# 結び目の数学教育について

河内（かわうち）　明夫（あきお）

（大阪市立大学 大学院理学研究科数学研究所）

（2013 年 1 月 28 日受付）

**概要**： 数学の色々な分野のみならず物理学，化学，生物学とも深いレベルで関連して研究されるようになっている結び目について，「結び目の数学教育」研究会を立ち上げて実践することになったいきさつを先ず説明する。次に，結び目の数学とはどのような学問であるかについて説明し，その後で結び目の数学教育の効果について，右脳・左脳の知られている働きに基づいて考察する。

**検索語**：結び目，数学教育研究会，図形教育，教育効果，領域選択ゲーム，幼児の数学教育

## Ⅰ．結び目の数学教育の実践研究

結び目理論は位相幾何学の学問分野に属するが，他の数学の色々な分野や量子統計力学などの数理物理とも関連して研究されている。さらに，電子顕微鏡などの科学技術の発展と呼応して，今日ではソフトマター物理研究などの物理学，高分子合成研究やポリマーの研究などの化学，ＤＮＡやタンパク質の研究などの生物学とも関連して研究されるようになっている。そのような最先端の研究分野に属する結び目を，学校の数学教育の教材とする数々の教育実践を行ってきたのであるが，その経緯についてここで説明する。大阪教育大学名誉教授の岡森博和先生は数十年にわたり筆者の所属大学において数学科教育法の講義を受け持っていた。その関係で筆者は岡森先生を以前より存じ上げていた。2003 年に，筆者の所属大学において，21 世紀 COE プログラム「結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成」が採択され，筆者は拠点リーダーとして活動することになった。

そんなある日，所属大学の数学科事務室で，筆者は岡森先生から「結び目とはどのような学問か」と尋ねられた。後に知ったことであるが，岡森先生は大阪教育大学の柳本朋子先生等と数学教育のグループをつくり，コンピュータやグラフ理論など色々な数学を数学教育へ導入する実践研究を行っていた。結び目でそのような実践研究を行うのは意味があることかどうかについて尋ねたのだ。岡森先生の質問に答えて，筆者は次のような国際的な結び目の研究状況を説明した。

「結び目は，現在，数学のいろいろな先端的研究分野と関係して盛んに研究されている。」

「物理学，化学，生物学など色々な科学と関連して結び目の研究の話題が広がっている。」

また，寺阪英孝先生の著書［1］はユークリッド原論の説明から始まって結び目を含む空間幾何の説明で終わる内容になっているが，それを引き合いに出して，次のような意見も述べた。

「結び目の幾何は，ユークリッド幾何の進化した幾何学とみなせる。」

当方の 21 世紀 COE プログラムの教育実施計画の中で結び目の普及を行うと言及したこともあり，筆者には結び目の教育活動は大いに歓迎すべきことであったので，率直に次のような意見も述べた。

「結び目の数学教育を実践することは，筆者の推し進める 21 世紀 COE プログラムの活動にとって有益であるばかりでなく，国際的にも歓迎されるはずである。」

2004 年 7 月に，岡森先生の決断と指導により，岡森先生，柳本先生および高校・中学教員若干名をメンバーとして，また筆者も加わり，「結び目の数学教育」研究会が発足した。

この研究会のもとで，数々の結び目の数学教育の実践研究が実施された。その成果として 3 巻からなる報告集［2］が刊行された。21 世紀 COE プログラム委員会による当方の 21 世紀 COE プログラム活動の事後評価結果（総括評価）は「設定された目的は十分達成された。」という最高ランクの評価であった。そのコメント欄には「小中高生・数学科大学初年次学生・化学科学生を対象とする結び目理論の啓発活動も着実に実行したことは評価できる。」とあり，「結び目の数学教育」研究会の活動は 21 世紀 COE 活動の一環として有意義だったといえる。さらに，ロサンゼルス・タイムスの記事[3]のような結び目理論の有用性と教育の必要性に関する記事が現れたこともあり，結び目の数学教育の実践研究を国際的に発信しなければならないと真剣に考えるようになった。そこで，上記の報告集[2]に基づき作成した英文著書[4]を，2011 年には OCAMI Studies のシリーズの 1 つとして大阪公立大学出版会から，また 2012 年には全世界に向けて Springer Verlag から出版した。この Springer 版には「岡森先生の結び目の数学教育への取り組み」を称えたドイツ Technical University of Dortmund の E. C. ウイットマン教授の巻頭言が掲載されている。岡森先生が常日頃より強調していた教育実践がなければこの本は成就しなかったのであるから，この成果は岡森先生の偉大な業績の 1 つと言えるだろう。

