第 II 章 絡み目の絡み数の絶対値を負の数の概念なしに定義すること

向きが付けられた２つの結び目成分からなる絡み目の絡み数は，位相不変量の最も基本的な量である． しかしながら，絡み数は整数に値をとる位相不変量であるので，負の数の概念を知らなければ，定義できない量である． この章では， 絡み目の絡み数の絶対値(ここでは**絡み度**という)を，負の数の概念を使わずに，絡み目図式から直接定義し，計算する方法を示す．

１．絡み目の絡み数

まず絡み目の絡み数がどのように定義されるかについて述べよう．図2−1のように矢印方向に進むような向きが付けられた２つの結び目成分からなる絡み目 L の図式を考えよう．

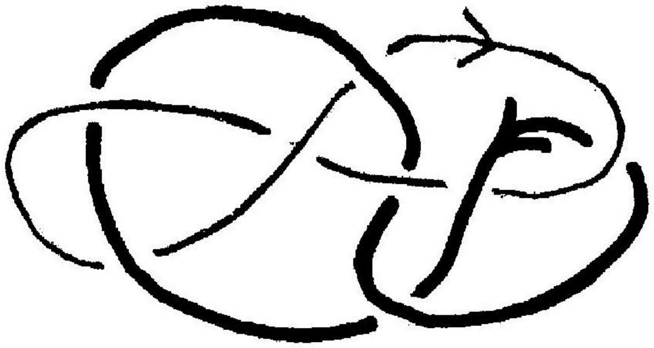

図 2−1： 絡み目図式

各交差点は，図 2−2 に示されたどれかの交差点と同じものになる．図 2−2 の左側２つの交叉点を＋１，右側２つの交叉点を−１として，異なる結び目成分の間の交叉点の符号数の総和を m で表す．

図 2−2： 交差点の符号

この整数値 m はいつも偶数で，ライデマイスター移動 I, II, III （図 2−3, 2−4, 2−5 参照）で変わらないこと（言い換えると，位相不変量になること）がわかる．そこで，絡み目 L の**絡み数** v とは，整数 m/2 であると定義するのである． 結び目成分の一方の矢印を逆向きにつけると，異なる結び目成分の間の交差点の符号は入れ替わるので， v は −v に変わる．例えば， 図 2−1 の絡み目 L の絡み数は，＋1 の交差点が 2 個，−1 の交差点が 4 個なので

