

数値解析の視線と立場

齊藤 宣一 (SAITO, Norikazu)

東京大学大学院数理科学研究科

新たな大学院教育の展開のための FD 研修会
—数値解析と量子コンピューター—
大阪市立大学大学院理学研究科
2012 年 1 月 26 日
大阪市立大学学術情報総合センター

自己紹介

- 氏名 (しめい) : 齊藤宣一 (さいとう のりかず)
- 専門 : 偏微分方程式の数値解析
 - 有限要素法, 有限体積法, 差分法の数学的基礎理論
 - 仮想領域法, 領域分割法の数学的基礎理論
 - 走化性粘菌方程式 (Keller-Segel 系), Navier-Stokes 方程式など
 - 解析半群, 非線形半群によるアプローチ
 - 非線形境界条件と解の正則性
- 経歴 :

自己紹介

- 氏名 (しめい) : 齊藤宣一 (さいとう のりかず)
- 専門 : 偏微分方程式の数値解析
 - 有限要素法, 有限体積法, 差分法の数学的基礎理論
 - 仮想領域法, 領域分割法の数学的基礎理論
 - 走化性粘菌方程式 (Keller-Segel 系), Navier-Stokes 方程式など
 - 解析半群, 非線形半群によるアプローチ
 - 非線形境界条件と解の正則性
- 経歴 :
 - 明治大学理工学部数学科 (B: 1991 ~ 1995, M: 1995 ~ 1997, D: 1997 ~ 1999)
 - 博士 (理学) 明治大学 (1999 年 3 月, 指導教授: 藤田宏 教授)
 - (財) 国際高等研究所 (IIAS) 特別研究員 (1999 ~ 2001)
 - 富山大学教育学部・人間発達科学部 (講師・助教授・准教授: 2001 ~ 2007)
 - 東京大学大学院数理科学研究科 (准教授: 2007 ~)

目次

- ❶ 数値解析の立場；偏微分方程式の解析方法
- ❷ 数値解析の立場；コンピュータシミュレーションへの寄与
- ❸ 数値解析の教育（東大数理を例に）
- ❹ 学生・院生時代を振り返る

目次

- 1 数値解析の立場；偏微分方程式の解析方法
- 2 数値解析の立場；コンピュータシミュレーションへの寄与
- 3 数値解析の教育（東大数理を例に）
- 4 学生・院生時代を振り返る

注意

- 数値解析 \neq コンピュータを使った数学
数値解析研究者 \neq コンピュータの達人（おたく）
- 偏微分方程式の数値解析の立場から
無限次元を有限次元へ射影（離散化）
無限桁を有限桁で近似（コンピュータ）

目次

- 1 数値解析の立場；偏微分方程式の解析方法
- 2 数値解析の立場；コンピュータシミュレーションへの寄与
- 3 数値解析の教育（東大数理を例に）
- 4 学生・院生時代を振り返る

注意

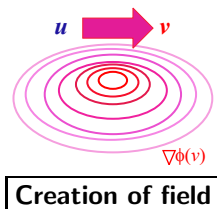
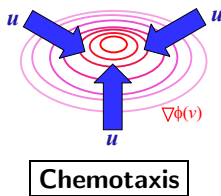
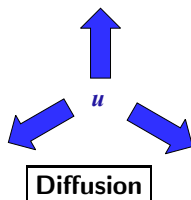
- 数値解析 \neq コンピュータを使った数学
数値解析研究者 \neq コンピュータの達人（おたく）
- 偏微分方程式の数値解析の立場から
無限次元を有限次元へ射影（離散化）
無限桁を有限桁で近似（コンピュータ）
- お詫び：“理学部数学科”の立場で話します

§1. 数値解析の立場；偏微分方程式の解析方法

Keller-Segel の走化性モデル

E. F. Keller & L. A. Segel (1970)

- $u = u(x, t)$: the cell density of the slime molds;
- $v = v(x, t)$: the concentration of the chemical substance;
- $\nabla\varphi(v)$: the velocity of u due to *chemotaxis*.



Keller-Segel system:

$$u_t = -\nabla \cdot j = \nabla \cdot (D_u \nabla u - u \nabla \varphi(v))$$

$$kv_t = D_v \Delta v + g(u, v)$$

- 1 u が (凝集による) 集中化を相当におこしても, 安定に計算を遂行できる数値計算スキームの提案
- 2 解の正值性や質量の保存やエネルギーの散逸性を再現 ← なぜ必要か?
- 3 理論的な裏付け (安定性・収束解析, 陽的な誤差評価) ← なぜ必要か?

注意:

- E. Nakaguchi and Y. Yagi (Hokkaido Math. J. 2002), A. Chertock and A. Kurganov (Numer. Math. 2008), Y. Epshteyn and A. Izmirliglu (J. Sci. Comput. 2009), (SIAM J. Numer. Anal. 2008/09)
- J. Haškovec and C. Schmeiser (J. Stat. Phys. 2009).
- F. Filbet (Numer. Math. 2006) **finite volume**
- S (IMA J. Numer. Anal. 2007), (RIMS Bessatsu 2009), (CPAA 2012)

conservative finite element

Illustration of the issue

Model problem: $u(x, t), b(x, t) \geq 0$: 1-periodic functions in x

$$u_t = u_{xx} - (b(x, t)u)_x \quad (x \in [0, 1), 0 < t < T)$$

Positivity $u(x, 0) \geq 0, \neq 0 \Rightarrow u(x, t) > 0 (t > 0)$

Finite difference method:

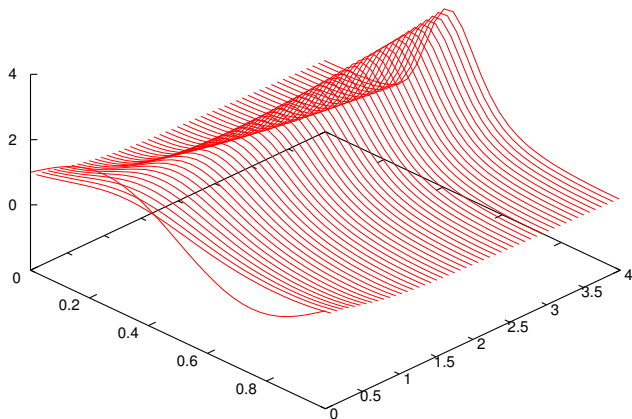
- $x_i = ih (h = 1/N), t_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$: Grid points;
- $b_i^n = b(x_i, t_n)$;
- $u_i^n \approx u(x_i, t_n)$: finite difference approximation.

forward Euler = central difference + central difference

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau_n} = \frac{u_{i-1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i+1}^{n-1}}{h^2} - \frac{b_{i+1}^{n-1}u_{i+1}^{n-1} - b_{i-1}^{n-1}u_{i-1}^{n-1}}{2h}$$

Numerical example

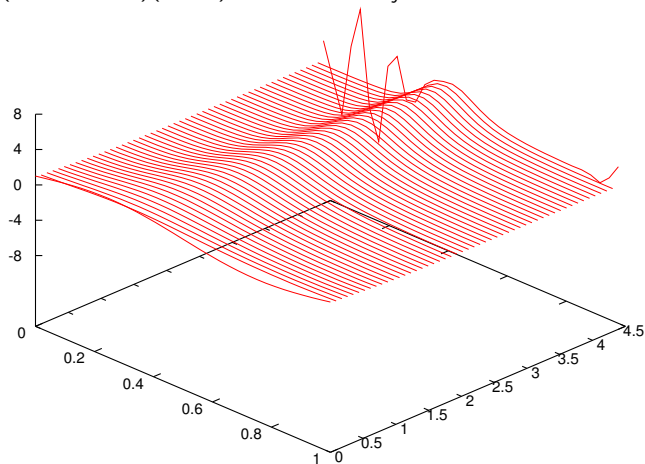
$$b(x, t) = 4(1 + \cos 2\pi x)(1 + t)^2, \quad h = 2^{-5}, \quad \tau_j = 0.4 \cdot h^2$$



