これまでの研究成果のまとめ

浅田雅彦

４次元ユークリッド空間 R^4（又は、４次元球面 S^4）の２次元閉部分多様体 F を曲面絡み目と呼び、特に F が連結のとき曲面結び目と呼ぶ。曲面結び目を表す１つの方法として ch-diagram が S. J. Lomonaco, Jr. 氏及び、吉川克之氏によって導入された。ch-diagram とは、２種類の頂点をもつ４価の平面グラフである。吉川氏は ch-diagram に対する８つの局所変型 Ω_1–Ω_8 を導入した。これらは、ch-diagram が表す曲面結び目の（R^4 のアンビエントアイソトピーを法とする）型を保存するものである。私は更に（結び目の型を保存しない）３つの局所変型 Ω_9–Ω_{11} を導入し、これら１１の局所変型を用いて、任意の ch-diagram を自明な ch-diagram に変型するアルゴリズムを与えた。また系として、この変型の際に用いた３つの局所変型 Ω_9–Ω_{11} の数から、元の ch-diagram が表す曲面結び目の種数が得られることがすぐに分かる。この結果は”An unknotting sequence for surface-knots represented by ch-diagrams and their genera”という題名の論文として、雑誌 Kobe Journal of Mathematics Vol. 18 (2001) 163–180 に発表した。

吉川氏は頂点数が１０以下の ch-diagram で表される全ての曲面絡み目の表を作成した。一方、R^4（又は、S^4）内にはめ込まれた（横断的な２重点のみをもつ）閉曲面（以下、はめ込まれた閉曲面と呼ぶ）が３種類の頂点をもつ４価の平面グラフ、これを２重点をもつ ch-diagram と呼ぶ、によって表されることが鎌田聖一氏によって指摘されている。私は、吉川氏が曲面絡み目を数え上げるのに用いた方法をはめ込まれた閉曲面を数え上げることに応用した。ch-diagram に対する局所変型 Ω_1–Ω_8 は２重点をもつ ch-diagram に対しても有効である。すなわち、はめ込まれた閉曲面を表す２つの２重点をもつ ch-diagram が Ω_1–Ω_8 を有限回施して互いに移りあうとき、その表すはめ込まれた閉曲面は R^4 内でアンビエントアイソトピックである。私は更に（はめ込まれた閉曲面の型を保存する）いくつかの局所変型を導入した。そして、頂点数が５以下の２重点をもつ ch-diagram で表される全てのはめ込まれた閉曲面を数え上げ、現在６以下で表されるものを数え上げている最中である。