$$v = (2-4)/2 = -1$$

となる．

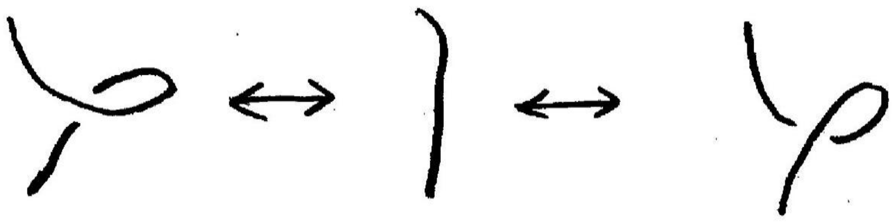

図２—３： ライデマイスター移動 I

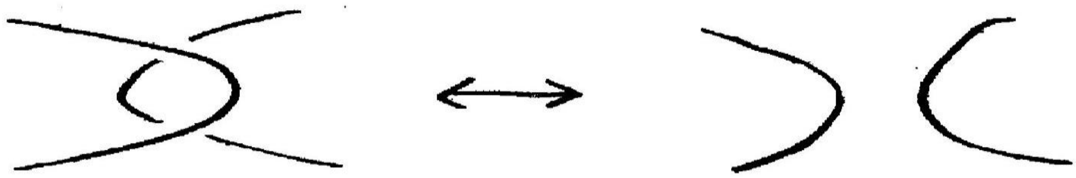

図２—４： ライデマイスター移動 II

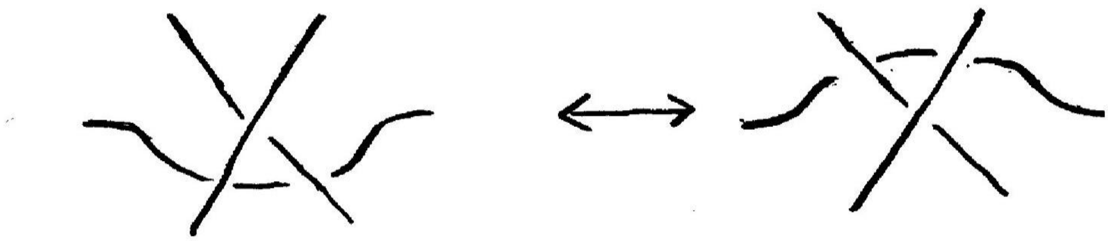

図２—５： ライデマイスター移動 III

2. 絡み目の絡み度

図２−６のように向きが付けられていない２つの結び目成分 ＪとＫからなる絡み目 Ｌの図式を考えよう．ＪとＫ を区別するため，Ｋ は太線で表すことにする．

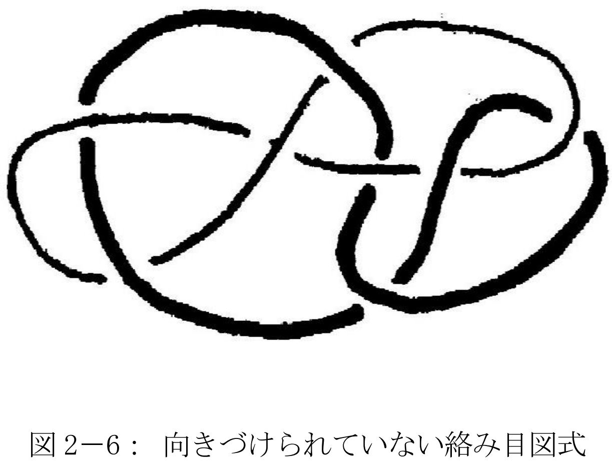

図２−６： 向きづけられていない絡み目図式

図２−７のように，Ｊに矢印方向に進むような向きを付けた L の絡み目図式を考える.

図２−７： Ｊに向きを付けた絡み目図式

向きづけられた Ｊと向きづけられていないＫ との間の交差点は図２−８のいずれかとなる.

図２−８： 交差点の状態

図２−９のように，ＪとＫの間のすべての交差点において， Ｋを１回囲むような向きのついた輪(Ｋの**メリディアンループ**という)をＪから構成する.

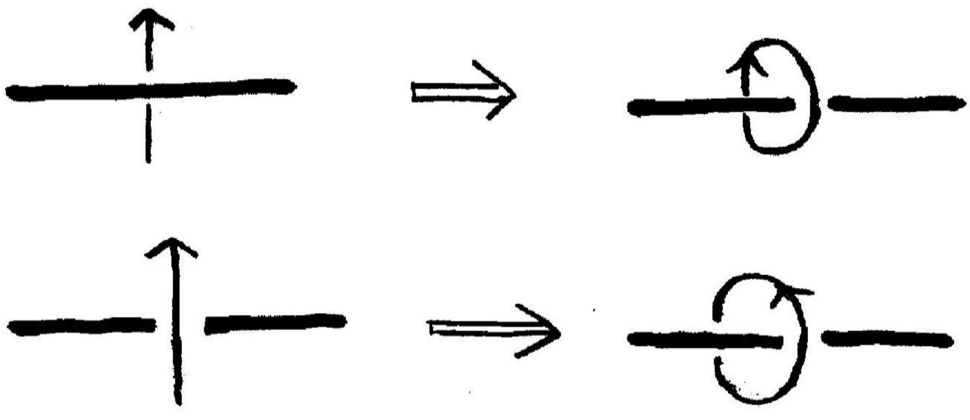

図２−９: Ｋのメリディアンループの構成

例えば，図２−７から図２−10 の左図が得られ， Ｋに沿ってそれらのメリディアンループを一か所に集めると図２−10 の右図のようになる.