$$0 \leq t_n \leq 4.0$$

Numerical example

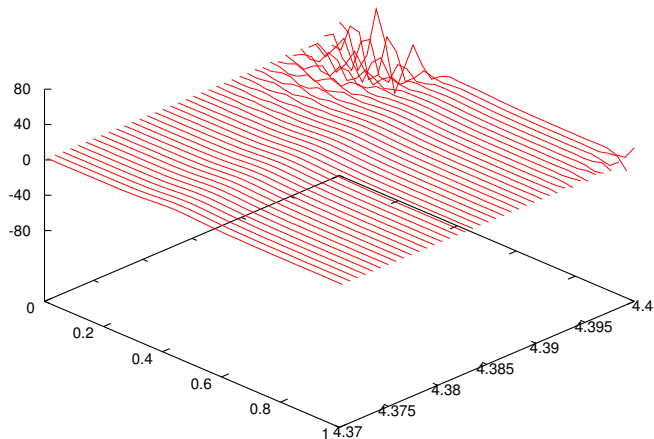
$$b(x, t) = 4(1 + \cos 2\pi x)(1 + t)^2, \quad h = 2^{-5}, \quad \tau_j = 0.4 \cdot h^2$$



$$0 \leq t_n \leq 4.4$$

Numerical example

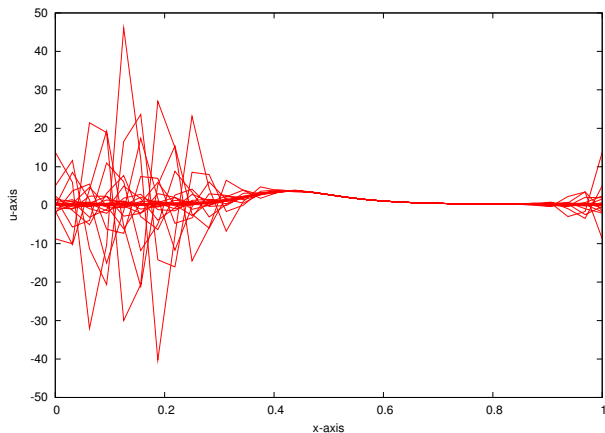
$$b(x, t) = 4(1 + \cos 2\pi x)(1 + t)^2, \quad h = 2^{-5}, \quad \tau_j = 0.4 \cdot h^2$$



$$4.37 \leq t_n \leq 4.4$$

Numerical example

$$b(x, t) = 4(1 + \cos 2\pi x)(1 + t)^2, \quad h = 2^{-5}, \quad \tau_j = 0.4 \cdot h^2$$



$4.37 \leq t_n \leq 4.4$ (another view-point)

Finite difference scheme $(\lambda_n = \tau_n/h^2) \Leftrightarrow$

$$u_i^n = (1 - 2\lambda_n)u_i^{n-1} + \left(\lambda_n + \frac{\tau_n}{2h}b_{i-1}^{n-1}\right)u_{i-1}^{n-1} + \left(\lambda_n - \frac{\tau_n}{2h}b_{i+1}^{n-1}\right)u_{i+1}^{n-1}$$

Non-negativity (*) $u_i^{n-1} \geq 0 (\forall i) \Rightarrow u_i^n \geq 0 (\forall i)$

A sufficient condition:

- $(\dots) \geq 0, (\dots) \geq 0, (\dots) \geq 0 \Rightarrow (*)$
- $h \leq \frac{1}{2\beta^{n-1}} \Rightarrow (*)$. $\left(\beta^n = \max_{1 \leq i \leq N} b_i^n\right)$

Before computation, we have to choose h satisfying:

$$h \leq \frac{1}{2\beta_T}, \quad \beta_T = \max_{0 \leq t_n \leq T} \beta^n.$$

Upwind finite difference scheme

forward Euler = central difference + upwind difference

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau_n} = \frac{u_{i-1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i+1}^{n-1}}{h^2} - \frac{b_i^{n-1}u_i^{n-1} - b_{i-1}^{n-1}u_{i-1}^{n-1}}{h}$$

\Leftrightarrow

$$u_i^n = \left(1 - 2\lambda_n - \frac{\tau_n}{h}b_i^{n-1}\right) u_i^{n-1} + \left(\lambda_n + \frac{\tau_n}{h}b_{i-1}^{n-1}\right) u_{i-1}^{n-1} + \lambda_n u_{i+1}^{n-1}$$

A sufficient condition : $\tau_n \leq \frac{h^2}{2 + h\beta_{n-1}} \Rightarrow (*)$.

- In each time step, we **re-choose** τ_n to satisfy the above condition.
- Extension to $d \geq 2$ and arbitrary Ω
 - FEM; Tabata (1977), Heinrich et al. (1977) \rightarrow flow problems.
 - In general, the upwind FEM destroys the **conservation of mass**.
- **Conservative numerical schemes;**
 - FEM; Baba-Tabata upwinding (1981), Finite volume method (FVM),

Upwind finite difference scheme

forward Euler = central difference + upwind difference

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau_n} = \frac{u_{i-1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i+1}^{n-1}}{h^2} - \frac{b_i^{n-1} u_i^{n-1} - b_{i-1}^{n-1} u_{i-1}^{n-1}}{h}$$

⇔

$$u_i^n = \left(1 - 2\lambda_n - \frac{\tau_n}{h} b_i^{n-1}\right) u_i^{n-1} + \left(\lambda_n + \frac{\tau_n}{h} b_{i-1}^{n-1}\right) u_{i-1}^{n-1} + \lambda_n u_{i+1}^{n-1}$$

A sufficient condition : $\tau_n \leq \frac{h^2}{2 + h\beta_{n-1}} \Rightarrow (*)$.

- In each time step, we **re-choose** τ_n to satisfy the above condition.
- Extension to $d \geq 2$ and arbitrary Ω
 - FEM; Tabata (1977), Heinrich et al. (1977) → flow problems.
 - In general, the upwind FEM destroys the **conservation of mass**.
- **Conservative numerical schemes;**
 - FEM; Baba-Tabata upwinding (1981), Finite volume method (FVM),
- **主テーマ (の一つ) : 非線形 PDE に対する保存的スキームの開発と解析**

§2. 数値解析の立場；コンピュータシミュレーションへの寄与

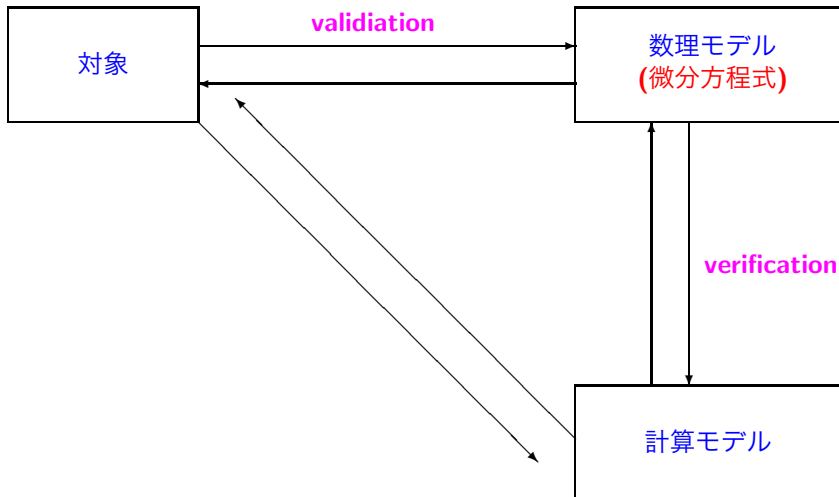
CREST: 放射線医学と数理科学の協働による高度臨床診断の実現

<http://www.ems.okayama-u.ac.jp/suito/CREST/index.html>

- 代表者：水藤寛（岡山大学，応用数学，数値流体力学）
- 共同研究者：植田琢也（聖路加国際病院，放射線科医師），栗原考次（岡山大学，統計学），滝沢研二（早稲田大学高等研究所，数値流体力学），齊藤宣一（東大数理，数値解析）

The screenshot shows the homepage of the CREST project. At the top, the logo 'CREST' is displayed next to the title '放射線医学と数理科学の協働による高度臨床診断の実現' and the subtitle 'ALLIANCE BETWEEN MATHEMATICS AND RADIOLOGY'. A 'HOME' button is in the top right. A left-hand navigation menu includes links for 'Contents', 'トップページ', 'メンバー', '研究概要', '関係する研究会', '研究内容の紹介', '研究業績 (論文等)', '研究業績 (口頭発表)', 'お知らせ', and '問い合わせ'. The main content area features a large banner with three 3D visualizations: a green and blue brain scan, a blue and red brain scan, and a green and red curved structure. Below the banner, a news section titled 'News & Topics' lists several events: '2011年 2月20日 JST数学領域さがけキャラバン「藍がわりゆく数学 in 山形」が開催されました。', '2011年 2月19日 文部科学省主催のワークショップ「予兆の解明と数学」が開催されました。', '2011年 2月16日 JST数学領域シンポジウム「接続する数学」が開催されました。', '2011年 1月24日 正式ホームページに移行しました。(このページです。)', and '2010年 11月15日 仮ホームページをアップしました。' A small blue box on the left side of the page contains the text '研究領域ホームページへ 数学と数分界の協働によるブレイクスルーの探索 (研究代表: 西岡健北(北海道大学))'.

