これまでの研究成果のまとめ

石郁茂久

主 $SO(n)$ 束 P 上の 2 重被覆で各ファイバーへの制限が非自明であるものの同型類を P 上の spin 構造とよぶ．向き付けられた n 次元多様体 M の接束の枠束 $F(M)$ は主 $SO(n)$ 束であり，この $F(M)$ の spin 構造を M 上の spin 構造とよぶ．M 上の spin 構造は $\mathbb{Z}_2$ 係数の 1 次元コホモロジー群 $H^1(M;\mathbb{Z}_2)$ と一対一に対応するが，この対応は canonical ではない．しかし，M が向き付けられた閉曲面であるときは D. Johnson により M 上の spin 構造と $\mathbb{Z}_2$ 係数の 1 次元ホモロジー群上の 2 次形式で同伴する双線型形式が交叉形式であるものとの間に canonical な 1 対 1 対応が与えられている．2 次形式には代数的な不変量があり，これにより上の対応を通して spin 構造，spin cobordism の不変量が得られる．この spin 構造，spin cobordism の不変量はもともと M. Atiyah により Dirac 作用素の mod 2 指数， KO 理論などを用いて構成されたものであり，D. Johnson の構成した不変量は M. Atiyah の構成した不変量の幾何的な構成であるといえる．

さて種数 g の向き付けられた閉曲面 Σ_g の向きを保つ微分同相写像のイソトピー類全体は写像の合成を積として群をなす．この群を Σ_g の写像類群とよび Γ_g で表す．写像類群 Γ_g は Dehn twist とよばれる Σ_g の向きを保つ微分同相写像のイソトピー類により生成されることが知られていたが，さらに S. Humphries は Σ_g 上の単純閉曲線の交わりに関するグラフを用いることで生成元としての Dehn twist の個数は $2g+1$ 個が必要かつ十分であることを示した．

私は S. Humphries の与えたグラフを用いることで，1 次元ホモロジー群上の 2 次形式を得た．すなわち，Σ_g 上の spin 構造を得た．このことにより，私は spin 構造と写像類群の関係に興味をもち，研究してきた．そして，写像類群の spin 構造全体への作用を用いることで，S. Humphries の主張のうち必要性の部分の別証明を与えた．このことから spin 構造と写像類群は深く関係しているといえる．また，M. Atiyah の結果との関係，すなわち写像類群と K 理論との関係も興味深く，現在研究している．