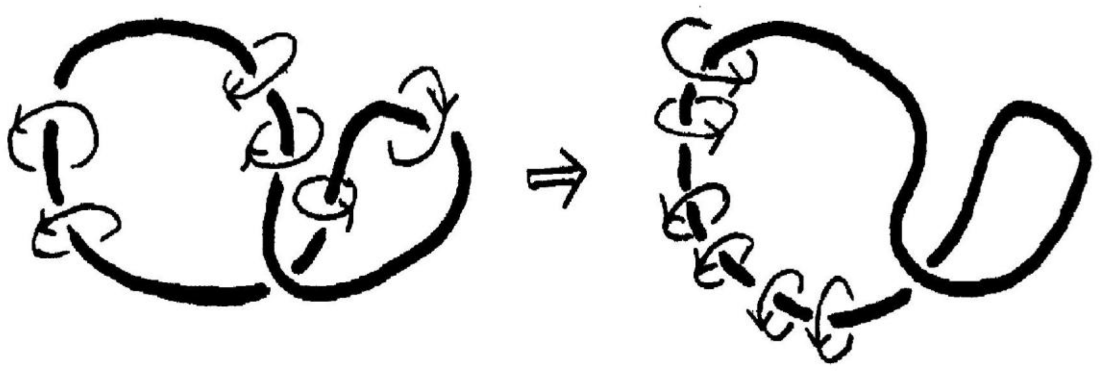

図２−10

向きづけられた J から得られる K のメリディアンループのうち，同じ向きをもつようなメリディアンループの集まりを P，Q で表し、それらの元であるループの個数をそれぞれ p，q とする．ただし，p≦q となるようにしておく．向きづけられていない２つの結び目成分 J と K からなる絡み目 L の図式の**絡み度** d を差 n=q−p の半分と定義する：

$$d = n/2 = (q-p)/2$$

例えば，図２−６の絡み目 L の図式の絡み度 d は，図２−10 から

$$d = (4-2)/2 = 1$$

と計算される．

すぐにわかることだが， J に逆向き(反対の矢印)をつけると，すべてのメリディアンループの向きが逆向きとなるので， 同じ向きのメリディアンループの数の組の差 n は変わらず， その結果絡み度 d は J の向きに依らないことがわかる． J の代わりに K に向きを付けて J の周りの同じ向きのメリディアンループの数の組の差を取っても n と同じ値になることを示そう． 実際，J と K に向きを付けて考えると， 図2−11 が示すように， メリディアンループが同じ向きになるかどうかということは局所的に決定され， その結果 J における同じ向きのメリディアンループの数の組は K における同じ向きのメリディアンループの数の組と一致するからである．こうして， 絡み目 L の図式の絡み度 d は， L の結び目成分 J，K の選択にも依らず，また J，K の向きにも依らず，絡み目 L の図式のみで決まる，(形式的には２を分母とする)負でない有理数であることがわかる．