数学の役割



Boundary conditions for the NS equations

In a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, we consider

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = \nu \Delta u - \nabla p + f, \quad \nabla \cdot u = 0.$$

On the boundary $\partial\Omega$, we usually pose:

- Dirichlet condition (adhesive condition) $u = \beta$ with $\int_{\partial\Omega} \beta \, ds = 0$;
- Slip condition (Navier's condition) $u_n = 0$ and $\sigma_\tau(u) = 0$;
- Penetration condition $u_\tau = 0$ and $\sigma_n(u, p) = 0$.

Notation.

- n : the outer unit normal to the boundary;
- For vector field u , set $u_n = u \cdot n$ and $u_\tau = u - nu_n$;
- $e_{i,j}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$: the rate-of-strain tensor for u ;
- $T_{i,j}(u, p) = -p\delta_{ij} + 2\nu e_{i,j}(u)$: Cauchy stress tensor;
- $\sigma(u, p) = (T_{ij}(u, p))n = n\sigma_n(u, p) + \sigma_\tau(u)$: the stress (traction) vector.

Slip boundary condition of friction type

For given a *modulus function of friction* $g = g(s)$ ($s \in \partial\Omega$), on $\partial\Omega$:

$$(i) \begin{cases} |\sigma_\tau(u)| < g & \Rightarrow u_\tau = 0, \\ |\sigma_\tau(u)| = g & \Rightarrow \begin{cases} u_\tau = 0 \text{ or } u_\tau \neq 0, \\ u_\tau \neq 0 \Rightarrow \sigma_\tau(u) = -g u_\tau / |u_\tau| \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (ii) |\sigma_\tau(u)| \leq g, \quad \sigma_\tau(u) \cdot u_\tau + g|u_\tau| = 0;$$

$$\Leftrightarrow (iii) u_n = 0, \quad -\sigma_\tau(u) \in g\partial|u_\tau|.$$

- It was proposed by H. Fujita (1994) in order to model some flow phenomena in applications ([flow through a drain with its bottom covered by sherbet](#), and so on....). He studied weak solutions of the stationary Stokes and NS equations.
- A similar condition is well studied in contact problems of the elasticity theory.

Notation (subdifferential). For $z \in \mathbb{R}^m$,

$$\partial|z| = \begin{cases} z/|z| & (z \neq 0) \\ \{w \in \mathbb{R}^m \mid |w| \leq 1\} & (z = 0). \end{cases}$$

Leak boundary condition of friction type

For given a *modulus function of friction* $g = g(s)$ ($s \in \partial\Omega$), on $\partial\Omega$:

$$(i) \quad \begin{cases} |\sigma_n(u, p)| < g & \Rightarrow u_n = 0, \\ |\sigma_n(u, p)| = g & \Rightarrow \begin{cases} u_n = 0 \text{ or } u_n \neq 0, \\ u_n \neq 0 \Rightarrow \sigma_n(u, p) = -g u_n / |u_n| \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (ii) \quad |\sigma_n(u, p)| \leq g, \quad \sigma_n(u, p)u_n + g|u_n| = 0;$$

$$\Leftrightarrow (iii) \quad u_\tau = 0, \quad -\sigma_n(u, p) \in g\partial|u_n|.$$

- It was also proposed by H. Fujita (1994) in order to model some flow phenomena in applications ([flow through a certain filter with semi-permeable membrane](#), and so on....).
- The motivation of introducing those BC comes from practical intention to model mathematically certain flow phenomena in applications.
- On the other hand, the study of those BC deserves theoretical interests for its own sake because of the coherent use of celebrated methods in applied analysis. Also, they bring us some **new methods** and **tools** (from both analytical and numerical viewpoints) to attack some flow phenomena.

Some successful applications by Prof. Suito's group:

- 1 Wave motion breaking on the shore (environmental problem)
- 2 Pollution due to spilled oil into the sea (environmental problem)
- 3 Cerebrospinal fluid flow problem (medical problem)

The Stokes problem with the leak BC of friction type

(S-LF)

Find $u = (u_1, \dots, u_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ and $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ s.t.

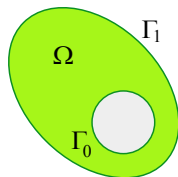
$$\begin{cases} -\nu \Delta u + \nabla p = f, & \nabla \cdot u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & & \text{on } \Gamma_0, \\ u_\tau = 0, \quad -\sigma_n \in g \partial |u_n| & & \text{on } \Gamma_1 \end{cases}$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$: b'dd domain ($d = 2, 3$), $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$;
- $f \in L^2(\Omega)^d$; $0 < g \in L^\infty(\Gamma_1)$; $\nu > 0$.

Remark. BC on Γ_1 may be replaced by either

(i) $|\sigma_n| \leq g, \quad \sigma_n u_n + g |u_n| = 0$ or

(ii)
$$\begin{cases} |\sigma_n| < g & \implies u_n = 0, \\ |\sigma_n| = g & \implies \begin{cases} u_n = 0 \text{ or } u_n \neq 0, \\ u_n \neq 0 \implies \sigma_n = -g u_n / |u_n| \end{cases} \end{cases}$$



Variational formulation: variational inequality

For any $v \in K_\tau = \{v \in H^1(\Omega)^d \mid v = 0 \text{ on } \Gamma_0, v_\tau = 0 \text{ on } \Gamma_1\}$, we have:

$$\int_{\Gamma_1} \sigma_n v_n \, dS = \underbrace{2\nu \int_{\Omega} e_{ij}(u) e_{ij}(v) \, dx}_{=a(u,v)} - \underbrace{\int_{\Omega} p (\nabla \cdot v) \, dx}_{=b(v,p)} - \underbrace{\int_{\Omega} f v \, dx}_{=(f,v)},$$

$$\underbrace{\int_{\Gamma_1} g |v_n| \, dS}_{=j(v_n)} - \int_{\Gamma_1} g |u_n| \, dS \geq - \int_{\Gamma_1} \sigma_n (v_n - u_n) \, dS.$$

(W-S-LF)

Find $(u, p) \in K_\tau \times L^2(\Omega)$ s.t.

$$\begin{cases} a(u, v - u) + b(v - u, p) + j(v_n) - j(u_n) \geq (f, v - u) & (\forall v \in K_\tau), \\ b(u, q) = 0 & (\forall q \in L^2(\Omega)) \end{cases}$$

A issue on non-uniqueness of p

- Let (u, p^*) be a solution of (W-S-LF) and set

$$k_1 = \sup_{\Gamma_1} [\sigma_n(u, p^*) - g], \quad k_2 = \inf_{\Gamma_1} [\sigma_n(u, p^*) + g].$$

Then, $p = p^* + k$, with $k \in [k_1, k_2]$, is also an associating pressure of u .

- $u_n \neq 0$ on $\Gamma'_1 \subset \Gamma_1 \Rightarrow p$ is uniquely determined.
- Example.** We consider

$$\Omega = \{(r, \theta) \mid 1 < r < 2\}, \quad \Gamma_0 = \{r = 1\}, \quad \Gamma_1 = \{r = 2\}.$$

Then, the functions $u(r, \theta) = w(r)e_\theta$ and $p(r) = \kappa r$ solve

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= -6e_\theta r^{-2} + \kappa e_r, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{\Gamma_0} = 0, \\ u_\tau|_{\Gamma_1} &= 0, \quad u_n|_{\Gamma_1} = 0, \quad \sigma_n(u, p) = -p(r), \quad |\sigma_n(u, p)| = 2\kappa, \end{aligned}$$

where $w(r) = 4r^{-1} + 2r - 6$ and $\kappa > 0$ is a constant.

