x_i \text{ を含まない和}) \end{aligned}$$

であることに注意すると ($\theta_p(px) = \theta_p(x^{-1})$ を使った)

$$\begin{aligned} \bullet D_i \log \psi_N(\mathbf{x}; \beta, p) &= -\frac{\beta}{2} \sum_{j \neq i} \{ E_1(x_i/x_j) + E_1(px_i/x_j) \} \\ &= -\beta \sum_{j \neq i} E_1(x_i/x_j) - \frac{1}{2} (N-1) \beta \end{aligned}$$

である ($E_1(z) = -D_z \log \theta_p(z)$ の $E_1(pz) = E_1(z) + 1$ を使った). これを再び x_i で Euler 微分すると

$$\bullet D_i^2 \log \psi_N(\mathbf{x}; \beta, p) = -\beta \sum_{j \neq i} E_2(x_i/x_j)$$

である. ここで一般に

$$\bullet D_x^2 f = \left\{ D_x^2 \log f + (D_x \log f)^2 \right\} f$$

であることに注意する. これによれば

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{i=1}^N D_i^2 \psi_N(\mathbf{x}; \beta, p) \\ = \left[-\beta \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} E_2(x_i/x_j) + \beta^2 \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j \neq i} E_1(x_i/x_j) + \frac{1}{2} (N-1) \right\}^2 \right] \psi_N(\mathbf{x}; \beta, p) \end{aligned}$$

である. この 2 つ目の和が問題である. まずこれは次のようにする :

$$\begin{aligned}
& \bullet \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j \neq i} E_1(x_i/x_j) + \frac{1}{2}(N-1) \right\}^2 \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} E_1(x_i/x_j) E_1(x_i/x_k) + (N-1) \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} E_1(x_i/x_j) + \frac{1}{4} N(N-1)^2 \\
&= \sum_{\substack{i,j,k \\ j \neq i, k \neq i}} E_1(x_i/x_j) E_1(x_i/x_k) + (N-1) \cdot \frac{-1}{2} N(N-1) + \frac{1}{4} N(N-1)^2 \\
&= \sum_{\substack{i,j,k \\ j \neq i, k \neq i}} E_1(x_i/x_j) E_1(x_i/x_k) - \frac{1}{4} N(N-1)^2.
\end{aligned}$$

上で $E_1(x) + E_1(x^{-1}) = -1$ を使って次のようにした :

$$\bullet \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} E_1(x_i/x_j) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \{E_1(x_i/x_j) + E_1(x_j/x_i)\} = -\frac{1}{2} N(N-1).$$

残っている和に対して次のようにする :

$$\bullet \sum_{\substack{i,j,k \\ j \neq i, k \neq i}} E_1(x_i/x_j) E_1(x_i/x_k) = \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} E_1(x_i/x_j)^2 + \sum_{\substack{i,j,k \\ j \neq i, k \neq i, j \neq k}} E_1(x_i/x_j) E_1(x_i/x_k).$$

ここで $E_1(x)$, $E_2(x)$ について成り立つ

$$\bullet E_1(x)^2 = E_2(x) - E_1(x) + 2D_p \log \theta_p(x) - 2c_1(p)$$

を使うと

$$\begin{aligned}
\bullet \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} E_1(x_i/x_j)^2 &= \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} \{E_2(x_i/x_j) - E_1(x_i/x_j) + 2D_p \log \theta_p(x_i/x_j) - 2c_1(p)\} \\
&= \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} E_2(x_i/x_j) + \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} 2D_p \log \theta_p(x_i/x_j) + \frac{1}{2} N(N-1) - 2N(N-1)c_1(p)
\end{aligned}$$

なので, まず次が成り立つ :

$$\begin{aligned}
& \bullet \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j \neq i} E_1(x_i/x_j) + \frac{1}{2}(N-1) \right\}^2 \\
&= \sum_{1 \leq i \neq j \neq k \leq N} E_1(x_i/x_j) E_1(x_i/x_k) \\
&\quad + \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} E_2(x_i/x_j) + \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} 2D_p \log \theta_p(x_i/x_j) - \frac{1}{4} N(N-1)(N-3) - 2N(N-1)c_1(p).
\end{aligned}$$