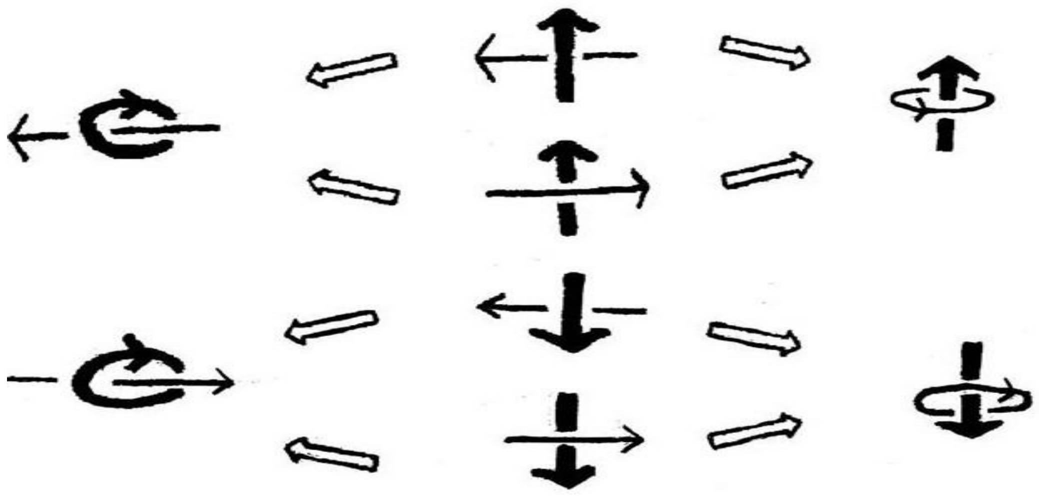

図２−11：メリディアンループの向きは局所的に決定される

つぎの２点（1）（2）を示そう．

（１）絡み度 d はライデマイスター移動Ｉ，II，III で変わらない位相不変量である．

（２）絡み度 d は，自然数または０に値をとり，Ｊ が Ｋ より上方にある交差点から生じる同じ向きのメリディアンループの個数の差として，またＪ が Ｋ より下方にある交差点から生じる同じ向きのメリディアンループの個数の差として，計算される．

特に（1）より，ｄは絡み目の図式の選び方に依らず，それを**絡み目 Ｌの絡み度**と呼んでもよいことになる．

まず，（１）を示そう． 証明は，向きのついた Ｊ から生じる同じ向きの Ｋ のメリディアンループの数の組を考えることによりなされる． Ｊ と Ｋの両方の部分が含まれるライデマイスター移動以外は，定義により， ｎ，ｄともに不変である．特に，ライデマイスター移動Ｉでは不変である．

Ｊ と Ｋの両方が含まれる部分のライデマイスター移動II においては，図２−12 からわかるように，ｎ，ｄともに不変になることがわかる．

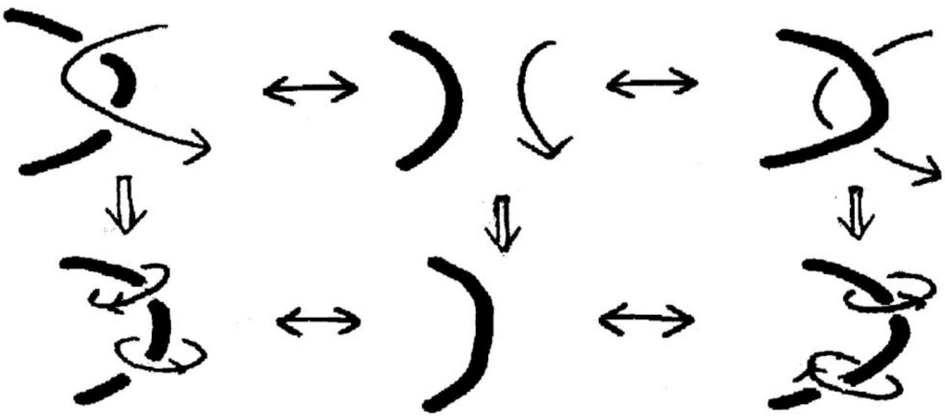

図２−12：Ｊ と Ｋの両方の部分が含まれるライデマイスター移動II

Ｊ と Ｋの両方が含まれるライデマイスター移動IIIについては，必要ならばＪ と Ｋの役割を交換して考えれば，図２−13 の場合を考えれば十分であり，図２−14 から ｎ，ｄとも変わらないことがわかり，（1）が示される．