「結び目の数学教育」研究会の実践活動は，現在も活発に継続しており，その後の実践活動記録をまとめた報告集 Vol. 4 の出版や，それと上記英語本の和訳を一緒にまとめた日本語の本の作成などが近々の目標になっている。

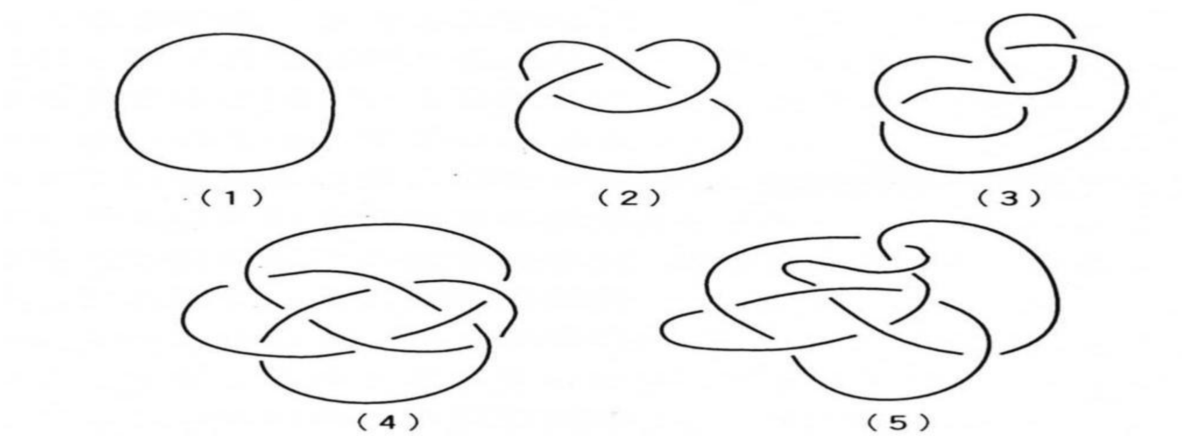


図１：結び目

## Ⅱ．結び目という学問

**結び目**とは，図１のような閉じたひもの状態のことである。簡単な結び目には名前があり，図１の場

合には，それぞれ（1) 自明な結び目，(2) 三葉結び目，(3) 8 の字結び目，(4) あわび結び目，(5) $8_{17}$ と呼ばれている。結び目はつぎのような性質を持っている。

(i)　結び目は 3 次元空間の中にあってはじめて意味をもつ。
(ii) 1 つの固定した結び目でも見る角度によっては違ったものに見えることがある。
(iii) 結び目がひもでつくられていると考えれば，　それはいくらでも違った形に変形可能である。

これらの性質から浮かび上がる問題は，　2 つの結び目がどのような関係にあるときにそれらを同じものと考えるかという問題である。数学では, それらを同じものとみなす関係をつぎのように定義している。

**定義**　2 つの与えられた結び目が**同じ(同型)**であるとは，それらを伸び縮みや変形可能なひもとみなすことにより，それらがあやとりの要領で同じ形に変形できることである。すなわち，それらを伸び縮みや変形可能なひもとみなして，それらが図 2 に示されるような**ライデマイスター移動** I，II，III を有限回行うことによって移りあうことである。

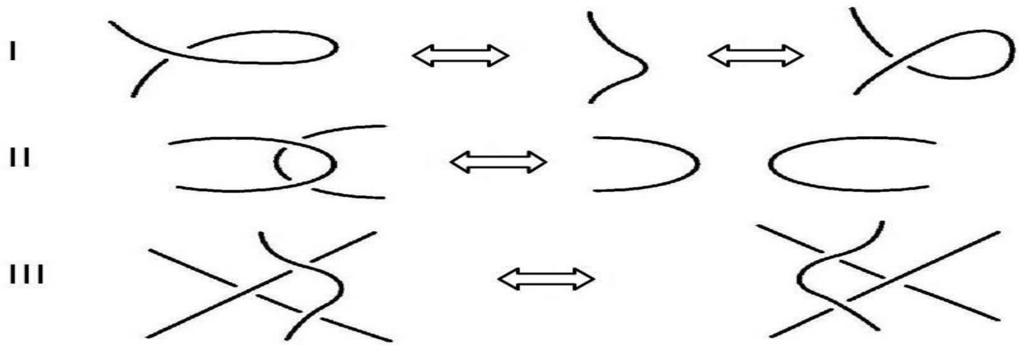


図 2：ライデマイスター移動

この定義のもとで，結び目理論の主要な研究目的は，つぎの(1) と(2) のように述べられる。

(1)　どのような結び目があるかを研究し，それらを重複なしにリストアップすること
(2)　2 つの与えられた結び目が同じかどうかを判定すること

例えば, 図 1 の(1)－(5) の結び目について, どの 2 つの結び目も同じにならないことを示すことができる。その証明は, 結び目から導ける数量で同じ結び目ならば同じ値をとるようなもの(**位相不変量**という)を, 数学を使って定義することによりなされる。このような位相不変量を見つけるために，現代数学や数理物理学の先端研究が利用できる場合があり，実際に色々な研究分野において位相不変量の開発研究がなされている。一方では，同じ結び目でもいくらでも違った形に変形可能であることから，同じものかどうかを直感的に見分ける能力も必要とされる。このような直観力は訓練によりかなり上達できる種類の能力であり，さらに結び目の教育訓練には，次節で述べるように，色々な教育効果も期待できる。

