これまでの研究成果のまとめ

高橋 良輔

はじめに

私の専門はケーラー幾何学およびその周辺である．特に**『与えられた偏極多様体 (X, L)，すなわちコンパクト複素多様体 X およびそれ上の豊富直線束 L の組がいつ標準計量を持つか？』**という問題に興味がある．ここで，L が豊富であるとは，一次チャーン類 $c_1(L)$ に属する Kähler 計量が存在するという意味であり，そのような Kähler 計量全体のなす空間 $\mathcal{H}$ の中から標準的な計量を選び取ることができるか？という問題を考える．また，標準計量とは主に定曲率条件を満たす計量のことを指しており，したがって，上問題はコンパクト Riemann 面の一意化定理の高次元への一般化とも思える．

標準計量の多くは多様体上の PDE として与えられ，調和写像のようにエネルギーを最小化するという性質（変分原理）を持つ．そのため，エネルギー汎関数の勾配流として定義される **(1) 幾何学的フロー（放物型 PDE）**は最も有効な標準計量の構成手段の 1 つである．一方で，**(2) PDE の離散化・差分化**を行うことで近似解を構成し，その収束性を調べるという研究方針もある．さらに，X は射影代数的であるから，**(3) PDE 解の存在と代数幾何学的安定性の同値性を問う**ことができる．このように，私の専門分野は幾何・解析・代数が互いに交叉する非常に豊かな数学である．次節ではこの 3 つの研究テーマについてその詳細を見てゆく（以下の研究業績の番号については，『論文リスト』を参照）．

(1) 幾何学的フロー（放物型 PDE）

X が Fano 多様体（$L = -K_X$，K_X は標準束）の場合，定曲率条件として最も自然なものは **Kähler-Einstein (KE) 条件** $\mathrm{Ric}(g) = g$ である．KE 計量に向かって計量を時間発展させる方程式として **Kähler-Ricci flow (KRF)** は非常に有名であり，現在に至るまでに十分な研究成果がある．そこで，KRF を一般の豊富直線束 L [研究業績 1]，X が非コンパクトな場合 [研究業績 14] に拡張する研究を行った．また，KRF の解析テクニックを平均曲率流に応用することで，4 次元超 Kähler 多様体内の正則曲線が平均曲率流に対して線形安定性を持つことを示した [研究業績 9]．極小部分多様体が一般に線形安定性を持つかは未解決であり，特殊な状況（例えば外側が正曲率をもつ KE 曲面 [HL05]，あるいは平坦なトーラス [Li12] など）の場合しか知られていなかった．さらに，[研究業績 12] では deformed Hermitian Yang-Mills 計量と呼ばれる，特殊ラグランジュ部分多様体のミラー対応物を構成するための新しい幾何学的フローとして，tangent Lagrangian phase flow を導入し，時間大域的挙動の解析を行った．

(2) PDE の離散化・差分化

X は L の十分大きい冪 kL の正則切断を用いて，射影空間 $\mathbb{P}^{N_k}$（$N_k := \dim H^0(X, kL)$）に埋め込むことができる（小平埋蔵定理）：

$$X \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, kL)^*) \simeq \mathbb{P}^{N_k}.$$

$\mathbb{P}^{N_k}$ 上の Fubini-Study 計量全体は有限次元の Riemann 対称空間 $\mathcal{H}_k \simeq GL(N_k; \mathbb{C})/U(N_k)$ である．このとき，$k \to \infty$ の極限操作によって，$c_1(L)$ に属する Kähler 計量全体のなす空間 $\mathcal{H}$ は，Fubini-Study 計量の X への引き戻し計量全体のなす空間 $\mathcal{H}_k$ によって C^∞-近似されることが知られている：

$$\mathcal{H} = \overline{\bigcup_{k \geq 1} \mathcal{H}_k}.$$

この現象を使って，PDE 解の差分化・離散化（離散パラメータは k）を構成したのが [研究業績 2, 4, 5, 11] である．この結果は，単に PDE の近似解を与えるというだけでなく，**射影埋め込みを通して (X, L) の代数幾何学的な性質を調べる際に重要な役割を果たす**．また別の視点として，**Ricci iteration**（Ricci 曲率作用素を含む $\mathcal{H}$ 上の力学系）を使った標準計量の構成を [研究業績 8] で行った．

(3) PDE 解の存在と代数幾何学的安定性

標準計量が存在するとき，計量の空間 $\mathcal{H}$ は "良い形" をしており，幾何学的フローは良い振る舞いをする．一方で，代数幾何学の考察対象は，特異点を持った多様体（あるいは，もっと一般にスキーム）である．これは微分幾何学的には $\mathcal{H}$ の境界 $\partial\mathcal{H}$ 付近での振る舞いを見ていることに相当するので，両者の間には何らかの関係があることが期待される．実際，[研究業績 2, 6] では標準計量の存在から導かれる代数幾何学的な安定性を定式化し，その計算手法を開発した．

一方で，(X, L) が標準計量を許容しないとき，安定性を壊すような**最適退化 (optimal destabilizer)** を構成するという問題があり，そのためには幾何学的フローに沿った多様体の特異点形成のメカニズムを調べるという方法が非常に有効である．例えば，$L = -K_X$ のとき，KRF に沿った Gromov-Hausdorff (GH) 極限は **$\mathbb{Q}$-Fano 多様体**と呼ばれるマイルドな特異点を持つ代数多様体 X_∞ になり，X_∞ は特異点付きの **Kähler-Ricci soliton (KRS)**（KRF の自己相似解）を持つことが知られている [CW14].