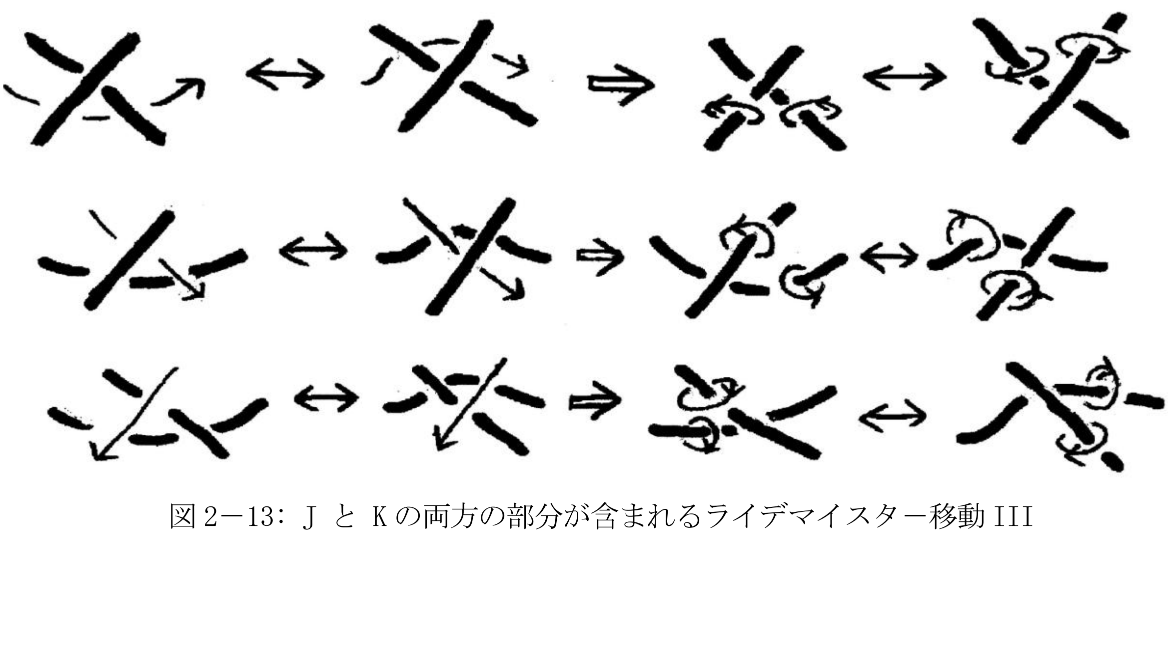

図２−13：Ｊ と Ｋの両方の部分が含まれるライデマイスター移動III

次に,(2) を示そう．絡み数，絡み度の定義と図 2-11 から，d は絡み数 v の絶対値であることがわかる．そのことから d は自然数または 0 の値をとることがわかるが，ここではその直接的な証明を与えよう．向きのついた J から生じる同じ向きをもつ K のメリディアンループの集まり P，Q について，P のうちで J の上方交差点，下方交差点から得られる部分集合をそれぞれ E，F で表し，それらの個数をそれぞれ e，f で表す． また，Q のうちで J の上方交差点，下方交差点から得られる部分集合をそれぞれ G，H で表し，それらの個数をそれぞれ g，h で表す． このとき，P，Q の個数 p，q （ただし p≦q とする）について，p=e＋f，q=g＋h となる．いま，J のすべての下方交差点を J の上方交差点になるように，交差交換(図 2－14 参照)を行うことにする．このとき，図 2－9 より，向きづけられた J から得られる K のメリディアンループのうち，同じ向きをもつメリディアンループの個数はそれぞれ p=e＋f，q=g＋h から e＋h，g＋f へと変わる．またこのとき，J の図式が K の図式よりも上にあるようになるので，ライデマイスター移動 I，II，III により，J の図式と K の図式は交差しないように移動できる．従って，絡み度の位相不変性より，

$$(e+h) - (g+f) = 0,\ \text{すなわち}\ g-e = h-f$$

が成り立つ．こうして，

$$d = n/2 = (q-p)/2 = g-e = h-f$$

が成り立ち，(2) が示される．

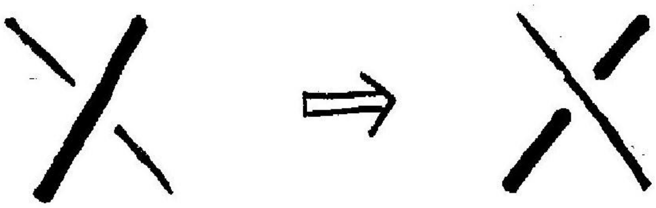

図 2－14：交差交換

3. 標準的な絡み目の上方交差点のメリディアンループによる絡み度の計算例

例 0. 図 2－6 の絡み目の絡み度 d を求めるために，J に図 2-7 のように向きを入れるとき，J についての上方交差点からメリディアンループは図 2-15 のように構成される． 従って，d = 2-1 = 1 となる．