図３：北門の樹下・寺阪結び目（左側）と南門のコンウェイ結び目（右側）

図３にある２つの結び目は，英国のケンブリッジ大学にある結び目の写真である（D. W. サムナーズ教授撮影提供）。ケンブリッジ大学数学科とニュートン研究所へ行くために通るゲートハウスの門扉に設置されているが，北門にあるのが**樹下・寺阪結び目**，南門にあるのが**コンウェイ結び目**である。樹下・寺阪結び目は，樹下眞一先生と寺阪英孝先生により 1957 年に大阪において，独創的な方法により発見された結び目である。コンウェイ結び目は，J. H. コンウェイにより 1970 年にケンブリッジにおいて，結び目の分類表の作成過程の中で発見された結び目である。何故これらの結び目が並べて設置されているかと言えば，それらは**ミュータント**と呼ばれる結び目の変換操作で互いに移り合う結び目であり，その変換操作で移り合うような結び目は，標準的な位相不変量では判定できないことが知られているからである。樹下・寺阪結び目とコンウェイ結び目が同じものでないことはいくつかの方法で証明されている（例えば[5]参照）。しかしながら，これらを区別するような計算可能で単純な位相不変量はまだ知られていないのである。よほど同じものでないという直感的な確信がなければ証明する気にさえならないような関係で，これらの結び目は結ばれているのである。

## Ⅲ． 結び目の数学教育の重要性

筆者の考える「結び目の数学」の教育的な効果について述べる。P. F. セルゲーエフの著書[6］には，右脳・左脳のメカニズムについての説明がある。右利きの人の例であるが，左脳には主に抽象思考のためのメカニズムが集中しており，また右脳には主に具象思考のためのメカニズムが集中している。読み・書きや会話などの言語機能は左脳に集中している（[6]）。数学に限って言えば，

左脳には論理的思考，数学の知識・抽象思考，物事の数量評価，暗算等のメカニズム，
右脳には空間的視覚機能，空間感覚・空間認知，視覚的記憶，数字を書く能力，筆算等のメカニズム

が集中している。その結果として，「読み・書き・そろばん」は左脳思考ということになる[注]が，少年時代，左脳が発達していれば，国語，算数，理科などの学業成績がよいことになろう。 一方，右脳の発達具合と科学的な創造力とは深い関わりがあるようだ。[6]には，数学者の思考過程について，次のような説明がなされている。

1）最初に視覚パターンや運動パターンを使って考える（そのためには，右脳思考により，数学の具体的なイメージをもつ力が必要となる）。

2）研究の最終段階に入って，右脳思考から左脳思考へと移動し，やっと数式を使うことになる。
3）最後に，研究成果を発表する等のために，左脳思考により視覚パターンや運動パターンを普通の言葉に翻訳する。

筆者も数学研究を行ってきた経験からこの意見に賛成である。[6]によると，少年時代の左脳の発達の遅れは右脳思考の能力をさらに高めるようである。少年時代に，言語の遅れとかで，国語，算数，理科などの学業成績があまり良くなかったとしても，少年時代に右脳思考の能力（言い換えると，数学の具体的なイメージをもつ力）が高まっていれば，成人になって，前代未聞の発想で，画期的な数理的業績を挙げることができたとしても，何ら不思議なことではないのかも知れない。

図形教育は大切であるとよく言われるが，「何故大切なのか」について，納得の行く説明を聞いたことがない。上記の解釈によれば，図形教育は数学の思考過程 1）のための思考訓練とみなされるから大切なのだ，と答えることができるだろう。「結び目の数学」は，式で表わさないで図形で考える学問であり，また定規やコンパスを必要とせず，その点でユークリッド幾何の進化した図形の学問であり，思考過程 1）のための初等的な思考訓練に適した教材になり得る。以上述べた考えを踏まえて，結び目を早期に学習する意義を述べると，次の（a）－（g）のようになる。