$E_1(x)$ を 2 つ含む和

$$\bullet \sum_{1 \leq i \neq j \neq k \leq N} E_1(x_i/x_j) E_1(x_i/x_k)$$

は次のように整理する. 一般に

$$\bullet \sum_{1 \leq i_1 \neq i_2 \neq i_3 \leq N} C(i_1, i_2, i_3) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq N} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} C(i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}, i_{\sigma(3)})$$

であることに注意すると ($\downarrow E_1(z)+E_1(z^{-1})=-1$ も使う)

$$\begin{aligned}
 & \bullet \sum_{1 \leq i \neq j \neq k \leq N} E_1(x_i/x_j)E_1(x_i/x_k) \\
 &= 2 \sum_{1 \leq i < j < k \leq N} \{E_1(x_i/x_j)E_1(x_i/x_k)+E_1(x_j/x_i)E_1(x_j/x_k)+E_1(x_k/x_i)E_1(x_k/x_j)\} \\
 &= -2 \sum_{1 \leq i < j < k \leq N} \left\{ E_1(\textcolor{red}{x}_i/\textcolor{red}{x}_j)E_1(\textcolor{brown}{x}_k/\textcolor{brown}{x}_i)+E_1(\textcolor{red}{x}_i/\textcolor{red}{x}_j)E_1(\textcolor{blue}{x}_j/\textcolor{blue}{x}_k)+E_1(\textcolor{brown}{x}_k/\textcolor{brown}{x}_i)E_1(\textcolor{blue}{x}_j/\textcolor{blue}{x}_k) \right. \\
 & \quad \left. +E_1(\textcolor{red}{x}_i/\textcolor{red}{x}_j)+E_1(\textcolor{blue}{x}_j/\textcolor{blue}{x}_k)+E_1(\textcolor{brown}{x}_k/\textcolor{brown}{x}_i) \right\}.
 \end{aligned}$$

ここで $\frac{\textcolor{red}{x}_i}{\textcolor{red}{x}_j} \cdot \frac{\textcolor{blue}{x}_j}{\textcolor{blue}{x}_k} \cdot \frac{\textcolor{brown}{x}_k}{\textcolor{brown}{x}_i}=1$ に注意する. これより, $\uparrow$ 上に対して次の命題が使える:

$$\begin{aligned}
 & \bullet x, y, z \in \mathbb{C}^\times \setminus p^\mathbb{Z} \text{ で } xyz=1 \text{ なるものに対し} \\
 & \quad \bullet E_1(x)E_1(y)+E_1(y)E_1(z)+E_1(z)E_1(x)+E_1(x)+E_1(y)+E_1(z) \\
 & \quad = -D_p \log \theta_p(x) - D_p \log \theta_p(y) - D_p \log \theta_p(z) - 1.
 \end{aligned}$$

これによって次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
 & \bullet \sum_{1 \leq i \neq j \neq k \leq N} E_1(x_i/x_j)E_1(x_i/x_k) \\
 &= -2 \sum_{1 \leq i < j < k \leq N} \{-D_p \log \theta_p(x_i/x_j) - D_p \log \theta_p(x_j/x_k) - D_p \log \theta_p(x_k/x_i) - 1\} \\
 &= 2 \sum_{1 \leq i < j < k \leq N} \{D_p \log \theta_p(x_i/x_j) + D_p \log \theta_p(x_j/x_k) + D_p \log \theta_p(x_k/x_i)\} + \frac{1}{3}N(N-1)(N-2).
 \end{aligned}$$

ここで先ほど見た

$$\bullet \sum_{1 \leq i_1 \neq i_2 \neq i_3 \leq N} C(i_1, i_2, i_3) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq N} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} C(i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}, i_{\sigma(3)})$$

を逆向きに使うと ($D_p \log \theta_p(z) + D_p \log \theta_p(z^{-1}) = 2D_p \log \theta_p(z)$ にも注意), スペースの節約のために

$$\bullet g(z) = D_p \log \theta_p(z)$$

とおくとき ($\uparrow$ ここだけの記号)

$$\begin{aligned}
 & \bullet 2 \sum_{1 \leq i < j < k \leq N} \{D_p \log \theta_p(x_i/x_j) + D_p \log \theta_p(x_j/x_k) + D_p \log \theta_p(x_k/x_i)\} \\
 &= \sum_{1 \leq i < j < k \leq N} \{g(x_i/x_j) + g(x_j/x_i) + g(x_j/x_k) + g(x_k/x_j) + g(x_k/x_i) + g(x_i/x_k)\} \\
 &= \sum_{1 \leq i \neq j \neq k \leq N} g(x_i/x_j) = (N-2) \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} g(x_i/x_j) = (N-2) \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} D_p \log \theta_p(x_i/x_j).
 \end{aligned}$$