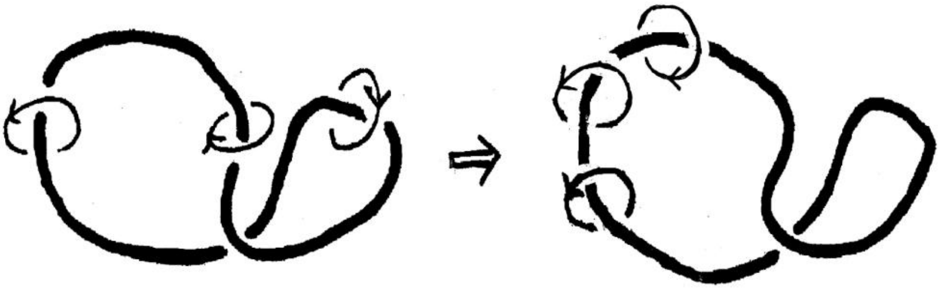

図 2－15：図 2-7 から得られる上方交差点のメリディアンループ

例 1．図 2－16 のように，ホップの絡み目の絡み度 d は　d = 1 と計算される．

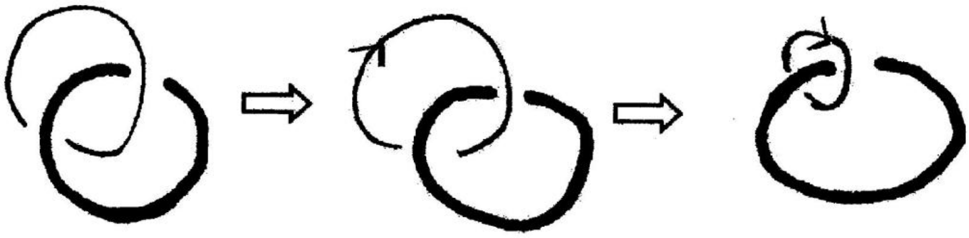

図 2－16：ホップの絡み目の絡み度の計算操作

例 2. 図 2－17 のように，ホワイトヘッド絡み目の絡み度 d は　d = 1-1 = 0 と計算される．

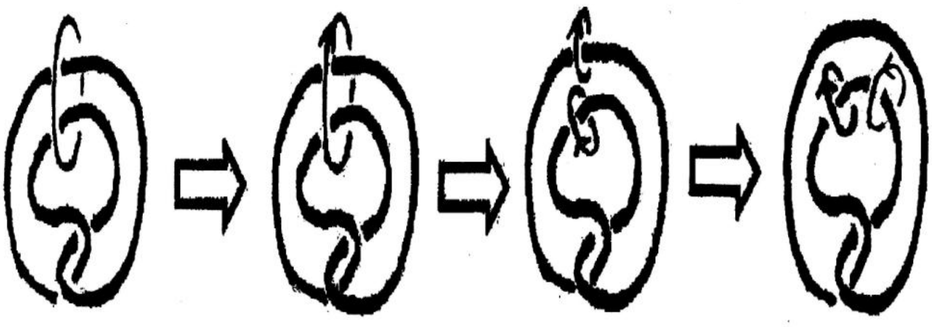

図 2－17：ホワイトヘッド絡み目の絡み度の計算操作

例 3. 図 2－18 の 2-ブレイド絡み目の絡み度 d は，図の計算操作から d = 2 と計算される．

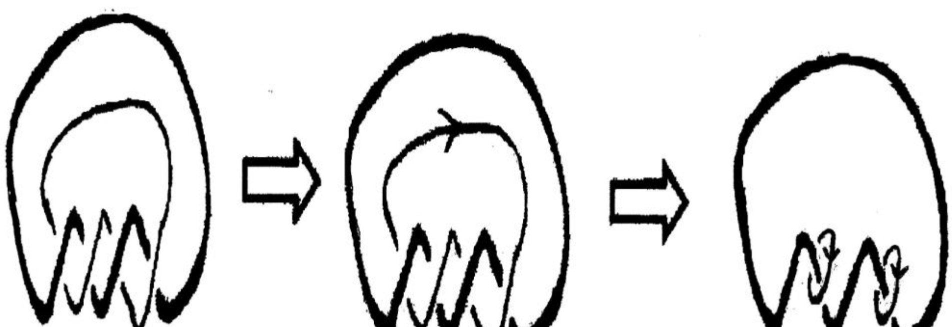

図 2－18：2-ブレイド絡み目の絡み度の計算操作

例 4. 図 2－19 のように，三葉結び目の平行絡み目の絡み度 d は， d = 3 と計算される.