Set $g = 2\kappa + 1$. (u, p) above is a solution of (W-S-LF). Moreover,

$$\begin{cases} k \in [k_1, k_2] = [-1 - 4\kappa, 1] & \Rightarrow (u, p + k) \text{ solves (W-S-LF);} \\ k \notin [k_1, k_2] & \Rightarrow (u, p + k) \text{ does not solve (W-S-LF).} \end{cases}$$

(Notice that $k \notin [k_1, k_2] \Rightarrow |\sigma_n(u, p_k)| > g$.)

- Below Ω is assumed to be a polygon and Γ_1 is a side of $\partial\Omega$ and $\Gamma_0 = \partial\Omega \setminus \bar{\Gamma}_1$.
- $\{\mathcal{T}_h\}_h$ family of regular triangulations of Ω .

- Nodes on $\bar{\Gamma}_1$ are numbered as $M_1, M_{1/2}, M_2, \dots, M_m$ and set

$$\Gamma_{1,h} = \{M_1, M_{1/2}, M_2, \dots, M_{m+1/2}, M_m\},$$

$$\Gamma_{1,h}^0 = \{M_{1/2}, M_2, \dots, M_{m+1/2}\}.$$

- Similarly, $\Gamma_{0,h}$ denotes the set of all nodes locating on $\bar{\Gamma}_0$.
- The P2/P1 finite element spaces:

$$V_h = \{v \in C(\bar{\Omega})^2 \mid v|_T \in \mathcal{P}_2 \ (\forall T \in \mathcal{T}_h)\},$$

$$V_{h\tau} = \{v \in V_h \mid v(M) = 0 \ (\forall M \in \Gamma_{0,h}), \ v_\tau(M) = 0 \ (\forall M \in \Gamma_{1,h}^0)\},$$

$$Q_h = \{q \in C(\bar{\Omega}) \mid q|_T \in \mathcal{P}_1 \ (\forall T \in \mathcal{T}_h)\}.$$

Finite element approximation (W-S-LFh)

(W-S-LFh)

Find $(u_h, p_h) \in V_{h\tau} \times Q_h$ s.t.

$$\begin{cases} a(u_h, v_h - u_h) + b(v_h - u_h, p_h) \\ \quad + j_h(v_{hn}) - j_h(u_{hn}) \geq (f, v_h - u_h) & (\forall v_h \in V_{h\tau}), \\ b(u_h, q_h) = 0 & (\forall q_h \in Q_h) \end{cases}$$

Here, the barrier term of friction $j(\eta)$ is approximated by

$$j_h(\eta) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^m |e_i| (g_i |\eta_i| + 4g_{i+1/2} |\eta_{i+1/2}| + g_{i+1} |\eta_{i+1}|),$$

where $g_{i+s} = g(M_{i+s})$, $\eta_{i+s} = \eta(M_{i+s})$ and $e_i = \text{dist}(M_i, M_{i+1})$.

Error estimates under regularity assumptions

For $q \in L^2(\Omega)$, we write $\tilde{p} = p - |\Omega|^{-1}(p, 1)_{L^2}$.

Theorem 1 (Kashiwabara, 2009)

- $g \in C^1(\bar{\Gamma})$;
 - $(u, p) \in H^{1+\varepsilon}(\Omega)^2 \times H^\varepsilon(\Omega)$, for some $\varepsilon \in (0, 2)$, solution of (W-S-LF).
- (i) We have:

$$\|u - u_h\|_{H^1} + \|\tilde{p} - \tilde{p}_h\|_{L^2} \leq Ch^{\min\{\varepsilon/2, 1/4\}}$$

- (ii) Further, if $p - p_h \in L_0^2(\Omega)$, we have

$$\|u - u_h\|_{H^1} + \|p - p_h\|_{L^2} \leq Ch^{\min\{\varepsilon, 1/4\}}$$

Remark. If $\varepsilon = 2$ is possible, we have only $O(h^{1/4})$, which is not the optimal rate of convergence of the P2 element.

Error estimates under regularity and *sign* conditions

Theorem 2 (Kashiwabara, 2009)

- $g \in C^2(\bar{\Gamma})$; $(u, p) \in H^{1+\varepsilon}(\Omega)^2 \times H^1(\Omega)$ for some $\varepsilon \in (0, 2)$.
- $p - p_h \in L_0^2(\Omega)$; *The sign condition is satisfied.*

(i) We have:

$$\|u - u_h\|_{H^1} + \|p - p_h\|_{L^2} \leq Ch^{\min\{\varepsilon, 1\}}$$

(ii) Further, if g is a polynomial of the degree ≤ 1 , we have

$$\|u - u_h\|_{H^1} + \|p - p_h\|_{L^2} \leq Ch^\varepsilon.$$

The sign condition

Solutions u and u_h of (W-S-LF) and (W-S-LFh) satisfy:

- 1 $(\Pi_h u)_n$ and u_{hn} have zeros only at nodes M_1, M_2, \dots, M_{m+1} on Γ_1 ;
- 2 $\text{sign}(u_n) = \text{sign}((\Pi_h u)_n)$ on Γ_1 .

$\Pi_h : C(\bar{\Omega}) \rightarrow V_h$ denotes the Lagrange interpolation operator.

Numerical examples

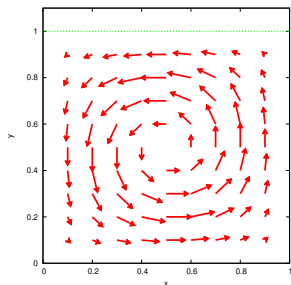
• **Geometry:** $\Omega = (0, 1)^2$, $\Gamma_1 = \{(x, 1) \mid 0 < x < 1\}$ (Green), $\Gamma_0 = \Omega \setminus \bar{\Gamma}_1$

• **Data:** $\nu = 1$ and

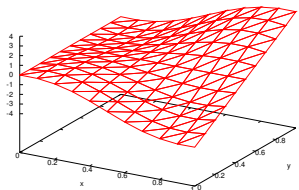
$$f_1(x, y) = 0;$$

$$f_2(x, y) = 120(2x - 1)y^2(1 - y)^2 \\ + 80x(1 - x)(1 - 2x)(6y^2 - 6y + 1) + 8(6x^5 - 15x^4 + 10x^3)$$

• If we pose $u = 0$ on Γ_1 , then (u, p) is given as



u



p

Numerical examples (W-S-LFh)'

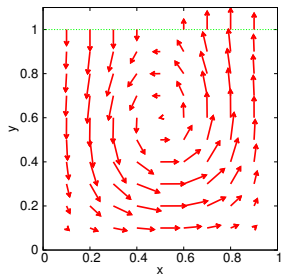


Figure: $g = 0.1$

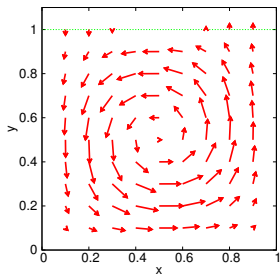


Figure: $g = 1.2$

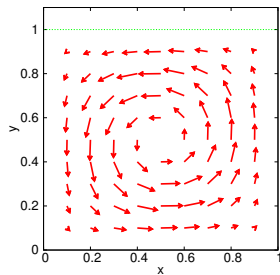


Figure: $g = 3.0$

(ENS-LF)

Find $u : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ and $p : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u_t - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f, & \nabla \cdot u = 0 & \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ u = 0 & & \text{on } (0, T) \times \Gamma_0, \\ u_\tau = 0, \quad -\sigma_n \in g \partial |u_n| & & \text{on } (0, T) \times \Gamma_1, \\ u|_{t=0} = u_0. & & \end{cases}$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$: b'dd domain ($d = 2, 3$), $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$

Nonstationary NS with leak BC of friction type

(W-ENS-LF)

Find, for a.e. $t \in (0, T)$, $(u(t), p(t)) \in V_\tau \times L^2(\Omega)$ s.t.

$$\begin{cases} (u', v - u) + a(u, v - u) + a_1(u, u, v - u) \\ \quad + b(v - u, p) + j(v_n) - j(u_n) \geq (f, v - u) & (\forall v \in V_\tau), \\ b(u, q) = 0 & (\forall q \in L^2(\Omega)), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Here, as usual,

$$a_1(u, v, w) = \int_{\Omega} [(u \cdot \nabla)v] \cdot w \, dx.$$

Difficulty.

$$a_1(u, v, u) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} u_n |v|^2 \, dS \quad (\text{if } \nabla \cdot u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u_n = 0 \text{ on } \Gamma_0).$$

Nonstationary NS with leak BC of friction type

T. Kashiwabara has recently proved:

Theorem 3 (Kashiwabara, 2010)

Suppose that

- 1 Γ_0 : class of C^2 and Γ_1 : class of C^4 ,
- 2 $f \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^d)$ and $f' \in L^2((0, T) \times \Omega)^d$,
- 3 $g \in H^1(0, T; L^2(\Gamma_1))$ and $g(0) \in H^1(\Gamma_1)$,
- 4 $u_0 \in H^2(\Omega)^d \cap V_\tau$ satisfies the leak BC of friction type (with $g(0)$), and $u_{0,n} = 0$ on Γ_1 .