以上によって

$$\begin{aligned}
 & \bullet \sum_{1 \leq i \neq j \neq k \leq N} E_1(x_i/x_j)E_1(x_i/x_k) \\
 &= -2 \sum_{1 \leq i < j < k \leq N} \{-D_p \log \theta_p(x_i/x_j) - D_p \log \theta_p(x_j/x_k) - D_p \log \theta_p(x_k/x_i) - 1\} \\
 &= (N-2) \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} D_p \log \theta_p(x_i/x_j) + \frac{1}{3}N(N-1)(N-2)
 \end{aligned}$$

がわかったので、これより次を得る：

$$\begin{aligned} & \bullet \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j \neq i} E_1(x_i/x_j) + \frac{1}{2}(N-1) \right\}^2 \\ &= \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} E_2(x_i/x_j) + N \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} D_p \log \theta_p(x_i/x_j) + \frac{1}{12}(N^3 - N) - 2N(N-1)c_1(p). \end{aligned}$$

考えていたのは

$$\begin{aligned} & \bullet \sum_{i=1}^N D_i^2 \psi_N(\mathbf{x}; \beta, p) \\ &= \left[-\beta \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} E_2(x_i/x_j) + \beta^2 \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j \neq i} E_1(x_i/x_j) + \frac{1}{2}(N-1) \right\}^2 \right] \psi_N(\mathbf{x}; \beta, p) \end{aligned}$$

であったので、楢円 Calogero-Moser ハミルトニアン $H_N^{\text{CM}}(\beta, p)$ が出るように整理すると

$$\bullet H_N^{\text{CM}}(\beta, p) \psi_N(\mathbf{x}; \beta, p) = \left[N\beta^2 \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} D_p \log \theta_p(x_i/x_j) + C_N(\beta, p) \right] \psi_N(\mathbf{x}; \beta, p)$$

である。ここで D_p が作用した項に注意すると、

$$\begin{aligned} \bullet D_p \psi_N(\mathbf{x}; \beta, p) &= D_p \log \psi_N(\mathbf{x}; \beta, p) \times \psi_N(\mathbf{x}; \beta, p) \\ &= \frac{\beta}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} D_p \log \theta_p(x_i/x_j) \times \psi_N(\mathbf{x}; \beta, p) \end{aligned}$$

から次がわかる：

$$\bullet H_N^{\text{CM}}(\beta, p) \psi_N(\mathbf{x}; \beta, p) = [2N\beta D_p + C_N(\beta, p)] \psi_N(\mathbf{x}; \beta, p). \quad \square$$

核関数 $\pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p)$ を

$$\bullet \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p) := \prod_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} \theta_p(x_i y_j)^{-\beta}$$

と定め、これに $\psi_M(\mathbf{x}; \beta, p) \psi_N(\mathbf{y}; \beta, p)$ をかけたものを $f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p)$ とおく：

$$\bullet f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p) := \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p) \psi_M(\mathbf{x}; \beta, p) \psi_N(\mathbf{y}; \beta, p).$$

命題 6.17. 関数 $\psi_M(\mathbf{x}; \beta, p)$ 及び核関数 $\pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p)$ について

$$\bullet \sum_{i=1}^M D_{x_i} \psi_M(\mathbf{x}; \beta, p) = 0, \quad \bullet \sum_{i=1}^M D_{x_i} \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p) = \sum_{i=1}^N D_{y_i} \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p)$$

が成り立つ。これらによって $f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p)$ について次が成り立つ：

$$\bullet \sum_{i=1}^M D_{x_i} f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p) = \sum_{i=1}^N D_{y_i} f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p).$$

証明. 1 つ目の式は $\psi_M(\mathbf{x}; \beta, p)$ がスケール不変であることから従う. 実際, $z \in \mathbb{C}^\times$ に対し

$$\bullet \psi_M(z\mathbf{x}; \beta, p) = \psi_M(\mathbf{x}; \beta, p)$$

であるが, これを z で微分してから $z=1$ を代入すると

$$\bullet 0 = \frac{d}{dz} \psi_M(z\mathbf{x}; \beta, p) \Big|_{z=1} = \sum_{i=1}^M D_{x_i} \psi_M(\mathbf{x}; \beta, p)$$

