場の量子論における対称性の自発的破れ

―― 南部陽一郎氏の開拓した物理の数学的側面 ――

理学研究科FD研究会
2010年1月21日(木) 15:00-16:00
於: 大阪市立大学学術総合センター
文化交流室

大阪市立大学大学院理学研究科
糸山 浩司

1) 序

- 南部陽一郎氏　2008年 ノーベル物理学賞

- 受賞理由

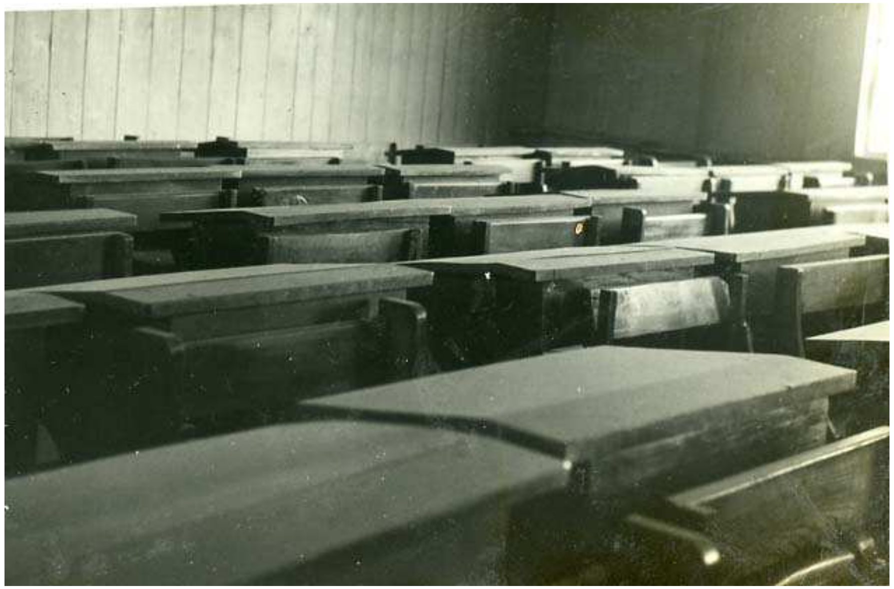
“ for the discovery of the mechanism of
spontaneously broken symmetry in subatomic physics ”
（素粒子物理学における対称性の「自発的破れ」の
機構の発見に対して）

