# 1　これまでの研究成果のまとめ

Goresky-Kottwitz-MacPherson により, コンパクトリー群 $G$ がある条件を満たす空間 $X$ に固定点集合 $X^G$ が有限個の孤立特異点を持つように作用するとき, その同変コホモロジーは, $G$ の極大トーラスの作用の 0 次元ならびに 1 次元の軌道の構造から計算されることが示された.

この軌道の構造は組み合わせ的には, 有限正則グラフと, グラフの向き付けられた各辺へのラベル付けの組で表すことが出来る.

以上のことを踏まえて, (コンパクト) トーラス $T$ が (滑らかな) 多様体 $M$ に固定点集合 $M^T$ が有限個の孤立特異点を持つように作用して, ($T$ 作用の接表現に関する) ある条件を満たす場合に (この条件を満たす $T$ 作用を持つ多様体を GKM 多様体と呼ぶ), それらに対応するグラフとグラフの向き付けられた各辺への ($T$ の分類空間 $BT$ の 2 次元コホモロジー $H^2(BT)$ による) ラベル付けの組を調べると, (各辺のラベルの間の) いくつかの必要条件が得られる.

これらの条件を満たすようなグラフとラベル付けの組 (この組を GKM グラフと呼ぶ) に対して, Goresky-Kottwitz-MacPherson の結果を踏まえて, 同変コホモロジーを定義する.

このようにして定義された GKM グラフの同変コホモロジーについて, とくに, $n$ 次元トーラスが $2n$ 次元多様体に作用している GKM 多様体に対応するような, GKM グラフに関して, それらの GKM グラフが満たしている性質と, その同変コホモロジーの環構造について調べた.

$\mathscr{G} = (\Gamma, \alpha)$ を上に述べたクラスに属する GKM グラフとする ($\Gamma$ は $n$-正則グラフ, $\alpha$ は向き付けられた各辺へのラベル付け). この GKM グラフ $\mathscr{G}$ に対して, $\Gamma$ の $k(\forall k \leq n)$-正則連結部分グラフとして, $\mathscr{G}$ の $k$-面 $F$ が定義できる. 各 $k$-面は $\alpha$ の部分グラフへの制限によるラベル付けにより GKM グラフになり, 面と面の交わりはいくつかの面の交わりになる. さらに, 各 $k$-面に対して, トム類と呼ばれる, GKM グラフ $\mathscr{G}$ の同変コホモロジー類 $\tau_F \in H_T^{2(n-k)}(\mathscr{G})$ を定義する.

GKM グラフ $\mathscr{G}$ の面全体の集合 $P(\mathscr{G})$ は, 部分グラフとしての包含関係の逆の順序により, 単体的半順序集合の構造を持つ. 単体的半順序集合 $P$ に対しては, face ring $\mathbf{k}[P]$($\mathbf{k}$ は係数環) と呼ばれる, 単体複体に対する Stanley-Reisner 環の一般化に当たるものが, $P$ のすべての元を生成元とする自由加群を面構造から定まるあるイデアルで割ることにより定義されるが, この face ring と GKM グラフの同変コホモロジー $H_T^*(\mathscr{G})$ の間に次の関係が成り立つ.

**Theorem.** GKM グラフ $\mathscr{G}$ の各面のトム類と $P(\mathscr{G})$ の元との対応により, $H_T^*(\mathscr{G})$ と $\mathbf{k}[P(\mathscr{G})]$ は環として同型.