を得る. $\pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p)$ に関する式については

$$\bullet \pi_{M,N}(z\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p) = \pi_{M,N}(\mathbf{x}, z\mathbf{y}; \beta, p) \quad (z \in \mathbb{C}^\times)$$

に気がつけばよい. $\square$

命題 6.18. 楕円 Calogero-Moser ハミルトニアン $H_N^{\text{CM}}(\beta, p)$ と関数 $f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p)$ について次が成り立つ ($\downarrow$ 例えば $H_M^{\text{CM}}(\beta, p)_{\mathbf{x}}$ は $x_1, \dots, x_M$ の関数に働く楕円 Calogero-Moser ハミルトニアンを表す):

$$\begin{aligned} \bullet & \left[H_M^{\text{CM}}(\beta, p)_{\mathbf{x}} - M\beta \sum_{i=1}^M D_{x_i} - 2M\beta D_p - C_M(\beta, p) \right] f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p) \\ &= \left[H_N^{\text{CM}}(\beta, p)_{\mathbf{y}} - N\beta \sum_{i=1}^N D_{y_i} - 2N\beta D_p - C_N(\beta, p) \right] f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, p). \end{aligned}$$

証明. スペースの節約のため, 以下では $f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_M(\mathbf{x}) \psi_N(\mathbf{y})$ などと書く. まずは $\sum_{i=1}^M D_{x_i}^2 \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を調べる. やはり

$$\bullet \log \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\beta \sum_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} \log \theta_p(x_i y_j)$$

を見つ $\log$ 微分を行えばよいが, $i \in \{1, \dots, M\}$ を決めるごとに

$$\bullet D_{x_i} \log \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \beta \sum_{1 \leq j \leq N} E_1(x_i y_j), \quad \bullet D_{x_i}^2 \log \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \beta \sum_{1 \leq j \leq N} E_2(x_i y_j)$$

であることから次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{i=1}^M D_{x_i}^2 \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^M \left[D_{x_i}^2 \log \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \{D_{x_i} \log \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}^2 \right] \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \sum_{i=1}^M \left[\beta \sum_{1 \leq j \leq N} E_2(x_i y_j) + \beta^2 \sum_{1 \leq j, k \leq N} E_1(x_i y_j) E_1(x_i y_k) \right] \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

ここに見えている $\sum_{1 \leq j, k \leq N} E_1(x_i y_j) E_1(x_i y_k)$ について

$$\bullet \sum_{1 \leq j, k \leq N} E_1(x_i y_j) E_1(x_i y_k) = \sum_{1 \leq j \leq N} E_1(x_i y_j)^2 + \sum_{1 \leq j \neq k \leq N} E_1(x_i y_j) E_1(x_i y_k)$$

としておき, $E_1(z)^2 = E_2(z) - E_1(z) + 2D_p \log \theta_p(z) - 2c_1(p)$ を使うと

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{i=1}^M D_{x_i}^2 \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \left[\sum_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} \{ \beta(\beta+1) E_2(x_i y_j) - \beta^2 E_1(x_i y_j) \} - 2MN c_1(p) \beta^2 \right] \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &+ \left[2\beta^2 \sum_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} D_p \log \theta_p(x_i y_j) + \beta^2 \sum_{i=1}^M \sum_{1 \leq j \neq k \leq N} E_1(x_i y_j) E_1(x_i y_k) \right] \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

がわかる. 今度は

$$\bullet \sum_{i=1}^M \sum_{1 \leq j \neq k \leq N} E_1(x_i y_j) E_1(x_i y_k)$$

に注目する. ここで次の命題を用いる.

• $a, b \in \mathbb{C}^\times$ について $a/b \notin p^\mathbb{Z}$ であるとき, 次の $\mathbb{C}^\times$ 上の有理型関数の恒等式が成り立つ:

$$\begin{aligned} &\bullet E_1\left(\frac{a}{z}\right) E_1\left(\frac{b}{z}\right) \\ &= E_1\left(\frac{b}{a}\right) E_1\left(\frac{a}{z}\right) + E_1\left(\frac{a}{b}\right) E_1\left(\frac{b}{z}\right) + D_p \log \theta_p(a/z) + D_p \log \theta_p(b/z) + D_p \log \theta_p(b/a). \end{aligned}$$