自然に破綻すること

・市大就職時の南部先生

旧予科を望む

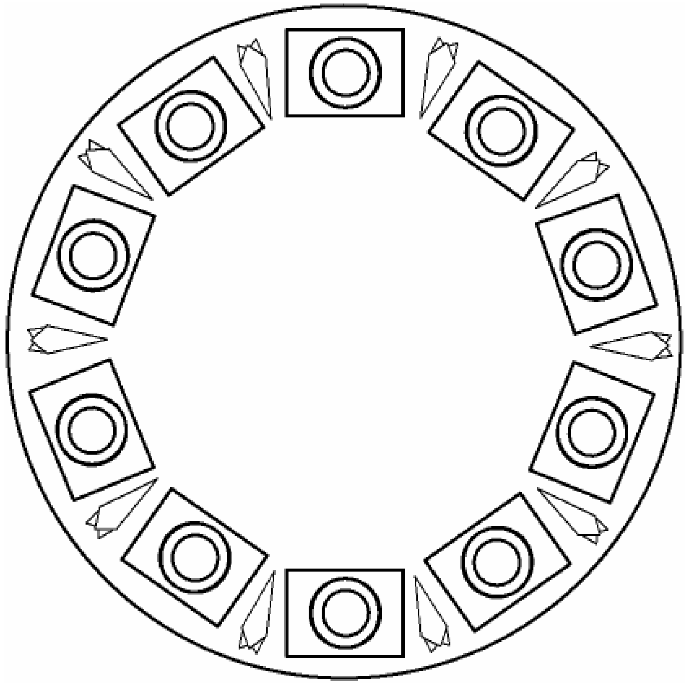
大阪市立大学理工学部（北校舎）　昭和33・11・12撮影　近畿航空写真K.K



目次

2）　・対称性の自発的破れとは

円卓での会食によるたとえ話

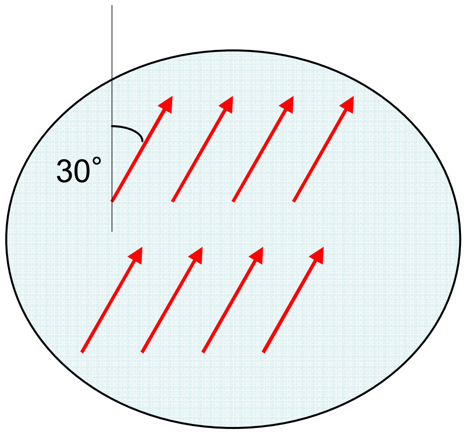


・リーダーがどちらかのナプキンを取り上げた時点で、
左右対称性は成り立たなくなる。

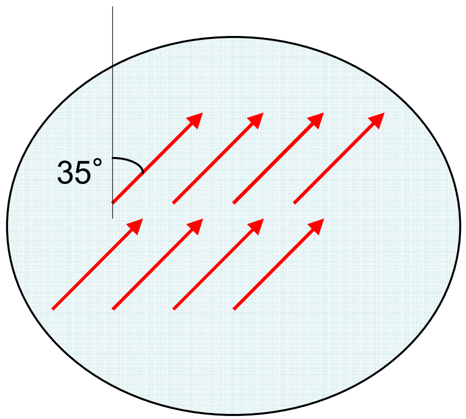
定義：もともとの配置は対称なのに、結果は対称でないこと。

・媒質中ではずっと以前から知られていた

・起きる例　：　強磁性体（巨大な磁石）　そろった方が安定



基底状態（村）その１



基底状態（村）その２　・・・・・・

・・・・・・

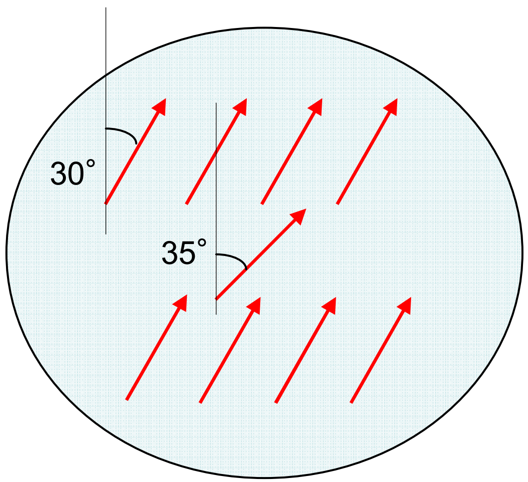
どれも優劣つけがたい

・ ↗ の（小さな）動き ↗ ➡ ↗ をゆらぎという。

・ ↗ の数が無限個なので、村と村は限りなく高い壁でへだたっている。

・村の数も（連続）無限個。我々はどれかを選んで住まねばならない。

・第１励起状態



村１の中に村２の矢印１つ

（＊）角度差5°　→ 0°　につれて送り込むエネルギー → 0 にできる。限りなく静かな波を立たせることができる。

南部による抽象化

真空（素粒子物理の基底状態）でも起きうる

読み換え：基底状態での矢印の向き⇒“場の真空値”，
（＊）の様なゆらぎ⇒質量の無い粒子

定理：対称性が自発的に破れると、
質量の無い粒子（NG粒子）が出現する

3) ・無限自由度系に対する解析力学(相対論的場の古典論):

変数は $\varphi(x^\mu)$ scalar場, $\psi_\alpha(x^\mu)$ spinor場(Grassman数)
$A_\mu(x^\mu)$ vector場 等

$x^\mu = (x^i, x^0 = ct), i = 1 \sim 3$ は時空座標で、理論のパラメーター。 以下 $c = 1$

場はLorentz群 SO(1,3) の表現(空間)を与えている。
総称的に $\phi_A(x^\mu)$ と呼ぼう。

- 作用(あるいは変分) 原理:

作用汎関数 $S = S[\phi_\bullet(\bullet), \partial_\mu \phi_\bullet(\bullet)] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_\bullet(x^\mu), \partial_\mu \phi_\bullet(x^\mu))$

で古典物理は指定される。 $\mathcal{L}$: Lagrangian 密度, $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$

- Euler-Lagrange方程式(運動方程式)

$$0 = \frac{\delta S}{\delta \phi_A(x^\mu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A(x^\mu)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_A(x^\mu))} \right)$$

停留条件を原理とする

・Noetherの定理 (保存current と保存charge):

Sがϵをパラメーターとする無限小変換

$$\phi_A(x^\mu) \to \phi'_A(x^\mu) = \phi_A(x^\mu) + \epsilon G_A(\phi_\bullet(x^\mu), \cdots)$$ で不変

つまり $(\mathcal{L}\text{の変化分}) = \epsilon \partial_\mu X^\mu(\phi_\bullet)$ (ある X^μ が存在して) ならば、

$$j^\mu(x^\mu) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_A)} G_A(\phi_\bullet(x^\mu), \cdots) - X^\mu$$ は

$$\partial_\mu j^\mu(x^\mu) = 0$$ を満たす

- $\Rightarrow \quad Q \equiv \int_{\text{全空間}} d^3x j^{\mu=0}(x^\mu), \quad \frac{dQ}{dt} = 0$

- 正準形式に書き直して, $\{\phi_A(x^\mu), Q\}_{\text{Poisson Bracket}} = G_A(\phi_\bullet(x^\mu), \cdots)$ 変換のgenerator を得る。

- 変換とし並進をとると、保存charge として

$$P^\mu = (H, P^i) =$$ (Hamiltonian, momentum) が得られる。

・場の量子化の手続き:

場をc数(or Grassman 数)ではなく、

状態空間に作用する演算子だと、以下心変わりする。

- 正準共役な運動量変数 $\pi_A(\vec{x},t) \equiv \dfrac{\delta S[\phi_A(\bullet), \partial_\mu \phi_A(\bullet)]}{\delta \phi_A(\vec{x},t)}$
- 同時刻(反)交換関係を課す。($\{\ ,\ \}_{\text{P.B.}} \to (-i\hbar)[\ ,\ ]$)

$$[\phi_A(\vec{x},t), \pi_B(\vec{y},t)] = i\hbar \delta_{AB} \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$

以下 $\hbar = 1$

・状態空間 $\mathcal{V}$:

相互作用がある場合、一般にその全貌は不明

仮定:

i) P^μ の固有値 p^μ について、 $p^\mu p_\mu \geq 0, \quad p^0 \geq 0$

ii) $p^\mu = 0$ なる状態は離散的で縮退しておらず、H の最低エネルギー状態、

これを $|\mathbf{0}\rangle$ と書く。 $P^\mu |\mathbf{0}\rangle = 0$

iii) 1 粒子状態の存在 $|\boldsymbol{p}^{(i)}(m_i)\rangle, \quad p^{(i),\mu} = (\sqrt{\boldsymbol{p}^{(i)2} + m_i^2}, \boldsymbol{p}^{(i)})$

・問: $Q^A|\mathbf{0}\rangle \neq 0$ とは:

補題:

$Q^A = \int d^3x j^{A,\mu=0}(x^\mu)$ が演算子としてちゃんと作用するならば

$$Q^A|\mathbf{0}\rangle = 0 \text{ である。}$$

「$\because$ $[P^\mu, Q^A] = 0 \quad \therefore \; P^\mu Q^A|\mathbf{0}\rangle = Q^A P^\mu|\mathbf{0}\rangle \underset{\uparrow}{=} 0$

仮定 i)

仮定 ii)より $\quad Q^A|\mathbf{0}\rangle = c|\mathbf{0}\rangle, \quad c:$ ある定数

$$\therefore c = \langle\mathbf{0}|Q^A|\mathbf{0}\rangle = \int d^3x \langle\mathbf{0}|j^{A,\mu=0}(x)|\mathbf{0}\rangle \underset{\uparrow}{=} \int d^3x \eta^\mu$$

