第 1 章　結び目の数学

この章では，　結び目はサイエンスの多くの分野の中に見出されること，結び目の専門数学とはどのような学問かについての説明および結び目学習をすすめる理由について述べる．

1. 1 森羅万象の基本に結び目がある

結び目とは空間内に置かれた 1 本のひもの状態のことである．

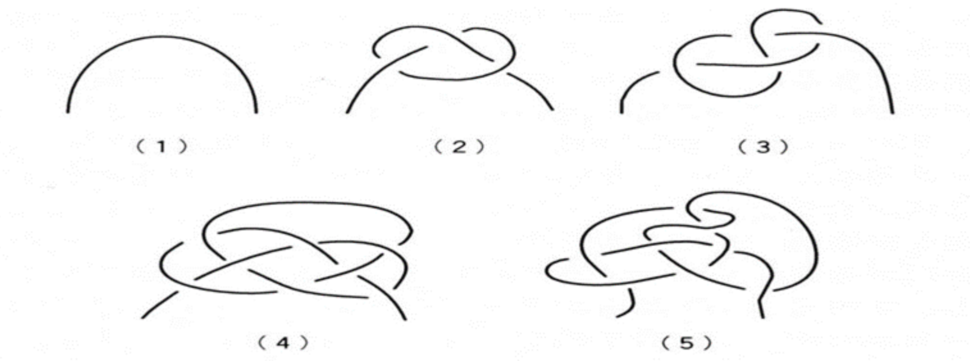


図 1.1

普通は，ひもが図 1.1 の(2)-(5)のようになったものをさしており，(1)は結ばれていないひもの図である．　(2)はひとえ結び，　(3)は 8 の字結び，(4)は水引に用いられている結び（あわび結び）と呼ばれている．　2．1 で詳しく報告されることであるが，明治時代最初の小学校教師用手工教科書（甲・乙）**[5]** における結び目はすべてこの意味の結び目である．　一方，数学やサイエンスでは，　ひもの両端を素直につないだ下図のような輪を結び目と呼んでいる．

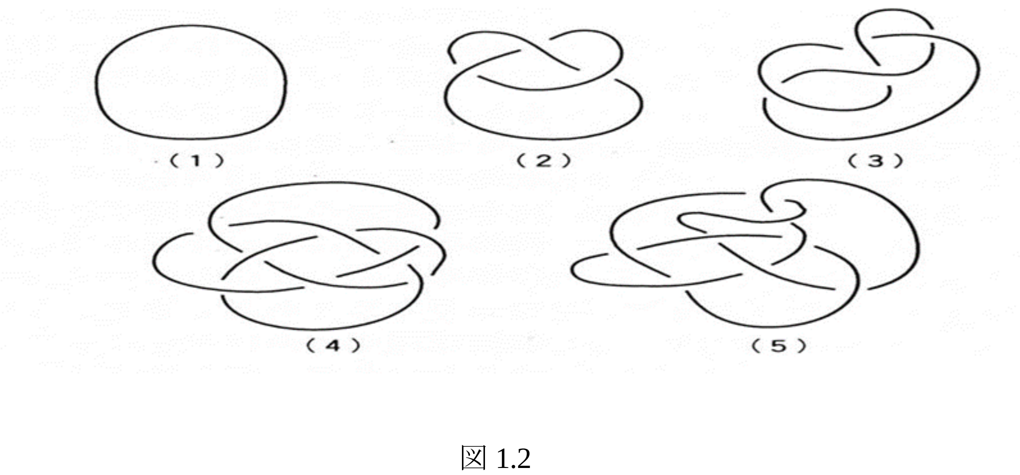


図 1.2

特に (1)自明な結び目，　(2) 三葉結び目，　(3)　8 の字結び目，　(4) あわび結び目と呼ばれている．輪になっていない結び目を**開いた結び目**，輪になっている結び目を**閉じた結び目**と呼ぶことにする．