これによれば次が成り立つ:

$$\begin{aligned} &\bullet \sum_{i=1}^M \sum_{1 \leq j \neq k \leq N} E_1(x_i y_j) E_1(x_i y_k) \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{1 \leq j \neq k \leq N} \{ E_1(y_k/y_j) E_1(x_i y_j) + E_1(y_j/y_k) E_1(x_i y_k) \} \\ &\quad + \sum_{i=1}^M \sum_{1 \leq j \neq k \leq N} \{ D_p \log \theta_p(x_i y_j) + D_p \log \theta_p(x_i y_k) + D_p \log \theta_p(y_k/y_j) \} \\ &= 2 \sum_{i=1}^M \sum_{1 \leq j \neq k \leq N} E_1(y_k/y_j) E_1(x_i y_j) + 2(N-1) \sum_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} D_p \log \theta_p(x_i y_j) + M \sum_{1 \leq j \neq k \leq N} D_p \log \theta_p(y_k/y_j). \end{aligned}$$

以上のことによって

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{i=1}^M D_{x_i}^2 \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \left[\sum_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} \{ \beta(\beta+1) E_2(x_i y_j) - \beta^2 E_1(x_i y_j) \} - 2MN c_1(p) \beta^2 \right] \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\quad + 2\beta^2 \sum_{i=1}^M \sum_{1 \leq j \neq k \leq N} E_1(y_k/y_j) E_1(x_i y_j) \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\quad + \left[2N\beta^2 \sum_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} D_p \log \theta_p(x_i y_j) + M\beta^2 \sum_{1 \leq j \neq k \leq N} D_p \log \theta_p(y_k/y_j) \right] \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

を得る. ここで $M \leftrightarrow N$, $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}$ などと置き換えることで

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{i=1}^N D_{y_i}^2 \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = & \left[\sum_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} \{ \beta(\beta+1) E_2(x_i y_j) - \beta^2 E_1(x_i y_j) \} - 2MN c_1(p) \beta^2 \right] \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ & + 2\beta^2 \sum_{i=1}^N \sum_{1 \leq j \neq k \leq M} E_1(x_k/x_j) E_1(y_i x_j) \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ & + \left[2M\beta^2 \sum_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} D_p \log \theta_p(x_i y_j) + N\beta^2 \sum_{1 \leq j \neq k \leq M} D_p \log \theta_p(x_k/x_j) \right] \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

も出る. これらの差をとると,

$$\begin{aligned} \bullet D_p \log \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\beta \sum_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} D_p \log \theta_p(x y_j), \\ \bullet D_p \log \psi_M(\mathbf{x}) &= \frac{\beta}{2} \sum_{1 \leq j \neq k \leq M} D_p \log \theta_p(x_k/x_j) \end{aligned}$$

などにも注意すると

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{i=1}^M D_{x_i}^2 \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sum_{i=1}^N D_{y_i}^2 \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ = 2\beta^2 \left[\sum_{i=1}^M \sum_{1 \leq j \neq k \leq N} E_1(y_k/y_j) E_1(x_i y_j) - \sum_{i=1}^N \sum_{1 \leq j \neq k \leq M} E_1(x_k/x_j) E_1(y_i x_j) \right] \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ + [2(M-N)\beta D_p \log \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + 2M\beta D_p \log \psi_N(\mathbf{y}) - 2N\beta D_p \log \psi_M(\mathbf{x})] \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

がわかる. もう少し式変形しておく. $H_M^{\text{CM}}(\beta, p)_{\mathbf{x}}$ の $\psi_M(\mathbf{x})$ への作用を調べたときに見た

$$\begin{aligned} \bullet D_{x_i} \log \psi_M(\mathbf{x}) &= -\beta \sum_{j \neq i} E_1(x_i/x_j) - \frac{1}{2}(M-1)\beta \\ &= \beta \sum_{j \neq i} E_1(x_j/x_i) + \frac{1}{2}(M-1)\beta \quad (i \in \{1, \dots, M\}) \end{aligned}$$