真空の並進、Lorentz不変性

η^μ なる定数ベクトルは理論にないので0になってしまう。」

答: この時 Q^A はちゃんと定義された演算子ではない。

4)　・対称性の自発的破れの定義:

$Q^A|\mathbf{0}\rangle$ がちゃんと定義されていなくとも、Q^A は場の量子論でgeneratorとして正しく機能している。実際、

$$[iQ^A, \Phi(y^\mu)] = \int d^3x i [j^{A\mu=0}(x^\mu), \Phi(y^\mu)] \equiv \delta^A \Phi(y^\mu)$$

この順序で考える　　同時刻交換関係、局所的

定義: $\langle \mathbf{0}|[iQ^A, \Phi(x^\mu)]|\mathbf{0}\rangle = \langle \mathbf{0}|\delta^A \Phi(x^\mu)|\mathbf{0}\rangle \neq 0$

なる局所演算子が少なくとも1つ存在すること

・定理：

i) 並進不変性、明白なLorentz共変性

ii) 保存するcurrent $j^\mu(x^\mu)$, $\partial_\mu j^\mu(x^\mu)=0$ が存在

iii) そのchargeによって、生成される対称性が自発的に破れているならば、

質量0の粒子(NG粒子)が存在し、これは真空から $j^\mu(x^\mu)$ により生成される1粒子状態である。

「∵ 概略

演算子のT積 $Tj^\mu(x^\mu)\Phi(0)\equiv\theta(x^0)j^\mu(x^\mu)\Phi(0)+\theta(-x^0)\Phi(0)j^\mu(x^\mu)$ を利用する。

$$(\star)\ \int d^4x\, i\partial_\mu\langle\mathbf{0}|Tj^\mu(x^\mu)\Phi(0)|\mathbf{0}\rangle \overset{\text{ii)}}{=} \int d^4x\, i\delta(x^0)\langle\mathbf{0}|[j^0(x^\mu),\Phi(0)]|\mathbf{0}\rangle$$

$$= \langle\mathbf{0}|[iQ,\Phi(0)]|\mathbf{0}\rangle = \langle\mathbf{0}|\delta\Phi(0)|\mathbf{0}\rangle \underset{\text{iii)}}{\neq} 0$$

左辺の評価には2点関数のspectrum表示

$$\langle \mathbf{0}|Tj^\mu(x)\Phi(0)|\mathbf{0}\rangle \underset{\uparrow \atop \text{i)}}{=} \int_0^\infty d\sigma^2 \rho(\sigma^2)\partial^\mu \triangle_F(x^2; m^2=\sigma^2)$$ を用いる。

ここで $\triangle_F$ はFeynman propagator ($\Box + m^2$ に対するGreen関数)

$$\triangle_F(x^2;m^2) = \int \frac{d^4p}{i(2\pi)^4}\frac{e^{-ip\cdot x}}{m^2-p^2-i\epsilon}$$

及び

$$-ik^\mu\rho(\sigma^2=k^2)\theta(k^0) \equiv (2\pi)^3\sum_{n,n'}\delta^{(4)}(p_n-k)\langle\mathbf{0}|j^\mu(0)|n\rangle\eta^{-1}_{nn'}\langle n'|\Phi(0)|\mathbf{0}\rangle$$

$$
\begin{aligned}
(\star)\text{の左辺} &= \lim_{p^\nu\to 0}\int d^4x e^{ip^\nu x_\nu}\int d\sigma^2\rho(\sigma^2) i\Box\triangle_F(x^\mu;\sigma^2)\\
&= \lim_{p^\nu\to 0}\int d\sigma^2\frac{\rho(\sigma^2)(-ip^2)}{i(\sigma^2-p^2-i\epsilon)}\\
&= w
\end{aligned}
$$

$$(\because\ \rho(\sigma^2) = w\delta(\sigma^2)+\tilde\rho(\sigma^2)\text{ と分離})$$