どのような意味で，開いた結び目は閉じた結び目とみなされているのだろうか？

この疑問に答えておこう．よく観察すれば，開いた結び目というときには，図 1.1 のように端点が結び目を飛び出したところに置かれている，という仮定を置いていることに気づくはずである．なお，図 1.3 のように端点が置かれたひもについて，どのような意味で結び目とみなすべきかということについては，現在の数学やサイエンスにおける重要な研究対象になっている．

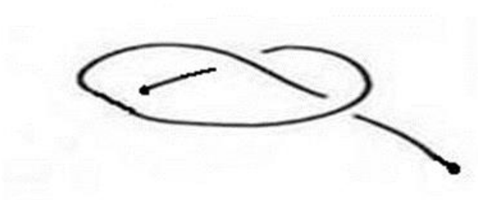


図 1.3：このひもは結び目と言えるか？

図 1.2 のように端点が結び目を飛び出したところにある場合には，その端点のみ図 1-4 のように球面上にのせて置き，球面上でそれらの端点を交叉しない曲線で結ぶ．それにより，閉じた結び目が構成される．重要な点は，その閉じた結び目は端点を結ぶのに用いた曲線の選択に依存せず，同じ閉じた結び目が構成される点である．(閉じた結び目が同じ結び目である定義は後述する．）ここで利用した球面を小さく縮めていくと，閉じた結び目とみなせる（図 1-5 参照).

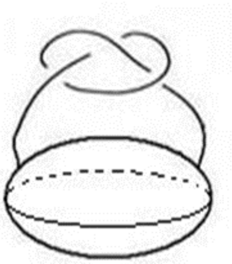
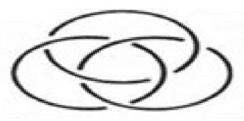


図 1-4

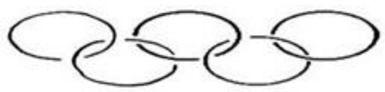
図 1-5

いくつかの閉じたひもの結び目の集まりのことを絡み目という（図 1-6 参照)

ホップの絡み目



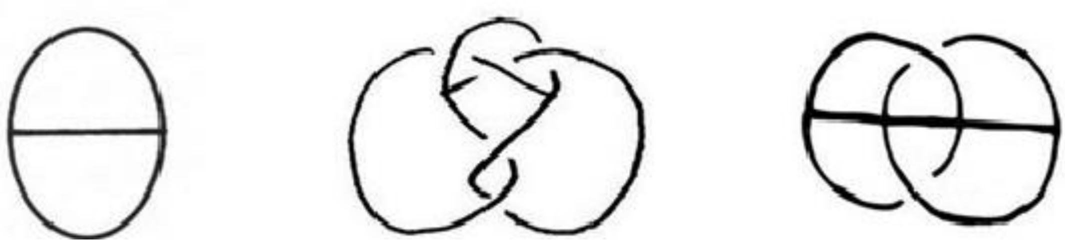
ボロミアン環



オリンピックマーク

図 1-6: 絡み目

結び目や絡み目にさらなる辺が付け加わったものを空間グラフという（図 1-7 参照).



自明な θ 曲線　　　　　　　　樹下の θ 曲線

図 1-7: 空間グラフ

2 つの与えられた結び目，絡み目，あるいは空間グラフが同じ（同型）であることの定義は，トポロジー（位相幾何学）における概念であるが，つぎのように述べることができる．すなわち，それらを伸び縮みや変形可能なひもとみなして，あやとりの要領で同じ形に変形できる．言い換えると，それらを伸び縮みや変形可能なひもとみなして，図 1-8 にあるような有限回のライデマイスター移動により移りあう．