Then, for a suitably small $0 < T' < T$, there exists

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0, T'; V_\tau), & u' \in L^\infty(0, T'; L^2(\Omega)^d) \cap L^2(0, T'; V_\tau), \\ p \in L^\infty(0, T'; L^2(\Omega)^d) \end{cases}$$

satisfying (W-ENS-LF) in $[0, T']$.

個人的な思い

- コンピュータ・シミュレーションによる諸現象の研究は、狭い意味での理工学を超えて、生命科学、臨床医学、経済学にまで応用範囲を拡げ、広く有益な情報をもたらしている。
- 複雑かつ大規模なコンピュータ・シミュレーションにおける数学的諸問題を解決することは、数学の重要な役割の一つ。
- 実際、シミュレーションは、コンピュータの内部で完結するものではなく、対象とする現象の数理モデル化、モデルの数学解析、近似と離散化、アルゴリズムの実装とプログラムの作成、データの可視化、実測データと計算結果の比較検討、信頼性の検証などの一連の過程であり、それらが**数学という幹**で強く繋がっている。
- すなわち、数値解析は、**数学的真理の追求**と**数学を通じた社会への貢献**を両立できる研究テーマ

§3. 数値解析の教育（東大数理を例に）

東大数理における数値解析関係の講義

- ① 計算数理 I (数学科 3 年, 夏学期, 金曜 2 限)
- ② 計算数理演習 (数学科 3 年, 夏学期, 金曜 3 限)
- ③ 計算数理 II ・ 数値解析学 (数学科 4 年 ・ 大学院, 夏学期, 木曜 2 限)

菊地文雄教授 (現, 一橋大学特任教授)

- 有限要素法の数学的理論のパイオニア (inf-sup 条件, 離散コンパクト性, ...)

計算数理 I (数学科 3 年)

- ① 浮動小数点数
- ② 連立一次方程式
 - 直接法 (Gauss の消去法, LU 分解), 線形反復法 (Jacobi 法, Gauss-Seidel 法, SOR 法)
 - ノルム, 行列ノルム, 条件数, 安定性解析
- ③ 補間と積分
 - Lagrange 補間多項式と複合積分公式 (中点則, 台形則など)
 - 直交多項式と Gauss 型積分公式
- ④ 非線形方程式
 - Newton 法, 多次元 Newton 法, 縮小写像の原理と反復法の収束
- ⑤ 常微分方程式の初期値問題
 - 一段法の解析, Runge-Kutta 法の構成, 埋め込み型公式, 絶対安定領域
- ⑥ 共役勾配法 (A : 正定値対称)
 - 二次形式 $J(x) = \frac{1}{2}x \cdot Ax - b \cdot x$ の最小化問題
 - Krylov 部分空間 $\mathcal{K}_n(A, b) = \text{span} \{b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b\}$ の役割

計算数理解習 (数学科 3 年)

- 1 計算数理 I で扱った話題に関する計算実習
- 2 自作のプログラムで実習, 結果をレポート (LaTeX → pdf) で提出.
- 3 プログラミングの演習ではない. 言語の選択は自由.
- 4 初心者向けに, ガイダンス (参考資料), サンプルプログラム (C 言語) を配布して, 準備期間 (1ヶ月間) を設けている.

要点

- 算法の紹介とプログラミングが主眼ではない.
- 抽象的な数学理論が, 具体的な算法の設計・解析にどのよう寄与するのかを理解してもらうことを目標.
 - “はじめての応用数学”
 - 応用数学 \neq 既成数学の適用の羅列.
 - 実用価値の低い算法を取り上げることもある.

例題 1 : グラフ描画の問題 (?)

自然数 N をパラメータとする関数

$$f_N(x) = \sum_{m=1}^N \frac{4}{(2m-1)\pi} \sin(2m-1)x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

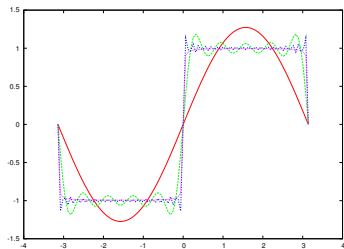
について, $N = 1, 5, 20, 50$ の時のグラフを描け.

例題 1 : グラフ描画の問題 (?)

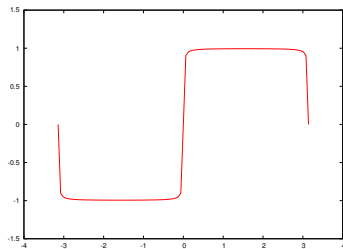
自然数 N をパラメータとする関数

$$f_N(x) = \sum_{m=1}^N \frac{4}{(2m-1)\pi} \sin(2m-1)x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

について, $N = 1, 5, 20, 50$ の時のグラフを描け.



$(f_1(x), f_5(x), f_{20}(x), f_{50}(x))$



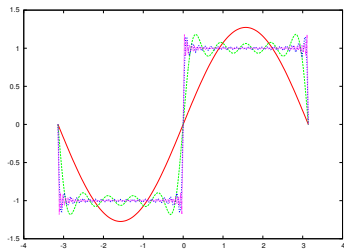
$(f_{50}(x) \text{ のみ})$

例題 1 : グラフ描画の問題 (?)

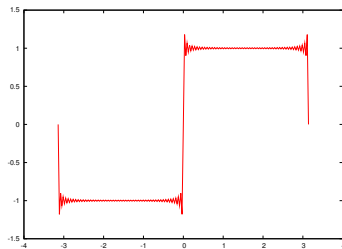
自然数 N をパラメータとする関数

$$f_N(x) = \sum_{m=1}^N \frac{4}{(2m-1)\pi} \sin(2m-1)x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

について, $N = 1, 5, 20, 50$ の時のグラフを描け.



$(f_1(x), f_5(x), f_{20}(x), f_{50}(x))$



$(f_{50}(x) \text{ のみ})$

ヒントと例題が命取り

次のようなヒントを付記した：何をして良いかわからない人には、『教材』にある「教育用計算機システムにおける数値計算の第一歩: gnuplot の利用」と「C言語一夜漬け」の第8章が参考になるでしょう。



- n を与えて, $x_i = ih$, ($i = 0, \dots, n$), $h = \frac{2\pi}{n}$ として, x_i における関数値 $f(x_i)$ のリスト

$$\begin{array}{ll} x_0 & f(x_0) \\ x_1 & f(x_1) \\ & \vdots \\ & \vdots \\ x_n & f(x_n) \end{array}$$

を出力するプログラムを作成する。そして, gnuplot(ニュープロット) でグラフを描画する。

- そして, サンプルプログラムを数題載せたが, 実行例で, いずれも $n = 100$ としてしまった。
- しかし, いまの場合 $f_{50}(x)$ を表現するのに, $n = 100$ では不足 ($n \geq 200$ が必要)。
- これは, いろいろな意味で, **良い教訓**。

例題 2：定積分の計算

次の定積分を，等間隔標本点 $x_j = ih$ ($i = 0, \dots, m$), $h = 1/m$ を用いて，複合中点則 $R_h(f)$ ，複合台形則 $T_h(f)$ ，複合シンプソン則 $S_h(f)$ で計算して，結果を検討せよ．特に，小区間の長さ $h = 1/m$ と誤差の関係を詳しく調べよ．

$$Q(f) = \int_0^1 e^{\pi x} \sin(\pi x) dx = \frac{e^\pi + 1}{2\pi}, \quad f(x) = e^{\pi x} \sin(\pi x),$$

$$Q(f) = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}, \quad f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

定理.