$w \neq 0$ は定理の状態の存在を意味する。 $\square$

Comments :

1) 「真空から$j^\mu(x^\mu)$により生成」 → 「$j^\mu(x^\mu)$とcoupleする」と言う。

2) 真空期待値 $\langle \mathbf{0}|\delta\Phi(0)|\mathbf{0}\rangle$ を order parameter と言う。

5） ・NJL模型とchiral対称性：

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{G}{N}[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi} i \gamma_5 \psi)^2]$$

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$$

N個のDirac spinor ψ_i
各ψ_i は4成分

$$\bar{\psi}\Gamma\psi = \sum_{i=1}^{N} \bar{\psi}_i \Gamma \psi_i$$

$$\psi(x) \to e^{i\gamma_5\theta}\psi(x)$$; chiral U(1) 変換

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$Q_5 = \int d^3x j_5^0(x) \quad j_5{}^\mu(x) = -\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi$$

chiral current 及びそのcharge

$$[iQ_5, \bar{\psi} i \gamma_5 \psi(x)] = \int d^3y i[j_{50}(y), \bar{\psi} i \gamma_5 \psi(x)] = -2\bar{\psi}\psi(x) \quad (*)$$

If $\langle 0|(*)|0\rangle \neq 0$, then 左; 自発的破れ，右; ψ は質量を獲得

order parameter

・補助場の方法:

$$\mathcal{L}_Y \equiv \mathcal{L} - \frac{N}{2\lambda}\left[(\sigma + \frac{\lambda}{N}\bar{\psi}\psi)^2 + (\pi + \frac{\lambda}{N}\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2\right]$$
$$= \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{N}{2\lambda}(\sigma^2+\pi^2) - \bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5\pi)\psi$$

ここで $\lambda = 2G$ と選んで、4-Fermi 相互作用を相殺

・一方、σ, π に対する運動方程式は

$$\sigma = -\frac{\lambda}{N}\bar{\psi}\psi, \qquad \pi = -\frac{\lambda}{N}\bar{\psi}i\gamma_5\psi$$

なので、もとの $\mathcal{L}_Y$ に代入すると、$\mathcal{L}_Y$ と $\mathcal{L}$ は等価

・ σ, π のみが始(終)状態にあるdiagramを考察すると

$\mathcal{L}$ に対する $\frac{1}{N}$ 展開 $=$ $\mathcal{L}_Y$ に関する $\hbar$(loop・摂動) 展開

・有効potential : 最小値が $\langle\sigma\rangle \neq 0$ か否かの判定を与える

$V(\sigma,\pi) \equiv$ ((σ,π定数) を外線とする 1PI diagram の和)

・self-consistent solution :

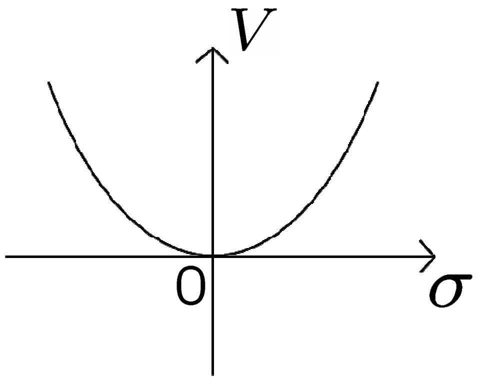
・ one-loopまでの計算結果 :

$$V(\sigma,\pi) = \frac{1}{2\lambda}(\sigma^2+\pi^2) - 2\int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4}\ln(\sigma^2+\pi^2-k^2-i\epsilon)$$

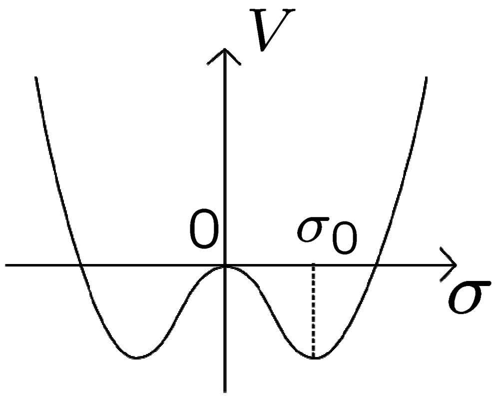
右辺の積分を定義・遂行するために、Euclid化して回転不変に

cutoff Λ^2 を導入する (Λ^2 は再定義により取り除けない。この模型の適用限界)

