

# これまでの研究成果

森本 真弘

私の研究では、弱鏡映部分多様体 (井川-酒井-田崎 2009) をはじめとする「対称性を持つ極小部分多様体」の概念を、ヒルベルト空間の固有フレドホルム部分多様体 (Terng 1989) (以下、PF 部分多様体) に対し定義・拡張し、ヒルベルト空間内に様々な対称性を持つ無限次元の極小 PF 部分多様体が存在することを示した。以下、 $G/K$  をコンパクト正規等質空間、 $\mathfrak{g}$  を  $G$  のリー代数、 $V_{\mathfrak{g}} := L^2([0, 1], \mathfrak{g})$  を閉区間  $[0, 1]$  から  $\mathfrak{g}$  への  $L^2$ -path 全体の成すヒルベルト空間とする。このとき平行移動写像 (Terng-Thorbergsson 1995) と呼ばれる無限次元リーマン沈め込み  $\Phi: V_{\mathfrak{g}} \rightarrow G/K$  が定義され、一般に  $G/K$  の部分多様体  $N$  の逆像  $\Phi^{-1}(N)$  は  $V_{\mathfrak{g}}$  の PF 部分多様体となる。以下、主な研究成果を述べる。

## ● ヒルベルト空間の弱鏡映 PF 部分多様体について (論文 [2])

本論文ではまず、弱鏡映部分多様体の概念を、ヒルベルト空間内の PF 部分多様体に対し定義・拡張した。次に、平行移動写像  $\Phi: V_{\mathfrak{g}} \rightarrow G/K$  の各ファイバーが、ヒルベルト空間  $V_{\mathfrak{g}}$  の弱鏡映 PF 部分多様体であることを示した。そして、コンパクト型対称空間  $G/K$  の任意の弱鏡映部分多様体  $N$  に対し、平行移動写像による逆像  $\Phi^{-1}(N)$  が  $V_{\mathfrak{g}}$  の弱鏡映 PF 部分多様体であることを示した。更に、本結果を  $G/K$  内の弱鏡映部分多様体の具体例に対し適応し、ヒルベルト空間  $V_{\mathfrak{g}}$  内の弱鏡映 PF 部分多様体の例を多数構成した。更に、最も一般的な設定の下で、PF 部分多様体  $\Phi^{-1}(N)$  の形作用素公式を与え、 $\Phi^{-1}(N)$  が全測地的となる必要十分条件を求めた。これを用いて、得られる弱鏡映 PF 部分多様体の例が全測地的でない (従って鏡映でない) ことを示した。これより、無限次元ヒルベルト空間内には (有限次元ユークリッド空間の場合と異なり) 全測地的でない等質極小部分多様体が多数存在することも明らかとなった。

## ● ヒルベルト空間の PF 部分多様体のオースティア性とアリッド性 (論文 [3])

本論文では、オースティア部分多様体 (Harvey-Lawson 1982) 及びアリッド部分多様体 (武富 2018) という弱鏡映部分多様体の一般化概念に対して論文 [2] と同様の問題を研究した。まず、PF 部分多様体  $\Phi^{-1}(N)$  の主曲率公式を与えた。これは過去に東京理科大学・小池直之教授により研究されたが、本論文では論文 [2] で得られた形作用素公式による簡潔な別証明を与えた。次に、オースティア性について研究し、 $G/K$  が球面であるとき、 $N$  のオースティア性と  $\Phi^{-1}(N)$  のオースティア性が同値であることを示した。本結果にイソトロピー表現のオースティア軌道分類結果 (井川-酒井-田崎 2009) を適応し、ヒルベルト空間内のオースティア PF 部分多様体の例を構成した。次にアリッド性について研究を行い、 $G/K$  がコンパクト型対称空間のとき、 $N$  が  $G/K$  のアリッド部分多様体ならば  $\Phi^{-1}(N)$  は  $V_{\mathfrak{g}}$  のアリッド PF 部分多様体であることを示した。本結果を  $G/K$  内のアリッド部分多様体の例に対し適応し、ヒルベルト空間内のアリッド PF 部分多様体の例を構成した。特に、球面内の「オースティアでないアリッド部分多様体の例 (武富 2018)」に対し、本結果および上述のオースティア性に関する結果を適応し、ヒルベルト空間内の「オースティアでないアリッド PF 部分多様体の例」を構成した。以上の研究により、無限次元ヒルベルト空間内に様々な対称性をもつ等質極小部分多様体が存在することが分かる。これより「無限次元ヒルベルト空間内の等質極小部分多様体の分類」という無限次元固有の問題が生じる。本問題を、「Kac-Moody 対称空間」という無限次元対称空間 (Terng 1989, Heintze 2007) と関連させ、本論文にて問題提起した。

## ● コンパクト・イソトロピー既約リーマン等質空間の弱鏡映部分多様体 (論文 [4])

本論文では、論文 [2], [3] の主結果を  $G/K$  が (対称空間とは限らない) コンパクト・イソトロピー既約リーマン等質空間の場合に拡張した。更に、得られる弱鏡映 PF 部分多様体  $\Phi^{-1}(N)$  を特徴づけし、 $N$  が  $G/K$  の弱鏡映部分多様体となる必要十分条件を与えた。本論文では、本来は連結なコンパクト・リー群  $G$  に対して定義される  $P(G, H)$  作用を、非連結なコンパクト・リー群に対し拡張している。本結果は、私がアウクスブルク大学に滞在中に行った E. Heintze 教授および酒井高司教授との議論に基づく。