を使えば, 例えば $2\beta^2 \sum_{i=1}^N \sum_{1 \leq j \neq k \leq M} E_1(x_k/x_j) E_1(y_i x_j)$ について

$$\begin{aligned} \bullet 2\beta^2 \sum_{i=1}^N \sum_{1 \leq j \neq k \leq M} E_1(x_k/x_j) E_1(y_i x_j) &= 2\beta^2 \sum_{j=1}^N \sum_{1 \leq i \neq k \leq M} E_1(x_k/x_i) E_1(x_i y_j) \\ &= 2\beta^2 \sum_{i=1}^M \sum_{k \neq i} E_1(x_k/x_i) \sum_{j=1}^N E_1(x_i y_j) \\ &= 2 \sum_{i=1}^M \left\{ D_{x_i} \log \psi_M(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}(M-1)\beta \right\} D_{x_i} \log \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= 2 \sum_{i=1}^M D_{x_i} \log \psi_M(\mathbf{x}) \times D_{x_i} \log \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (M-1)\beta \sum_{i=1}^M D_{x_i} \log \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

がわかる. 同様にして

$$\begin{aligned}
 & \bullet 2\beta^2 \sum_{i=1}^M \sum_{1 \leq j \neq k \leq N} E_1(y_k/y_j) E_1(x_i y_j) \\
 &= 2 \sum_{i=1}^N D_{y_i} \log \psi_N(\mathbf{y}) \times D_{y_i} \log \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (N-1) \beta \sum_{i=1}^N D_{y_i} \log \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y})
 \end{aligned}$$

でもある. こうして次が成り立つことがわかった:

$$\begin{aligned}
 & \bullet \sum_{i=1}^M D_{x_i}^2 \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sum_{i=1}^N D_{y_i}^2 \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
 &= \left[2 \sum_{i=1}^N D_{y_i} \log \psi_N(\mathbf{y}) D_{y_i} \log \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (N-1) \beta \sum_{i=1}^N D_{y_i} \log \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
 & - \left[2 \sum_{i=1}^M D_{x_i} \log \psi_M(\mathbf{x}) D_{x_i} \log \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (M-1) \beta \sum_{i=1}^M D_{x_i} \log \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
 & + [2(M-N) \beta D_p \log \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + 2M \beta D_p \log \psi_N(\mathbf{y}) - 2N \beta D_p \log \psi_M(\mathbf{x})] \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).
 \end{aligned}$$

若干長い計算であったが, 最後に次のことを考える. $\uparrow$ 上で得られた式に $\psi_M(\mathbf{x})\psi_N(\mathbf{y})$ をかけると, まず単純には

$$\begin{aligned}
 & \bullet \left\{ \sum_{i=1}^M D_{x_i}^2 \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sum_{i=1}^N D_{y_i}^2 \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\} \psi_M(\mathbf{x}) \psi_N(\mathbf{y}) \\
 &= 2 \sum_{i=1}^N D_{y_i} \psi_N(\mathbf{y}) D_{y_i} \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \times \psi_M(\mathbf{x}) - (N-1) \beta \sum_{i=1}^N D_{y_i} \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \times \psi_M(\mathbf{x}) \psi_N(\mathbf{y}) \\
 & - 2 \sum_{i=1}^M D_{x_i} \psi_M(\mathbf{x}) D_{x_i} \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \times \psi_N(\mathbf{y}) + (M-1) \beta \sum_{i=1}^M D_{x_i} \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \times \psi_M(\mathbf{x}) \psi_N(\mathbf{y}) \\
 & + 2(M-N) \beta D_p \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \times \psi_M(\mathbf{x}) \psi_N(\mathbf{y}) \\
 & + 2M \beta D_p \psi_N(\mathbf{y}) \times \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_M(\mathbf{x}) - 2N \beta D_p \psi_M(\mathbf{x}) \times \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_N(\mathbf{y})
 \end{aligned}$$

であるが, この左辺について

$$\begin{aligned}
 & \bullet \left\{ \sum_{i=1}^M D_{x_i}^2 \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sum_{i=1}^N D_{y_i}^2 \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\} \psi_M(\mathbf{x}) \Psi_N(\mathbf{y}) \\
 &= \sum_{i=1}^M D_{x_i}^2 f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sum_{i=1}^N D_{y_i}^2 f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
 & - 2 \sum_{i=1}^M D_{x_i} \psi_M(\mathbf{x}) D_{x_i} \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \times \psi_N(\mathbf{y}) - \sum_{i=1}^M D_{x_i}^2 \psi_M(\mathbf{x}) \times \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_N(\mathbf{y}) \\
 & + 2 \sum_{i=1}^N D_{y_i} \psi_N(\mathbf{y}) D_{y_i} \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \times \psi_M(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N D_{y_i}^2 \psi_N(\mathbf{y}) \times \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_M(\mathbf{x})
 \end{aligned}$$