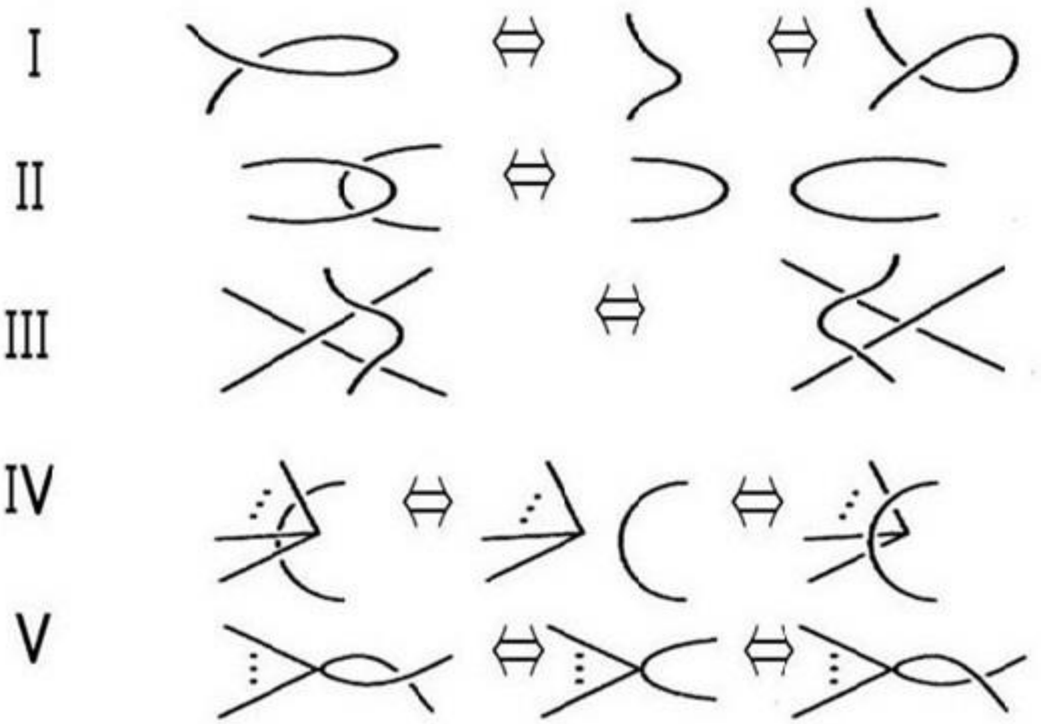


図 1-8：ライデマイスター移動

ライデマイスター移動 IV，　V は空間グラフの場合にのみ必要な移動である．

サイエンスにおけるひもの考え方としては，「ひもとみなせるものがひも」というのが，現実的で妥当な定義といえる．というのも，現実世界では太さのある線しか描くことができないからである．例えば，鉄でできた鎖の連なりであるチェーンを一本のひもとみなすか，それともたくさんの輪の絡み目とみなすかは，それぞれの目的に応じて採用すべきという考え方である．

数学では，　サイエンスにおけるひもを理想化した，太さのないひも（線）のことである．数学やサイエンスにおける結び目の研究対象は, 3 次元空間 (3 次元としてみた宇宙)内の“ひも” であり，また時間を考慮した 4 次元空間（時空）内の“ひも”の軌跡である“曲面”である.

1. 2 結び目の専門数学とはどのような学問か

数学研究としての結び目の研究目的はつぎのようなものである.

(1) どのような結び目・絡み目・空間グラフがあるかを研究し，　それらを重複なしにリストアップすること

(2) 2 つの与えられた結び目・絡み目・空間グラフが，同じ（同型）かどうかを判定すること

これらの研究目的は，未解決の問題である．実際に，どのように研究がなされているかを説明するのは, 研究トピックスが多岐にわたることもあり, 難しいので， 代わりに, 最近の拙著**[2]** の目次の主要部分を掲示して，それらについて簡単に説明することにする.