$$f \in C^2[0, 1] \quad \Rightarrow \quad |Q(f) - R_h(f)| \leq \frac{1}{24} h^2 \|f''\|_{L^\infty},$$

$$f \in C^2[0, 1] \quad \Rightarrow \quad |Q(f) - T_h(f)| \leq \frac{1}{12} h^2 \|f''\|_{L^\infty},$$

$$f \in C^4[0, 1] \quad \Rightarrow \quad |Q(f) - S_h(f)| \leq \frac{1}{2880} h^4 \|f^{(4)}\|_{L^\infty}$$

これらを，例えば， $|Q(f) - S_h(f)| = O(h^4)$ と書くのは良くない．

数値例の検討

- $E^{(1)}(f) = Q(f) - R_h(f)$ などにおいて,
 $|E_h| = Ch^\rho \Leftrightarrow \rho = \log|E_h(f)| / \log(Ch)$ を仮定して, 計算により ρ を推定.

h	$\rho_h^{(1)}$	$\rho_h^{(2)}$	$\rho_h^{(3)}$
2^{-2}	1.803	1.894	4.121
2^{-4}	1.990	1.994	4.010
2^{-6}	1.999	2.000	4.001
2^{-8}	2.000	2.000	4.000

$$f(x) = e^{\pi x} \sin(\pi x)$$

h	$\rho_h^{(1)}$	$\rho_h^{(2)}$	$\rho_h^{(3)}$
2^{-2}	1.476	1.489	1.507
2^{-4}	1.494	1.497	1.502
2^{-6}	1.498	1.499	1.500
2^{-8}	1.500	1.500	1.500

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

- $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ については, $f \in C^2(0,1)$ であるが, $f \notin C^2[0,1]$ ではなく, $\|f''\|_{L^\infty} = +\infty$ となっているため, 定理は適用できない (ここまでは普通)
- しかし, $|E_h^{(i)}(g)| = C_i h^{3/2}$ が予想できる
- 実際に, $\|f''\|_2 < \infty$ が成り立つので, この仮定の下で,
 $|R_h(g) - Q(g)| \leq Ch^{3/2} \|g''\|_2$ の形の誤差評価を導くことができる.
- もっと緩い仮定の下での誤差評価

例題 3：常微分方程式の初期値問題

次の問題を、一様刻み幅 h のホイン法、古典的ルンゲ・クッタ法 (= ふつうのルンゲ・クッタ法)、ランベルト法 (4 段数 3 次公式) で計算して、誤差の h へ依存性を調べよ。

$$\frac{d}{dt}u(t) = -\frac{1}{2e^t - 1}u(t) \quad (0 < t < 1), \quad u(0) = 2,$$

$$\frac{d}{dt}v(t) = v(t)[1 - v(t)] \quad (0 < t < 1), \quad v(0) = 2$$

ルンゲ・クッタ法の復習

- 常微分方程式 $\frac{d}{dt}u(t) = f(t, u(t))$ ($0 < t < T$), $u(0) = a$.
- 離散変数 $t_n = nh$, $h = T/N$, 近似解 $U_n \approx u(t_n)$

ホイン法 (2 段数 2 次精度のルンゲ・クッタ法)

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = f(t_n, U_n) \\ k_2 = f(t_n + h, U_n + hk_1). \end{cases}$$

誤差評価:

$$u \in C^3[0, T] \Rightarrow \max_{0 \leq t_n \leq T} |u(t_n) - U_n| \leq Ch^2.$$

ルンゲ・クッタ法の復習

- 常微分方程式 $\frac{d}{dt}u(t) = f(t, u(t))$ ($0 < t < T$), $u(0) = a$.
- 離散変数 $t_n = nh$, $h = T/N$, 近似解 $U_n \approx u(t_n)$

古典的ルンゲ・クッタ法 (4 段数 4 次精度のルンゲ・クッタ法)

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(t_n, U_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{1}{2}h, U_n + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(t_n + \frac{1}{2}h, U_n + \frac{1}{2}hk_2) \\ k_4 = f(t_n + h, U_n + hk_3) \end{cases}$$

誤差評価:

$$u \in C^5[0, T] \Rightarrow \max_{0 \leq t_n \leq T} |u(t_n) - U_n| \leq Ch^4.$$

ルンゲ・クッタ法の復習

- 常微分方程式 $\frac{d}{dt}u(t) = f(t, u(t))$ ($0 < t < T$), $u(0) = a$.
- 離散変数 $t_n = nh$, $h = T/N$, 近似解 $U_n \approx u(t_n)$

ランベルト法 (4 段数 3 次精度のルンゲ・クッタ法)

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{n+1} = U_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_4) \\ k_1 = f(t_n, U_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{1}{2}h, U_n + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(t_n + \frac{1}{2}h, U_n + \frac{1}{2}hk_1 - \frac{3}{2}hk_2) \\ k_4 = f(t_n + h, U_n + \frac{4}{3}hk_2 - \frac{1}{3}hk_3) \end{array} \right.$$

誤差評価:

$$u \in C^5[0, T] \Rightarrow \max_{0 \leq t_n \leq T} |u(t_n) - U_n| \leq Ch^3.$$

数値例の検討

積分のときと同様に, $E_h^{(i)} = \max_{0 \leq t_n \leq T} |u(t_n) - U_n|$ において, $E_h^{(i)} = Ch^\rho$ を仮定して, ρ の値を推定.

h	$\rho_h^{(1)}$	$\rho_h^{(2)}$	$\rho_h^{(3)}$
0.05000	2.053	4.044	3.248
0.02500	2.028	4.025	3.126
0.01250	2.014	4.014	3.063
0.00625	2.007	4.007	3.031

h	$\rho_h^{(1)}$	$\rho_h^{(2)}$	$\rho_h^{(3)}$
0.05000	2.082	4.028	4.023
0.02500	2.048	4.023	4.023
0.01250	2.024	4.014	4.012
0.00625	2.012	4.007	4.007

- ランベルト法は, 自励系に対しては 4 次精度となる (非自励系に対しては 3 次精度).

数値例の検討

積分のときと同様に, $E_h^{(i)} = \max_{0 \leq t_n \leq T} |u(t_n) - U_n|$ において, $E_h^{(i)} = Ch^\rho$ を仮定して, ρ の値を推定.

h	$\rho_h^{(1)}$	$\rho_h^{(2)}$	$\rho_h^{(3)}$
0.05000	2.053	4.044	3.248
0.02500	2.028	4.025	3.126
0.01250	2.014	4.014	3.063
0.00625	2.007	4.007	3.031

h	$\rho_h^{(1)}$	$\rho_h^{(2)}$	$\rho_h^{(3)}$
0.05000	2.082	4.028	4.023
0.02500	2.048	4.023	4.023
0.01250	2.024	4.014	4.012
0.00625	2.012	4.007	4.007

- ランベルト法は, 自励系に対しては 4 次精度となる (非自励系に対しては 3 次精度).
- もう一度, 方程式をしてみる:

$$\frac{d}{dt}u(t) = -\frac{1}{2e^t - 1}u(t) \quad (0 < t < 1), \quad u(0) = 2,$$

$$\frac{d}{dt}v(t) = v(t)[1 - v(t)] \quad (0 < t < 1), \quad v(0) = 2$$

数値例の検討

積分のときと同様に, $E_h^{(i)} = \max_{0 \leq t_n \leq T} |u(t_n) - U_n|$ において, $E_h^{(i)} = Ch^\rho$ を仮定して, ρ の値を推定.

h	$\rho_h^{(1)}$	$\rho_h^{(2)}$	$\rho_h^{(3)}$
0.05000	2.053	4.044	3.248
0.02500	2.028	4.025	3.126
0.01250	2.014	4.014	3.063
0.00625	2.007	4.007	3.031

h	$\rho_h^{(1)}$	$\rho_h^{(2)}$	$\rho_h^{(3)}$
0.05000	2.082	4.028	4.023
0.02500	2.048	4.023	4.023
0.01250	2.024	4.014	4.012
0.00625	2.012	4.007	4.007

- ランベルト法は, 自励系に対しては 4 次精度となる (非自励系に対しては 3 次精度).
- もう一度, 方程式をしてみる:

$$\frac{d}{dt}u(t) = -\frac{1}{2e^t - 1}u(t) \quad (0 < t < 1), \quad u(0) = 2,$$

$$\frac{d}{dt}v(t) = v(t)[1 - v(t)] \quad (0 < t < 1), \quad v(0) = 2$$

厳密解 $u(t) = v(t) = \frac{2e^t}{2e^t - 1}$.