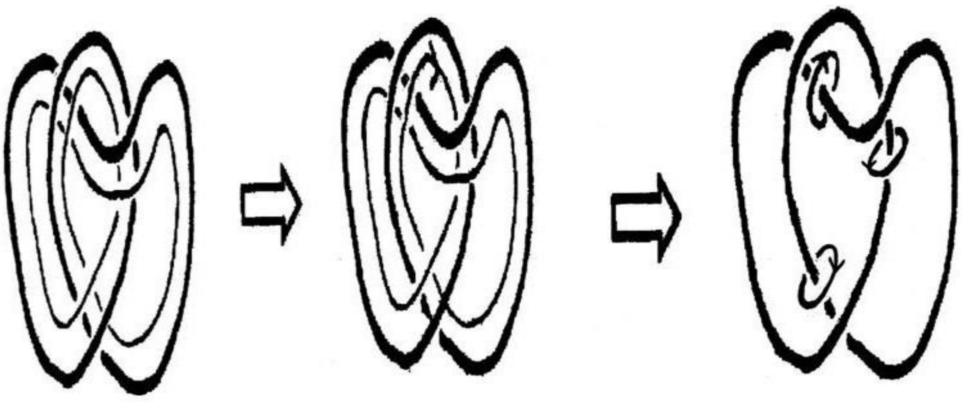

図 2－19: 三葉結び目の平行絡み目の絡み度の計算操作

注. 図 2－20 のような三葉結び目のひねり平行絡み目の絡み度 d は，d = 3-3 = 0 となる.

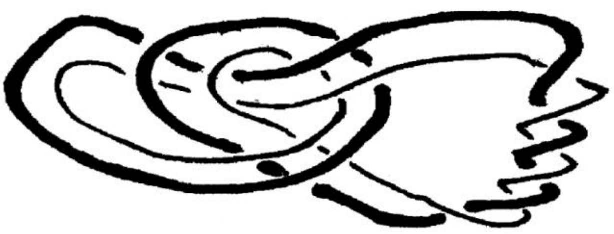

図 2－20: 三葉結び目のひねり平行絡み目

例 5. 図 2－21 のように，８の字結び目の平行絡み目の絡み度 d は， d = 2-2 = 0 と計算される.

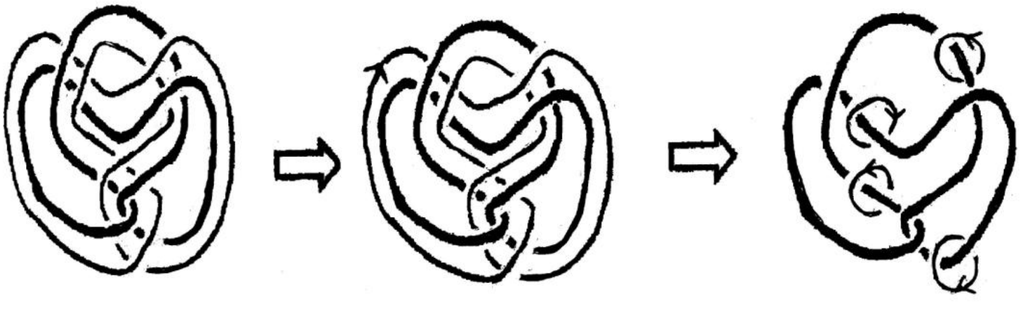

図 2－21: ８の字結び目の平行絡み目の絡み度の計算操作

第Ⅱ章 河内明夫 所属 大阪市立大学大学院理学研究科教授