7．1　無限巡回被覆空間と巡回分岐被覆空間の構成
7．2　2 重分岐被覆空間
7．3　ゲーリッツ不変量と結び目図式の彩色数
8 章 結び目の 4 次元的視点
8．1　曲面結び目の描写
8．2　リボン曲面結び目とそのコードグラフ
8．3　コード図式の変形
9 章 結び目の分類
9．1　ブレイド表示から整数格子点表示へ
9．2　整数格子点表示の性質
9．3　整数格子点による結び目の分類法
9．4　9 章のさらなる探求

1 章では，図 1.2 や図 1-6 のような，　結び目，　絡み目の表し方の研究である．同じものでもライデマイスター移動により，無限に多くのいろいろな形に変形できるのだから，図的訓練に適した科目であ．その訓練により，同じものかどうかの識別能力をかなり向上させることができるだろう．2 章では，結び目理論を学んだという人が，一応知っておくべき結び目・絡み目の標準的な例を述べてある．2 つの結び目や絡み目が実際に同じでないことを判定するには，計算可能な不変量を持ってくる必要があるが，3 章から 7 章までは，そのような不変量の内で，比較的初等的に導入できる代表的な不変量を解説したものである．結び目や絡み目はこの我々の空間が 3 次元空間であるから生じる現象であり，時間変化を考慮するならば，4 次元空間内の曲面結び目が生じることになる．8 章ではそのような曲面結び目の初歩理論を解説している．9 章では，結び目の分類法の 1 つを解説している．

結び目の専門数学の研究とは，このような研究をさらに発展させたり，結び目に関する新しい理論を導入したりする学問であり，初等的なものから非常に高度な研究まで，数多くの研究テーマを見いだすことができる．

1.3 結び目学習のすすめ

2.1 で詳しく報告されることであるが，明治時代に初めて登場した教科書**[5]**には，比較的多い分量で，結び目が教授されることになっており，日本で最初の全国規模の結び目教育といえる．この教科書は，図画・算術・国語・理科・地理・幾何学との関わりを視野に編纂されており，結び目に限って言えば,「結び目の条理を見分けること」ことを目的に，結び目（結紐）学習の利点としては,

・理解・工夫の力の養成
・手指の熟練
・美の観念の養成
・日用の便利の利益

を挙げている．この教科書で扱われた結び目は，津田論文**[6]**からわかるように，これは「結びの文化」による日本独自の教材であったことが明らかになっている．3 次元で起こる現象は，平面で起こる現象に比べて，極めて複雑であるが，結び目は，3 次元で起こる現象の本質を逃さずに，

最も単純化して述べた現象である.

明治時代は文明開化の時代で,欧米の先進科学技術を積極的に取り入れた時代といわれている.日本独自のこの結び目教育による 3 次元で起こる現象の訓練・探究が,「結びの文化」として定着し，日本全国の尋常小学校 3・4 年で実践されていたことを考えると，明治時代以後急速に，当時の世界最高ﾚﾍﾞﾙの科学を我が国へ移植する能力を持つことができた，1 つの理由となりうると考える（後掲の結び目学習の利点を参照）．この結び目教育は，約 10 年間で表面上姿を消すが，少なくとも，明治時代以後の日本における創意・工夫の基礎土台として寄与していることは確かだろう．

地震動による観測地点の時間パラメータによる軌跡は，地震空間曲線という 3 次元空間内の曲線を描く（例えば，河内・岸本・清水共著**[4]**を参照）．地震計はこれを観測する機械であり，どのように複雑に揺れたかという問題は結び目理論の問題といえる. 関谷清景（せきや　きよかげ）は，1887 年（明治 20 年）に，地震空間曲線の模型を作製しており，新國 亮（東京女子大准教授）の指摘により，現在，国立科学博物館に展示されていることがわかった．地震空間曲線の模型もまた，明治時代が結び目の不思議さなどの「結びの文化」に深く関心を持っていた時代であることを示している．

結び目理論を応用したパズルゲーム「Region Select」 (領域選択ゲーム）は，アンドロイドのスマートフォンで遊べるゲームである．大阪市立大学数学研究所での発明（特許第 5854495，第 580441.2 ）である．このゲームに，数学がどのように使われているかの解説は，河内・岸本・清水共著**[4]**でなされている．このゲームの特性は,

