研究成果

鄭仁大

3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$(もしくは 3 次元球面 S^3) へ埋め込まれた μ 個の単純閉曲線を μ 成分絡み目といい，特に $\mu = 1$ のときは結び目という．2 つの絡み目 L と L' に対して，向きを保つ同相写像 $\varphi\colon (\mathbb{R}^3, L) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, L')$ が存在するとき，L と L' は同値であるといい，同値な絡み目に対して同じ値をとる不変量がこれまでに多く発見されている．私は絡み目不変量の一つである Alexander 多項式の性質，特に 1961 年に R. H. Fox によって発表された交代絡み目の Alexnader 多項式の台形予想についての研究を行ってきた．台形予想とは，交代絡み目 L のアレクサンダー多項式を $\Delta_L(t)$ とすると，$\Delta_L(-t)$ は台形的な多項式になるであろうというもので，多項式 $f(t) = \sum_{i=0}^{m} c_j t^j (c_j \in \mathbb{N})$ が台形的であるとは，次の 3 つの条件を満たすときのことをいう．

- $\forall i = 0, 1, \ldots, m$ に対して，$c_i = c_{m-i}$ が成立.
- $0 < c_0 \leq c_1 \leq \cdots \leq c_{[\frac{m}{2}]}$ が成立.
- $c_j = c_{j+1}$ を満たす j が存在するとき，$j \leq \forall k \leq [\frac{m}{2}]$ に対して $c_k = c_j$ が成立.

台形予想に関する先行結果として，R. I. Hartley によって 2-橋絡み目に対して，K. Murasugi によって交代代数絡み目に対して，それぞれ正しいことが証明されている．

私は特殊交代絡み目のザイフェルト行列を使ってアレクサンダー多項式を計算する際に matrix-tree theorem を用いることでアレクサンダー多項式を t^ℓ の重みが付いた連結ステイトの和で書けることを用いて，台形予想へのアプローチを考えた．

任意の素な種数 2 の特殊交代結び目ダイアグラムは，特別な 11 個の結び目ダイアグラム (5_1, 7_5, 8_{15}, 9_{23}, 9_{38}, 10_{101}, 10_{120}, 11_{123}, 11_{329}, 12_{1097}, 13_{4233}) に $\overline{t'_2}$-move を適当に行うことで得られることが，A. Stoimenow によって示されている．私は，特殊交代ダイアグラムにおいて $\overline{t'_2}$-move を行うことでアレクサンダー多項式がどのように変化するかを，上記のアレクサンダー多項式を重み付き連結ステイト和で表す方法を用いることで求めることができた．その結果，台形予想は種数 2 以下の特殊交代絡み目に対しては正しいことが証明できた．