例題 4 : 単振動の方程式

- 単振動の方程式 : $-\frac{d^2}{dt^2}x(t) = x(t)$
- 一般解 : $x(t) = A \cos t + B \sin t$ (A, B : 定数)
- 初期条件 $x(0) = 1, x'(0) = B \approx -0.023127$ の下で数値計算.

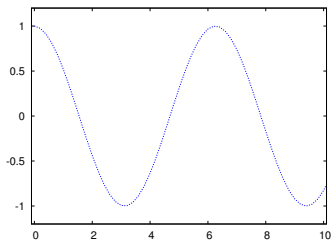
教科書には、、、

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{pmatrix}$$

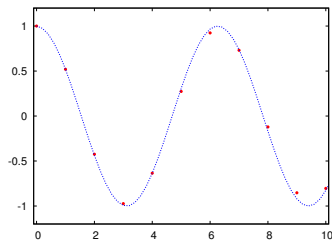
→ Runge-Kutta 法など、、、 $t_n = nh, \mathbf{U}^n \approx \mathbf{u}(t_n),$

$$\max_{0 \leq t_n \leq T} \|\mathbf{u}(t_n) - \mathbf{U}^n\|_{\infty} \leq C_T h^4.$$

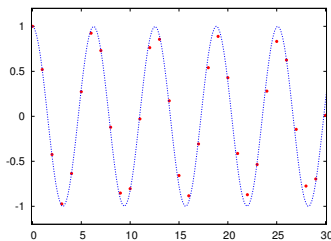
Runge-Kutta 法による計算例



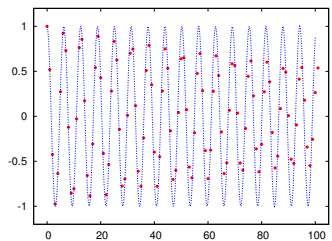
$$x(t) = \cos t + B \sin t$$



$$0 \leq t \leq 10$$



$$0 \leq t \leq 30$$



$$0 \leq t \leq 100$$

別の解法：差分法

- 微分方程式の近似を考える上で、**差分法**は最も基本的。
- 前進差分 $\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$, 後退差分 $\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t) - x(t-h)}{h}$
- 二階中心差分 $\frac{d^2x(t)}{dt^2} \approx \frac{x(t-h) - 2x(t) + x(t+h)}{h^2}$

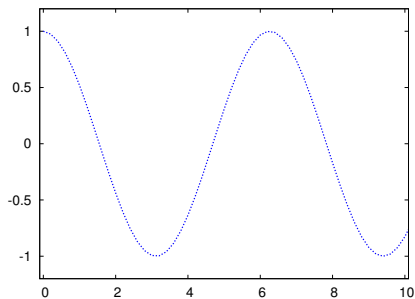
$-x''(t) = x(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = B$ は、より**自然に**

$$-\frac{X_{n-1} - 2X_n + X_{n+1}}{h^2} = X_n \quad (n \geq 1), \quad X^0 = 0, \quad \frac{X^1 - X^0}{h} = B$$

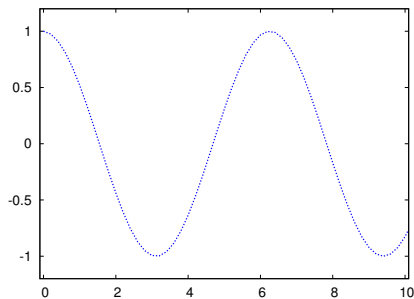
と近似できる。ただし、 $X^n \approx x(t_n)$, $t_n = nh$ であり、

$$\max_{0 \leq t_n \leq T} |x(t_n) - X^n| \leq C_T h \quad (O(h^2) \text{ ではない!})$$

差分法と Runge-Kutta 法の比較



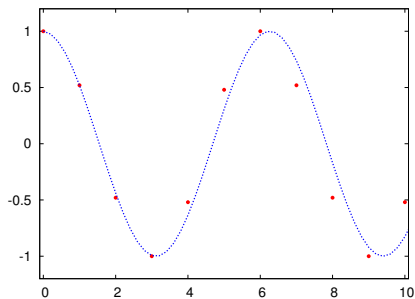
$$x(t) = \cos t + B \sin t$$



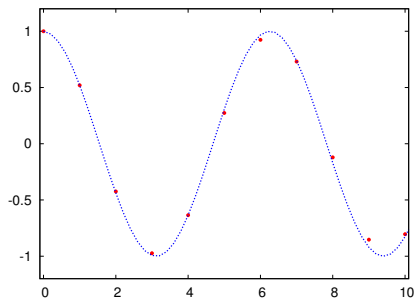
$$x(t) = \cos t + B \sin t$$

(いずれも, $h = 1$)

差分法と Runge-Kutta 法の比較



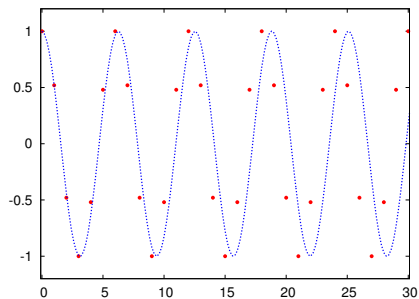
差分法 ($0 \leq t \leq 10$)



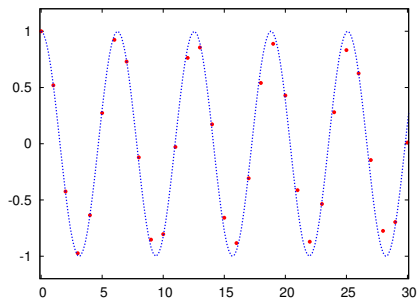
Runge-Kutta 法 ($0 \leq t \leq 10$)

(いずれも, $h = 1$)

差分法と Runge-Kutta 法の比較



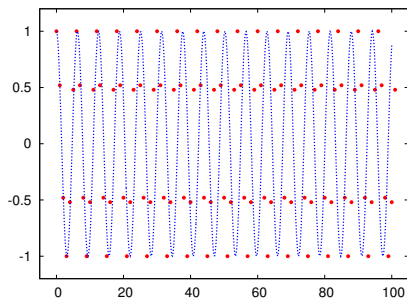
差分法 ($0 \leq t \leq 30$)



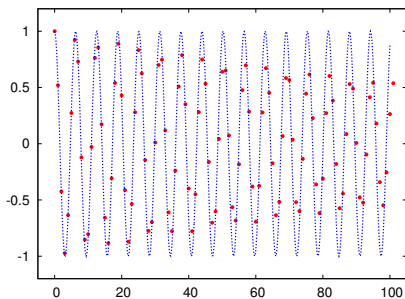
Runge-Kutta 法 ($0 \leq t \leq 30$)

(いずれも, $h = 1$)

差分法と Runge-Kutta 法の比較



差分法 ($0 \leq t \leq 100$)



Runge-Kutta 法 ($0 \leq t \leq 100$)

(いずれも, $h = 1$)

エネルギーの保存

- 単振動の方程式の解 $x = x(t)$

$$E = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + x^2 = \text{Const.}$$

- 差分法の解 X^n

$$\left(\frac{X^{n+1} - X^n}{h} \right)^2 + X^{n+1}X^n = \text{Const.}$$

- Runge-Kutta 法の解 \mathbf{U}^n

.....?