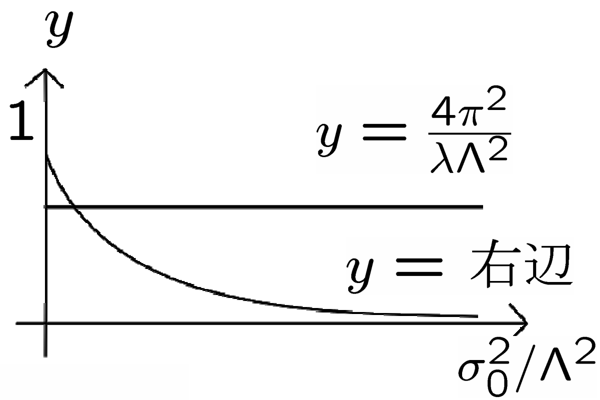
・ $V(\sigma,\pi=0) - V(\sigma=0,\pi=0)$ の概形 :



$\frac{1}{\lambda} \geq \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}$



$\frac{1}{\lambda} < \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}$



・ $\left.\frac{\partial V}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_0} = 0$ の $\sigma_0 \neq 0$ なる解は

$$\frac{4\pi^2}{\lambda\Lambda^2} = 1 - \frac{\sigma_0^2}{\Lambda^2}\ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{\sigma_0^2}\right)$$ を満たす (**)

・pion massless poleの確認:

$$\Gamma[\pi,\sigma] \equiv (\sigma,\pi\text{を外線とする}\,\text{1PI diagrams}\text{の和})$$

・inverse propagator for pion $\equiv \tilde{\Gamma}_\pi^{(2)}(p)\cdot(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+q) \equiv \left[\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\pi(p)\delta\pi(q)}\right]_{\sigma=\sigma_0,\pi=0}$

・計算結果

$$\tilde{\Gamma}_\pi^{(2)}(p) = -\frac{1}{\lambda} + \int_0^1 dx \int^\Lambda \frac{d^4k}{i(2\pi)^4}\frac{4(\sigma_0^2-k^2+x(1-x)p^2)}{(\sigma_0^2-k^2-x(1-x)p^2)^2}$$
$$= 0 + (\text{const})p^2 + O(p^4)$$

(**)による

・Bogoliubov変換: 今までのdiagramに基づく計算結果をもとのNJL模型で考え直す。

ψ に質量を与えない真空 $|\Omega^{(0)}\rangle$ とここから生成される状態空間 $\mathcal{V}^{(0)}$

と ψ に質量を与える真空 $|\Omega^{(m)}\rangle$ とここから生成される状態空間 $\mathcal{V}^{(m)}$

の2種類ある。

結果:
$$\langle\Omega^{(0)}|\Omega^{(m)}\rangle = \prod_{\vec{p},s}\left[\frac{1}{2}(1+\beta_{\vec{p}})\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \beta_{\vec{p}} = \frac{|\vec{p}|}{\sqrt{\vec{p}^2+m^2}}$$
$$\sim \exp\left[-V\pi m^2\int\frac{d|\vec{p}|}{(2\pi)^3}\right] \to 0$$

体積V large

- 非同値な2つの表示： この現象を抜き出すため簡単化した模型

2組の生成・消滅演算子(箱Vの中で) $c_{\vec{p}}, c^\dagger_{\vec{p}}, \quad d_{\vec{p}}, d^\dagger_{\vec{p}}$

