今後の研究計画

秋吉宏尚

今後の研究計画：私がこれから行いたい研究は，結び目理論の言葉を用いて標語的に表すと「双曲的結び目のザイフェルト曲面のクライン群の観点からの研究」である．補空間が有限体積完備双曲構造を許容する結び目を双曲的結び目と呼ぶ．完備双曲構造に関するホロノミー表現の像として，双曲的結び目の基本群はクライン群とみなされる．すると，圧縮不能ザイフェルト曲面の基本群は結び目群の部分群と同一視されるので，曲面群と同型なクライン群を得ることが出来る．Jogensen による一つ穴あきトーラス擬フックス群のフォード基本領域の組み合わせ構造の精密な研究により，（8 の字結び目を代表として）その極限として得られる円周上の穴あきトーラス束の双曲構造と位相構造の関係が非常に具体的に理解された．私は，このような手法が，曲面束以外の多様体の研究にも応用できるのではないかと期待する．例えば，双曲結び目補空間をザイフェルト曲面で切り開くことにより得られる「境界成分」を 2 つ持つ多様体の（無限体積完備）双曲構造の変形空間をフォード基本領域の組み合わせ構造を手がかりに精密に理解することにより，結び目の位相的性質も今以上によく分かるのではないかと思う．双曲構造の研究に組み合わせ構造を用いるという，こういう研究手法は，クライン群の研究で非常に重要な位置を占める「粗い幾何学」と相性のよいものであることが知られてきている．

今後数年間で行いたい研究を具体的に以下に述べる．3 次元閉多様体内の双曲的結び目に対し，その結び目を境界として持つ，一つ穴あきトーラス T が埋め込まれていると仮定する．多様体を T に沿って切り開くと「境界成分」として 2 枚の穴あきトーラス $T_{\pm}$ を持つような多様体を得ることが出来る．このとき，結び目（の正則近傍の境界）に対応する部分群を $PSL(2,\mathbb{C})$ の放物的元とするような双曲構造の擬等長変形空間は，穴あきトーラスのタイヒミュラー空間 2 つの直積と同一視され，Jorgensen 理論により定義される angle invariant と同種の不変量が考えられると思われる．穴あきトーラス群の構造は非常によく分かっているので，2 枚の穴あきトーラス $T_{\pm}$ に対し，それらをつなぐ多様体がどのような影響を及ぼすかを研究することになる．短期的には，(i) 穴あきトーラスと区間の直積から，レベル曲面上の本質的単純閉曲線に沿ったデーン手術で得られる多様体，(ii) 2 つの穴あきトーラスを「境界」に持つハンドル数 1 多様体の順に研究していきたい．

(i) に関しては，穴あきトーラスの両側カスプ群から得られる多様体 2 つを凸核の境界成分の三つ穴あき球面に沿って貼り合わせることで，「境界成分」として 2 枚の三つ穴あき球面を持ち，階数 2 のカスプを一つ持つような多様体が得られる．双曲デーン手術とフォード基本領域の関係はこれまでの私の研究により明らかになってきているので，階数 2 のカスプを双曲デーン手術により埋めることで (i) で考えようとしている双曲構造の変形空間に幾何学的有限境界として含まれる双曲構造に関するフォード基本領域を具体的に記述できることがわかる．こうして，Jorgensen が用いた幾何学的連続性の議論に必要な基点の情報は得られることになる．ある種の対称性を保つ変形を行う限り，Jorgensen 理論と同様の考察が行えると期待されるが，対称性を保たない変形において，どのような現象が起こるのかが大きな問題として考えられる．

(ii) に関しては，まず基本群の $PSL(2,\mathbb{C})$ 表現空間の効果的なパラメータ付けを見つけることが重要であると思われる．(i) の研究では，考える多様体の基本群が比較的簡単な表示を持つので，表現空間のパラメータとしては，Bowditch により詳しく研究された一つ穴あきトーラス群の表現空間のパラメータをそのまま使うことが出来ると期待されるが，多様体が複雑になった (ii) では，そうしたことは期待できない．そこで，このような多様体の曲線複体の構造，さらに曲線複体と表現との関係の解明が特に重要であると思われる．

将来の展望：これまでに述べてきたフォード基本領域の組み合わせ構造を手がかりとする「粗い幾何」を用いることで，将来的には「3 次元双曲多様体全体の空間」の幾何を行えるのではないかと期待される．対象を結び目補空間に限定すると，射影図から得られる結び目間の距離などとは異質の，幾何構造の観点から自然な「結び目全体の空間」への位相を考えることができる．曲面論においては，曲面の位相構造を固定しても様々な幾何構造が入ることにより，モデュライ空間やタイヒミュラー空間などという豊かな世界が広がっている．個々の位相多様体に入る幾何構造は（ほぼ）一意的である結び目補空間や閉多様体などの 3 次元多様体に対しても，上述のように 3 次元多様体全体の空間を考えることは，位相構造と幾何構造との関連を調べる上で重要だと思う．