1　これまでの研究成果のまとめ

Goresky-Kottwitz-MacPherson により, 孤立固定点を持つ T-空間 M が equivariantly formal であるとき, 包含写像 $i : H_T^*(M) \to H_T^*(M^T)$ の像は T 作用の 0 次元ならびに 1 次元の軌道の組み合わせ構造から計算されることが示された. この結果に触発されて, Guillemin-Zara は, GKM グラフと呼ばれる, グラフ $\mathscr{G}$ とその axial function の概念を導入し, $\mathscr{G}$ の同変コホモロジー $H_T^*(\mathscr{G})$ を定義して, GKM 多様体 M に関係した GKM グラフを $\mathscr{G}_M$ とするとき, $H_T^*(M)$ と $H_T^*(\mathscr{G}_M)$ の関係を調べた.

以上のことを踏まえて, トーラス T が滑らかな多様体 M に固定点集合 M^T が有限個の孤立固定点を持つように作用して, T 作用の接表現に関するある条件を満たす場合 (このような条件を満たす T 作用を持つ多様体 M を GKM 多様体と呼ぶ) について考えると, M の T 作用の 0 次元ならびに 1 次元の軌道の組み合わせ構造から, GKM グラフ $\mathscr{G}_M$ が, 有限 n-正則グラフ Γ と, axial function $\alpha : E(\Gamma) \to \mathfrak{t}^* \cong H^2(BT)$ の組として得られる.

このようにして定義された GKM グラフが満たしている性質と, その同変コホモロジーの環構造について調べた.

この GKM グラフ $\mathscr{G}$ に対して, 接続といわれる構造が自然に定義できるが, Γ の $k(\forall k \leq n)$-正則連結部分グラフであって, $\mathscr{G}$ の接続に関して不変なものとして, $\mathscr{G}$ の k-面 F が定義できる. さらに, 各 k-面 F に対して, Thom 類 $\tau_F \in H_T^{2(n-k)}(\mathscr{G})$ を定義する.

GKM グラフ $\mathscr{G}$ の面全体の集合 $P(\mathscr{G})$ は, 部分グラフとしての包含関係の逆の順序により, 単体的半順序集合の構造を持つ. 単体的半順序集合 P に対しては, Stanley により, face ring $\mathbf{k}[P]$($\mathbf{k}$ は係数環) が定義された. これは, P のすべての元を生成元とする多項式環を, P の面構造から定まるあるイデアルで割ったもの. この face ring と GKM グラフの同変コホモロジー $H_T^*(\mathscr{G})$ の間に次の関係が成り立つ.

Theorem. GKM グラフ $\mathscr{G}$ の各面の Thom 類と $P(\mathscr{G})$ の元との対応により, $H_T^*(\mathscr{G})$ と $\mathbf{k}[P(\mathscr{G})]$ は環として同型.

Davis-Januszkiewics による, 単体複体に対する, その錘を軌道空間として持つ T-空間の構成を拡張して, 単体的半順序集合 P に対しても, 同様の T-空間 $M(P)$ が構成でき, $H_T^*(M(P)) \cong \mathbb{Z}[P]$ が成り立つことがわかる.

このことと, T-空間と GKM グラフ $\mathscr{G}$ の blow-up についての事実から, 次のことがわかる.

Theorem. $\mathscr{G}$ の blow-up を $\widetilde{\mathscr{G}}$ とするとき, $H_T^*(\mathscr{G})$ が自由加群であることと, $H_T^*(\widetilde{\mathscr{G}})$ が自由加群であることは同値である.