とHamiltonian

$$H = \sum_{\vec{p}} \epsilon_{\vec{p}}(c^\dagger_{\vec{p}}\, c_{\vec{p}} + d^\dagger_{\vec{p}}\, d_{\vec{p}}) + \sum_{\vec{p}} \nu_{\vec{p}}\,(c_{\vec{p}}\, d_{-\vec{p}} + d^\dagger_{-\vec{p}}\, c^\dagger_{\vec{p}})$$

を考える。

$$\cos 2\theta_{\vec{p}} = \frac{\epsilon_{\vec{p}}}{E_{\vec{p}}}, \quad \sin 2\theta_{\vec{p}} = -\frac{\nu_{\vec{p}}}{E_{\vec{p}}}, \quad E_{\vec{p}} = \sqrt{\epsilon_{\vec{p}}^2 + \nu_{\vec{p}}^2}$$

なる $\theta_{\vec{p}}$ により

$$G = i \sum_{\vec{p}} \theta_{\vec{p}} \, (d^\dagger_{-\vec{p}} \, c^\dagger_{\vec{p}} - c_{\vec{p}} \, d_{-\vec{p}})$$ を定義

B.変換: $c_{\vec{p}}^{(\mathrm{New})} \equiv e^{-iG} c_{\vec{p}} \, e^{iG} = c_{\vec{p}} \cos\theta_{\vec{p}} + d^\dagger_{-\vec{p}} \sin\theta_{\vec{p}}$

$d_{-\vec{p}}^{(\mathrm{New})}$ も同様

$$H = \sum_{\vec{p}} E_{\vec{p}} \left(c_{\vec{p}}^{(\mathrm{New})\dagger} \, c_{\vec{p}}^{(\mathrm{New})} + d_{-\vec{p}}^{(\mathrm{New})\dagger} \, d_{-\vec{p}}^{(\mathrm{New})} \right) + \mathrm{const}$$ と対角化できる。

もとの $\mathcal{V}^{(0)}$ は $c_{\vec{p}}|0\rangle = 0$, $d_{\vec{p}}|0\rangle = 0$ なる $|0\rangle$ から生成される。

$\mathcal{V}^{(\mathrm{New})}$ は $|\mathbf{0}, \mathrm{New}\rangle \equiv e^{-iG}|0\rangle = \prod_{\vec{p}} (\cos\theta_{\vec{p}} + d^\dagger_{-\vec{p}} \, c^\dagger_{\vec{p}} \sin\theta_{\vec{p}})|0\rangle$

pairの凝縮

両者の内積 $\langle 0|\mathbf{0}, \mathrm{New}\rangle = \prod_{\vec{p}} \cos\theta_{\vec{p}} = \exp\left(-\frac{V}{(2\pi)^3} \int d\vec{p} \, |\log\cos\theta_{\vec{p}}| \right)$

$V \to \infty$

$\to 0$

6） 概略のみ

- 定理がいう zero mass 粒子 (NG boson)の存在は強い相互作用ではよかったが、電磁弱相互作用では呪縛となる。逃れるためのポイントは

  i) NG boson $\notin \mathcal{V}_{\text{phys}}$ なる状況を作る。

  あるいは

  ii) 定理の仮定を破る。

- 結論: charge が生成する変換が局所gauge変換になるよう、

  vector場(gauge potential) $A_\mu^a(x^\mu)$ を持ち込み、模型を拡張する。

  gauge 理論では量子化に際して、古典運動方程式の一部は $\mathcal{V}$ への補助条件として課さねばならない。

- $\mathcal{V}_{\text{phys}} \subset \mathcal{V}$ なので、i) の余地あり。実際やってみると j_μ はgauge 場の縦波成分にcoupleし、gauge bosonは質量を獲得する。

- 補助条件を解き$\mathcal{V}_{\text{phys}}$での量子論を作ると、明白なLorentz共変性が破れ、ii) が実現。

南部氏は超伝導現象(BCS理論)とのanalogyに導かれて、

素粒子物理学に於ける対称性の自発的破れを発見した。

“It is true that in real superconductors the collective charge fluctuation is screened by Coulomb interaction to turn into the plasma mode, which has a finite “rest mass” …”

南部さんにとって、Higgs現象は当たり前であったようだ。

目次