これまでの研究成果

これは monodromy と Lefschetz pencil に関する総合報告であり, 以下その概略を述べていく.

n 次元射影多様体 X の超平面切断全体の中で $\mathbb{P}^1$ によりパラメトライズされている X の超平面切断の族 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{P}^1}$ を考え, さらにその族の中で唯一の特異点として通常 2 重点を持つような特異な超平面切断を含んでいるものを考える. このような族を Lefschetz pencil と言い, 特異な超平面切断を含むような一般的な族は Lefschetz pencil になっていることがわかる.

まず一つの特異超平面切断とその周りの smooth な超平面切断を考えと, 通常 2 重点から smooth な超平面切断 X_p 上に消滅サイクル $\delta \in H^{n-1}(X_p,\mathbb{Z})$ が定まり Picard-Lefschetz formula によりこの消滅サイクルとモノドロミー表現の関係が記述されていることがわかる.

いま $q_1,\cdots,q_m \in \mathbb{P}^1$ から定まる超平面切断 $X_{q_1},\cdots,X_{q_m}$ がそのような特異点を持つとする. すると $\mathbb{P}^1 \ni p \neq q_i$ 上の超平面切断 X_p に通常 2 重点から消滅サイクル $\delta_1,\cdots,\delta_m \in H^{n-1}(X_t,\mathbb{Z})$ が定まり, Picard-Lefschetz formula によりそれらがモノドロミー表現のもと共役になっていることがわかる.

また weak Lefschetz の定理より, $j : X_p \hookrightarrow X$ から誘導される Gysin 準同型 $j_* : H^{n-1}(X_p,\mathbb{Z}) \to H^{n+1}(X,\mathbb{Z})$ の kernel がこれら消滅サイクルにより生成されることがわかる. この cohomology を vanishing cohomology といい、$H^{n-1}(X_t,\mathbb{Z})_{van}$ と書く.

以上より vanishing cohomology へのモノドロミー表現

$$\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1 - \{q_1,\cdots,q_m\},p) \to \mathrm{Aut}H^{n-1}(X_p,\mathbb{Q})_{van}$$

は既約であることがわかる. つまりこのことを Hodge 理論の言葉で言うと,
$H^{n-1}(X_p,\mathbb{Q})_{van}$ を stalk とする局所系の trivial でない部分局所系はないということである.