・数字を知らなくてもできる（幼児でもできる）数学のゲーム
・高齢者向け図形教育（高齢者の視空間認識機能のリハビリテーション）に利用できるゲーム
・グローバルな視点の訓練のゲーム
・数手先を読む訓練のゲーム
・3 次元空間内の位置の変化と関連するゲーム
・結び目図式を自明結び目図式へ変形する結び目理論のためのゲーム

といえる．この図形ゲームの幼児版も iPad で製作しており，数字を知らない幼児の数学力の向上を目指して，使用可能である．野崎祐子氏からご教示されたことであるが，就学前教育が経済格差解消に役立つという James J.　Heckman らの調査研究**[1]**があり，数字を知らない幼児の数学力の向上は重要といえよう．また，認知機能のﾘﾊﾋﾞﾘや高齢者の介護予防を目的として，高齢者版の iPad も製作されている．

上記以外にも，典型的な専門数学の結び目理論以外の結び目の関連話題は，数多くある．筆者の関心のある話題は以下のようなものである．

ＤＮＡやタンパク質のもつれ(薬の効き目，血液型，狂牛病，アルツハイマー，…)，がんの仕組み，物質・材料の性質，素粒子，宇宙の構造，経済動向，心理学におけるこころ，人間関係 ，地震動，線路の曲がり，ゲーム　等々…

以上述べたことなどから，結び目学習の利点としては，次のようなものが考えられる．

(1) 図形で考える（結び目の研究では，結び目を式そのもので表さない）数学なので，右脳思考的傾向の強い数学であり，言葉で表せない複雑な形の物体や図形の理解，空間的視覚機能，空間感覚・空間認知，視覚的記憶の向上などに役立つと考えられる（**[3]**参照）.

(2) 図形をみる力がつく.

(3)数学の具体的なイメージを持つ力を養うのに適している.

(4) 3 次元空間の中に生きていることに気づくとともに，この 3 次元空間内でなし得ることの限界に気づく.

(5) 観察することの重要性に気づく.

(6) 空間把握力がつく.

(7) 結び目は実用上必要なものであり，社会生活を送る上で役立つ.

(8) 結び目は専門数学のいろいろな高度な分野の具体例として役立つことがよくある.

(9) 数学以外での結び目との関連話題が多くあり，その理解に役立つ.

(10) 例えば DNA や分子など，科学は多くがひもの曲がりと関連するので，その理解に役立つとともに，結び目現象が科学の説明に利用できることがある.

(11) 文字や数学記号をそれほど必要とせずに，図形により奥深い数学が説明可能なことがある.

(12) 違った地点から同じもの眺める訓練ができる.

(13) 論理的思考の応用力（観点を変える訓練）が身につく.

(14) (言葉で定義される)既成概念にとらわれずに，新しい発見がし易くなる.

(15) 文字や数学記号をまだ知らない幼児でも訓練が可能な数学になりえる.

こうして，結び目は，幼稚園，小学校，中学校，大学（一般教養，理工専門），社会教育，それぞれの段階で，学習するのに適した教材である.

参考文献

[1] James J. Heckman and Yona Rubinstein, The Importance of Noncognitive Skills: Lessons from the GED Testing Program, American Economic Review, 91(2) (2001), 145-149.

[2] 河内明夫, 結び目の理論, 共立出版 (2015).

[3] 河内明夫, 結び目の数学教育について, 数学教育研究, 42 (201.3), 141-146.

[4] 河内明夫・岸本健吾・清水理佳(共著), 結び目理論とゲーム, 朝倉書店 (201.3).

[5] 文部省編纂, 小学校教師用手工教科書（甲・乙），1904 年(明治 37 年).

[6] 津田昇，消えた教材『紐結』の考察，美術教育学 :美術科教育学会誌(9)(19871.220)，323-333.

河内明夫　大阪市立大学数学研究所・特任教授