[研究業績 10] では，KRF が生み出す退化 X_∞ に非アルキメデス幾何学的手法を用いて，X_∞ の Donaldson-Futaki 不変量に対する一様な下界評価を構成した．特に $X_\infty \simeq X$ の場合，Kollár-宮岡-森 [KMM92] と組み合わせることで，Phong-Song-Strum による Kähler-Ricci soliton の二木不変量の有限性予想 [PSS15] を肯定的に解決した．

最適退化の意味は問題の定式化と幾何学的フローに依存している．しかし，上述のように KRF に沿った特異点形成は非常にマイルドなので，**Donaldson-Futaki 不変量を最適化できないという問題がある**．そこで，[研究業績 7] では新しい最適化問題を考案，新しい放物型フロー

$$\frac{\partial\omega(t)}{\partial t} = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}(1 - e^{\rho(\omega(t))}) \tag{0.1}$$

を導入し，これを **inverse Monge-Ampère flow (MA^{-1}-flow)** と名付けた．ここで $\rho(\omega)$ は関係式

$$\mathrm{Ric}(\omega) - \omega = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\rho(\omega), \quad \int_X e^{\rho(\omega)}\omega^n = c_1(X)^n$$

を満たす X 上の関数である．(0.2) の右辺は $e^{\rho(\omega(t))}(-\mathrm{Ric}(\omega(t)) + \omega(t) - |\nabla\rho(\omega(t))|^2)$ と計算できるので，$\rho(\omega(t))$ が C^1 の意味で零に近ければ MA^{-1}-flow は KRF と同じように振る舞い，そうでないとき両者の極限挙動は激しく異なる．実際，我々は任意の Fano 多様体 X 上で MA^{-1}-flow が任意の初期値に対して時間大域解を持つことを証明した．そして，X が toric Fano のとき，MA^{-1}-flow に沿った多様体の極限は最大で 2 つの既約成分を持つスキームに分解し，Ricci-Calabi 汎関数

$$R(\omega) := \int_X (1 - e^{\rho(\omega)})^2\omega^n, \quad \omega \in c_1(X)$$

の下限を達成するという意味で最適であることを示した．一方で，toric Fano 多様体上では常に KRS が存在するため，KRF が生成する退化は滑らかであり，R の下限を達成することは決してあり得ない．このように，MA^{-1}-flow の生成する退化は Fano 多様体の安定性からのズレをより精密に検知しており，KRF との明確な差別化を与えている．

そして [研究業績 13] では，多様体 X が複素 2 次元のとき，弱い安定性（あるコホモロジー類の半正値性）のもとで，Jacob-Yau [JY17] によって導入された線束平均曲率流（ラグランジュ平均曲率流のミラー版）の時間大域的挙動を考察した．結論として，有限個の負の自己交叉数を持つ正則曲線 C_i $(i = 1, \ldots, N)$ が存在し，flow は $\bigcup_{i=1}^N C_i$ で崩壊，$X \setminus \bigcup_{i=1}^N C_i$ 上で滑らかに収束することを示した．これは線束平均曲率流に沿った特異点形成が代数的に行われることを意味しており，オリジナルのラグランジュ平均曲率流では見られない結果である．また，このとき $\bigcup_{i=1}^N C_i$ は何らかの意味で X を代数的に不安定化していると考えられる．

References

[CW14] X. Chen and B. Wang: *Space of Ricci flows (II)*. `arXiv:1405.6797`.

[HL05] X. L. Han and J. Li: *The mean curvature flow approach to the symplectic isotopy problem.* Int. Math. Res. Not. IMRN **2005** (2005), no. 26, 1611–1620.

[Li12] H. Li: *Convergence of Lagrangian mean curvature flow in Kähler-Einstein manifolds*. Math. Zeit. **271** (2012), no. 1, 313–342.

[JY17] A. Jacob and S. T. Yau: *A special Lagrangian type equation for holomorphic line bundles.* Math. Ann., **369** (2017), 869–898.

[KMM92] J. Kollár, Y. Miyaoka and S. Mori: *Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds.* J. Diff. Geom. **3** (1992), 765–779.

[PSS15] D. H. Phong, J. Song and J. Strum: *Degeneration of Kähler-Ricci solitons on Fano manifolds.* Univ. Iagel. Acta Math. **52** (2015), 29–43.