(a) 色々な科学的な現象がひもの曲がりと関連しているので，結び目を観察したり変形して調べることは，その仕組みを理解する上で役立ち，知的好奇心を育む上からも役立つばかりでなく，数学の思考過程 1）のための思考訓練になり，究極的には未解決の数理的な難問を解決する能力を高めることになる。
(b) 結び目を観察したり変形して調べたりすることは，図形をみる力や空間把握力がつき，数理的な問題などについての具体的なイメージをもつ力を身につけるのに役立つ。
（c）結び目を変形して調べることは，違った地点から眺める訓練ができ，思考の柔軟性が身につく（観点を変える訓練ができる）。
（d）結び目を変形して調べると想定外の性質に出くわすことがよくあり，既成概念にとらわれずに新しい発見がし易くなる。
(e) 結び目を利用すると，科学を説明し易いことがよくある。
（f）結び目は実用的で日常よく使われるものであり，社会生活を送る上で役に立つ。
（g）結び目を眺めていると，3 次元空間の中で生きていることに気づく。

2011 年には，結び目理論を応用したゲーム「領域選択ゲーム」（Region Select）（発明者：河内明夫，岸本健吾，清水理佳）が作られ，それは筆者の所属大学の数学研究所のホームページで公開された。その年の 12 月には，共同研究先の（株）グローバルエンジニアリングからスマートフォン（アンドロイド）で無料公開されるようにもなった。このゲームは図形をみる力や空間把握力をつけるのに役立つような右脳思考のゲームである。数学的には，このゲームをクリアにすることと，2 を法とした整数を係数とする多変数の連立一次方程式を解くことは同等になっている。その意味で，数学を意識しないで数学をするようなゲームと言えるかもしれない。このゲームの詳しい説明は，結び目理論の案内書にもなっている近

刊の著書[7]の中でなされている。さらに，このゲームの幼児版の開発の研究も開始しており，数字を知らない幼児の数学力を向上させるための教材，具体的には図形思考の数学や数学アルゴリズムを訓練するための教材を開発しようと考えている。幼児に数学を教えようとするならば，まず数字を暗記させることから始めるのだろうが，それは将来の数学の勉強のための重要な準備作業ではあるが，図形思考の数学訓練や数学アルゴリズムの訓練などの数学力を向上させるための訓練とはいえない。このゲームの幼児版よって，数字を知らない幼児にも数学力を向上させるための訓練をさせたいと考えているのである。この研究は 2012 年度学術振興会（挑戦的萌芽研究）「結び目理論のゲームと科学への応用」と 2012 年度 JST 研究成果展開事業（研究成果最適展開支援プログラム）A-STEP「幼児教育用結び目ゲームと新規パスワードの実証開発研究」（代表は共に筆者）の補助により実施されており，またその教育的な評価は「結び目の数学教育」研究会に依頼することにしている。

## Ⅳ. 結びにかえて

この論文は，数学教育研究会―岡森博和先生を偲んで－の講演原稿を修正して加筆したものである。3 節の考察は，筆者の小学校時代の国語，算数，理科の成績が良くなく，数学者として活動的に研究してきたこととの間にはギャップがあり，それを埋めるための理由を考察した講演[8]の内容に基づく。最後になりますが，岡森博和先生には結び目の数学教育の実践を通して教育実践の大切さを教えていただきました。心よりご冥福をお祈り申し上げます。

注) ここで述べている「そろばん」とは機会的な計算のことをさしており，具体的にそろばんを扱う作業は，碁や将棋および上記のゲーム同様，右脳思考の能力を高めるものと言える。

## 参考文献


[1] 寺阪英孝,「初等幾何学」岩波全書（1973）.

[2] 河内明夫，柳本朋子編 「結び目の数学教育への導入−小学生・中学生・高校生を対象として−」結び目の数学教育研究プロジェクト，21 世紀 COE プログラム“結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成”における教育的活動, Vol. 1(2005), Vol. 2(2006), Vol. 3(2009).

[3] M. ウエルトハイム（寺田文治訳），非常に多くの科学と関連する“結び目理論”, ロサンゼルス・タイムス 2006 年 3 月 8 日記事.

[4] Akio Kawauchi and Tomoko Yanagimoto (ed.), Teaching and Learning of Knot Theory in School Mathematics, OCAMI Studies, Vol. 4(2011) および Springer Verlag (2012).

[5] Akio Kawauchi, A survey of knot theory, Birkhäuser Verlag (1996).

[6] P. F. セルゲーエフ著（阿部光伸訳）「右脳と左脳のはなし」東京図書（1984）.

[7] 河内明夫，岸本健吾，清水理佳「結び目理論とゲーム」朝倉書店（近刊）.

[8] 河内明夫，小学生時代を振り返る － 数学を好むようになるために －, 連数協シンポジウム，大阪市立大学, 2012 年 11 月 17 日.