- ここからの教訓、、、 目的や、数学的な仮定・前提を意識することが重要

偏微分方程式の数値解析

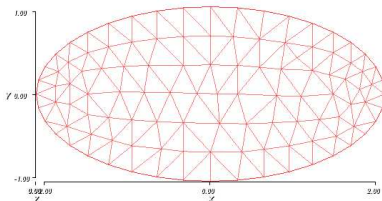
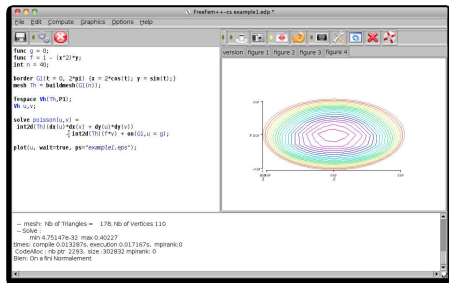
計算数理 II (数学科 4 年, 夏学期)

- 1 熱方程式 (1D) に対する差分近似
- 2 反応拡散系 (1D) に対する差分近似
- 3 Poisson 方程式 (2D) に対する有限要素法
- 4 Lax-Milgram の理論

要点

- 算法の紹介が主眼ではない.
- 関数解析 (特に, ソボレフ空間) の一部の定理を除いて, **self-contained** に行う.
- **深刻な問題点**: 演習の時間がない. 仮にあったとしても, 有限要素法のプログラムは敷居が高い.
→ **freefem++cs** の利用は有効

- J. L. Lions 数值解析研究所 (Univ. Pierre et Marie Curie)
FreeFem++ team (O. Pironneau, F. Hecht, A. Le Hyaric, J. Morice)
<http://www.freefem.org/ff++/>
- 統合環境 FreeFem++cs
<http://www.ann.jussieu.fr/~lehyaric/ffcs/index.htm>



例題 : $-\Delta u(x, y) = f(x, y)$ in Ω with $u|_{\partial\Omega} = 0$

Poisson 方程式の弱形式: Find $u \in V = H_0^1(\Omega)$ satisfying

$$J(u, v) = \iint_{\Omega} \nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) \, dx dy - \iint_{\Omega} f(x, y)v(x, y) \, dx dy = 0 \quad (\forall v \in V)$$

```
func g = 0;
func f = 1 - y*x^2;
int n = 40;

border G1(t = 0, 2*pi) { x = 2*cos(t); y = sin(t); }
mesh Th = buildmesh(G1(n));

fespace Vh(Th,P1);
Vh u,v;

solve poisson (u,v) =
  int2d(Th)(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v)) - int2d(Th)(f*v) + on(G1, u = g);

plot(u, ps="example1.eps");
```

応用：非線形楕円型偏微分方程式の解

有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ で、非線形楕円型方程式

$$-\Delta u = u^p, \quad u \geq 0 \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \quad p > 1.$$

Nehari の解

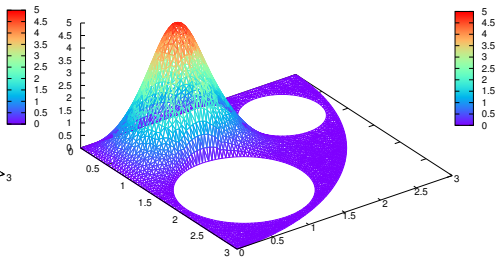
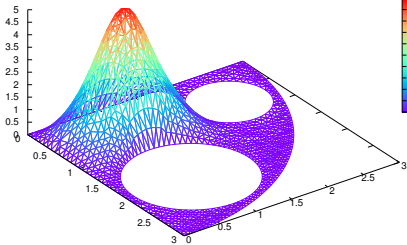
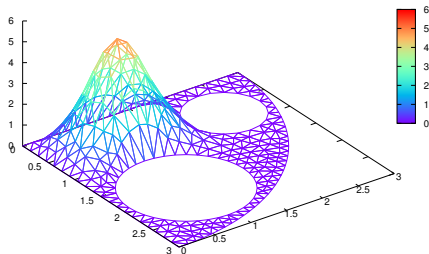
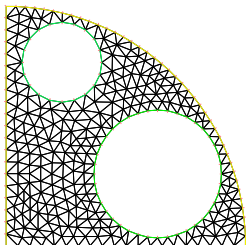
$$u \in V = H_0^1(\Omega), \quad J(u) = \inf_{v \in \mathcal{N}} J(v).$$

ただし,

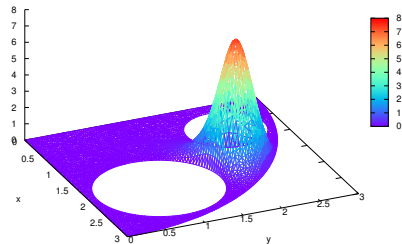
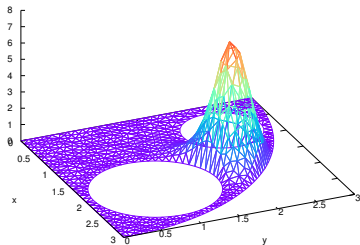
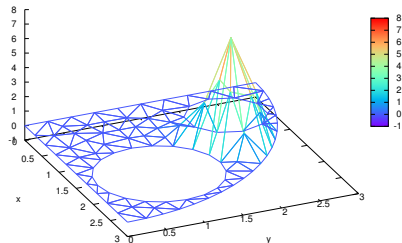
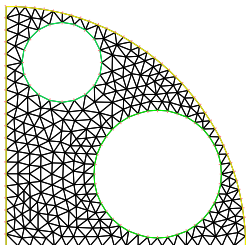
$$J(v) = \iint_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla v|^2 - \frac{1}{p+1} |v|^{p+1} \right) dx dy,$$

$$\mathcal{N} = \left\{ v \in V \mid \iint_{\Omega} |\nabla v|^2 dx dy = \iint_{\Omega} |v|^{p+1} dx dy > 0 \right\}$$

数值計算例： $p = 3$



数値計算例： $p = 3$ (スケーリング反復法)



cf. Chen, Zhou and Ni: *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* (2000).

- 数値解析入門 (齊藤宣一, 東大出版, 2011年出版予定)
 - 計算数理 I と計算数理演習の内容に基づく
- <http://www.infsup.jp/saito/> → 講義ノート
 - 線形・非線形拡散方程式の差分法と解の可視化
 - 有限要素法と非線形楕円型方程式の解の可視化

§4. 学生・院生時代を振り返る

卒業研究（4年生）

- 指導教授：藤田宏先生（4年，修士2年，博士2年）
- 4年生の時の卒業研究は印象深い
⇒ 一月末に発表会，卒業研究レポートとしてまとめる。

- ① 次の問題を差分法で解いて，解の初期形状の時間変化について調べよ。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (0 < x < 1, t > 0),$$
$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = a(x).$$

- ② 次の問題を差分法で解いて， $t \rightarrow \infty$ での解 $u(x, t)$ の漸近挙動を調べよ。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(u - 2) \quad (0 < x < 1, t > 0),$$
$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = a(x).$$

解の峰数

次の問題を差分法で解いて、解の初期形状の時間変化について調べよ。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (0 < x < 1, t > 0),$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = a(x).$$

- 単独の半線形熱方程式の解の峰数は単調減少。
 - M. Tabata: *A finite difference approximation to the number of peaks of solutions for semilinear parabolic problems*, 1980. (差分法 → 極限移行)
 - H. Matano: *Nonincrease of the lap-number of a solution for a one-dimensional semilinear parabolic equation*, 1982. (最大値原理)
- 最大値原理, 差分法の収束解析, 行列解析などを経験.

解の爆発

次の問題を差分法で解いて、 $t \rightarrow \infty$ での解 $u(x, t)$ の漸近挙動を調べよ。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(u - 2) \quad (0 < x < 1, t > 0),$$
$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = a(x).$$

- 解の爆発問題 $\lim_{t \rightarrow T} \|u(t, \cdot)\|_{L^\infty} = \infty$.
 - A. Friedman and B. McLeod: *Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations*, 1985.
 - Y.G. Chen: *Asymptotic behaviours of blowing-up solutions for finite difference analogue of $u_t = u_{xx} + u^{1+\alpha}$* , 1986.
- 解の爆発・定常解などを通じて、非線形解析の初歩を体験。
- 修士では、そのまま半線形熱方程式の解の爆発を勉強、特に、非線形境界条件を勉強。しかし、次第に興味の対象が、方程式よりも数値的な方法そのものにシフト \Rightarrow 修士論文、博士論文ともに数値解析（領域分割法）

最後にもう一度

- 数値解析 \neq コンピュータを使った数学
数値解析研究者 \neq コンピュータの達人 (おたく)
- 偏微分方程式の数値解析の立場から
無限次元を有限次元へ射影 (離散化)
無限桁を有限桁で近似 (コンピュータ)

最後にもう一度

- 数値解析 \neq コンピュータを使った数学
数値解析研究者 \neq コンピュータの達人 (おたく)
- 偏微分方程式の数値解析の立場から
無限次元を有限次元へ射影 (離散化)
無限桁を有限桁で近似 (コンピュータ)

これらの意味での数値解析の素養を持った数学科の卒業生・修了生が増えることを日々切望しています。

ご清聴ありがとうございました。

齊藤宣一

東京大学大学院数理科学研究科

<http://www.infsup.jp/saito/>