パターン認識と関係する組合せ数学

理学研究科 FD 研修会 (2017.1.18 釜江哲朗)

平面上の図形や絵の集まりが与えられたとき，有限個の標本点での観測により，いかにそれらを効率的に区別するかという問題を考える．一例として，半径 1 の円板の集まりを考える．これらを区別するため標本点を一つとると，円板の全体はその標本点を含むものと含まないものの 2 種類に分類される．もう一つ別の標本点を選ぶとき，2 つの標本点間の距離が 1 より小さい時は，円板の全体はそれぞれの標本点を含む含まないの情報により 4 種類に分類される．もし 2 つの標本点間の距離が 1 より大きい時は，それら 2 点を共に含むものは存在しないので 3 種類にしか分類されない．一般に k 個の標本点をいかにとれば分類される種類が最大となるか，またその最大値は何かという問題を考える．この答えは，k 個の標本点を半径が 1 より小さい円周上に配置すれば単位円板の全体はそれらの点を含む含まないの情報により $k^2 - k + 2$ 種類に分類され，これが分類数の最大値となる．

このような問題を様々な図形や絵の集まり Ω に対して考える．一つの標本点の観測から得られる情報の集合も含む含まないの 2 元ではなく，色彩情報を含む r 個の元からなる集合 A と考える．このとき，k 個の標本点の観測から得られる情報による分類の各々は A^k の元に対応し，分類の総体は A^k の部分集合となる．この部分集合の元の総数を最大にするような k 個の標本点，すなわち，パターン認識の立場から最も効率的な標本点をどのように選ぶかという問題を考察するのである．さらにこの最大値を $p_\Omega(k)$ と記すとき，この値そのもの，あるいは Ω のエントロピー $H(\Omega) = \lim_{k\to\infty} \log p_\Omega(k)/n$ を考察する．

この問題の双対問題として，図形や絵の集まり Ω が与えられたとき，Ω から選ばれた k 元によって平面が分割されるが，この分割数を最大にする k 元の選び方およびその最大値を考察する．この 2 つの問題の関連性も考察の対象となる．

Reference: Y-M.Xue & T.Kamae, Maximal pattern complexity, dual system and pattern recognition, Theoretical Computer Science 457 (2012), pp.166-173