であること, 及び

$$\bullet \sum_{i=1}^M D_{x_i} \psi_M(\mathbf{x}) = 0, \quad \bullet \sum_{i=1}^N D_{y_i} \psi_N(\mathbf{y}) = 0, \quad \bullet \sum_{i=1}^M D_{x_i} f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N D_{y_i} f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

などによって次が成り立つ :

$$\begin{aligned}
& \bullet \sum_{i=1}^M D_{x_i}^2 f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sum_{i=1}^N D_{y_i}^2 f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
& - \sum_{i=1}^M D_{x_i}^2 \psi_M(\mathbf{x}) \times \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_N(\mathbf{y}) + \sum_{i=1}^N D_{y_i}^2 \psi_N(\mathbf{y}) \times \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_M(\mathbf{x}) \\
& = -N\beta \sum_{i=1}^N D_{y_i} f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + M\beta \sum_{i=1}^M D_{x_i} f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
& + 2(M-N)\beta D_p \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \times \psi_M(\mathbf{x}) \psi_N(\mathbf{y}) \\
& + 2M\beta D_p \psi_N(\mathbf{y}) \times \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_M(\mathbf{x}) - 2N\beta D_p \psi_M(\mathbf{x}) \times \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_N(\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

ここで $H_M^{\text{CM}}(\beta, p)_{\mathbf{x}}$ などが出るようにすると

$$\begin{aligned}
& \bullet H_M^{\text{CM}}(\beta, p)_{\mathbf{x}} f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - H_N^{\text{CM}}(\beta, p)_{\mathbf{y}} f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
& - H_M^{\text{CM}}(\beta, p)_{\mathbf{x}} \psi_M(\mathbf{x}) \times \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_N(\mathbf{y}) + H_N^{\text{CM}}(\beta, p)_{\mathbf{y}} \psi_N(\mathbf{y}) \times \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_M(\mathbf{x}) \\
& = -N\beta \sum_{i=1}^N D_{y_i} f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + M\beta \sum_{i=1}^M D_{x_i} f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
& + 2(M-N)\beta D_p \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \times \psi_M(\mathbf{x}) \psi_N(\mathbf{y}) \\
& + 2M\beta D_p \psi_N(\mathbf{y}) \times \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_M(\mathbf{x}) - 2N\beta D_p \psi_M(\mathbf{x}) \times \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_N(\mathbf{y})
\end{aligned}$$

である. 計算を続けると, $H_M^{\text{CM}}(\beta, p)_{\mathbf{x}} \psi_M(\mathbf{x}) = [2M\beta D_p + C_M(\beta, p)] \psi_M(\mathbf{x})$ などによって

$$\begin{aligned}
& \bullet \left[H_M^{\text{CM}}(\beta, p)_{\mathbf{x}} - M\beta \sum_{i=1}^M D_{x_i} - H_N^{\text{CM}}(\beta, p)_{\mathbf{y}} + N\beta \sum_{i=1}^N D_{y_i} \right] f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
& = H_M^{\text{CM}}(\beta, p)_{\mathbf{x}} \psi_M(\mathbf{x}) \times \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_N(\mathbf{y}) - H_N^{\text{CM}}(\beta, p)_{\mathbf{y}} \psi_N(\mathbf{y}) \times \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_M(\mathbf{x}) \\
& + 2(M-N)\beta D_p \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \times \psi_M(\mathbf{x}) \psi_N(\mathbf{y}) \\
& + 2M\beta D_p \psi_N(\mathbf{y}) \times \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_M(\mathbf{x}) - 2N\beta D_p \psi_M(\mathbf{x}) \times \pi_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_N(\mathbf{y}) \\
& = [2(M-N)\beta D_p + C_M(\beta, p) - C_N(\beta, p)] f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y})
\end{aligned}$$

がわかる. 以上によって次がわかった :

$$\begin{aligned}
& \bullet \left[H_M^{\text{CM}}(\beta, p)_{\mathbf{x}} - M\beta \sum_{i=1}^M D_{x_i} - 2M\beta D_p - C_M(\beta, p) \right] f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
& = \left[H_N^{\text{CM}}(\beta, p)_{\mathbf{y}} - N\beta \sum_{i=1}^N D_{y_i} - 2N\beta D_p - C_N(\beta, p) \right] f_{M,N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad \square
\end{aligned}$$