これまでの研究成果のまとめ

森内博正

円周 S^1 の 3 次元球面 S^3 への埋め込みを結び目という．結び目理論には, 結び目の表をつくるという研究がある．1969 年, J. H. Conway はタングルと基本多面体という概念を用いて 11 交点以下の素な結び目の表を作成した．ここで, タングルとは 3 次元球体 B^3 と B^3 内のプロパーな 1 次元多様体 t (ただし $\partial t \neq \emptyset$) の対 (B^3, t) のことであり, 基本多面体とは 2 辺形を持たない, 4 価の平面グラフのことである．基本多面体の頂点に代数タングルとよばれる特殊なタングルを代入することで, 結び目が得られるというわけである．Conway の表示法を利用すると, 交点の少ないものから順に結び目を数え上げられるという利点がある．

古典的結び目理論の一般化として, 様々な対象の埋め込みについて研究がなされている．空間グラフとはグラフを S^3 へ埋め込んだものである．グラフが 2 つの頂点とそれらを繋ぐ 3 本の辺からなるときに, その空間グラフを θ-曲線という．θ-曲線に対してのアンビエントアイソトピーの不変量は結び目成分, アレクサンダー多項式, そして山田多項式などが知られている．

1989 年, R. A. Litherland は 7 交点以下の素な θ-曲線の表を作成した．分類には結び目成分とアレクサンダー多項式を用いている．しかしその表は個人的な手紙に書かれていて, 公式の論文としては発表されておらず, 7 交点以下の θ-曲線が全て挙げられているかどうかについては証明されていなかった．私は修士論文の結果として, Litherland の表が完全であるということを証明した．まず, Conway が結び目に対して行なった方法を応用して θ-曲線の表示法を構成した．それは結び目における Conway の表示法と同様に, 交点数の少ないものから順に θ-曲線を数え上げられるという利点がある．ただ, θ-多面体は 3 価頂点が 2 個で, 他の頂点は全て 4 価であるという点で, 前述の基本多面体とは形状が異なっている．また, 素な θ-曲線の表作りを最終目標としているので, 素でない θ-多面体は除外した．すると, 4 価頂点が 7 個以下の素で基本的な θ-多面体は 24 個見つかった．4 価頂点に代数タングルを代入することで 7 交点以下の θ-曲線を数え上げることができた．分類には山田多項式を利用した．

また, 同様の手法を用いることにより, θ-曲線に似た空間グラフである手錠グラフの数え上げを 7 交点まで完了した．手錠グラフとは 2 本のループと, それぞれのループ上に存在する頂点を繋ぐ 1 本の辺からなる空間グラフのことである．手錠型グラフに対してのアンビエントアイソトピーの不変量は絡み目成分と山田多項式などが知られており, 7 交点以下の手錠型グラフは山田多項式で分類できることが分かった．