これまでの研究成果のまとめ

秋吉宏尚

文中では論文リストの番号で該当する論文を指します

Thurston のハーケン多様体の双曲一意化定理によると，3 次元球面内のほとんど全ての結び目および絡み目の補空間は有限体積，完備双曲構造を許容する（カスプを持つ双曲多様体となる）ことがわかる．Epstein-Penner はカスプを持つ双曲多様体に対して，双曲構造から自然に定まる理想多面体分割（標準的分割と呼ぶ）を定義した．私は標準的分割を手がかりとしてカスプを持つ 3 次元双曲多様体の双曲構造と位相構造の関係の解明を目指して研究してきた．私のこれまでの研究を大まかに三つの系統へと分類し，それぞれの概略を述べていく．一つ目の系統は，デーン手術と標準的分割との関係を調べたもの，二つ目の系統は，ヘガード分解と双曲構造との関係の解明を目指して行っている作間誠，和田昌昭，山下靖の三氏との共同研究で，三つ目の系統は無限体積双曲多様体の性質を組み合わせ的にとらえようとする研究である．

デーン手術と標準的分割：カスプを二つ以上持つ 3 次元双曲多様体に双曲デーン手術を施すことで得られる双曲多様体の標準的分割は，デーン手術で埋め込まれるトーラス体の基本群である巡回的クライン群のフォード領域の組み合わせ構造を用いて記述されることがわかった．((1), (2), (5), (11) など.）

ヘガード分解と双曲構造（作間誠，和田昌昭，山下靖の三氏との共同研究）: 1970 年代の Jorgensen による未完の論文で特徴付けられた穴あきトーラス擬フックス群のフォード領域の組み合わせ構造は，その変形の延長として得られる錘多様体の「フォード領域」へも応用されることがわかり，その結果として任意の二橋結び目補空間の双曲構造を具体的に構成することが出来た．さらに，その標準的分割は作間-Weeks により標準的分割の候補として構成された，位相的な理想四面体分割と一致することがわかった．((4), (7), (8), (13) など.）我々は二橋結び目の，上下トンネルと呼ばれる，結び目解消トンネルに錐角を持たせることで，四つ穴あき球面の擬フックス空間の幾何学的有限境界群から二橋結び目群への連続変形族を構成した．結び目解消トンネルは種数 2 のヘガード分解と密接に関係しており，この研究は「双曲的ヘガード分解理論」の構築のための第一歩と位置づけられる．

無限体積双曲多様体の組み合わせ構造 : Jorgensen の手法は穴あきトーラスの幾何学的無限な境界群のフォード領域の考察にも応用でき，全ての幾何学的無限境界群に対してフォード領域を決定することができた．その結果として，任意の一つ穴あきトーラス束の標準的分割を決定することができた．((16) に概要．本論文は準備中.）Lackenby はこれとは全く異なる多面体分割の組み合わせ的な議論を用いて，トーラス束の標準的分割を（独立に）決定した．このことは，双曲幾何と位相幾何が標準的分割を間に挟んできれいに対応していることの顕著な例と言えると思う．

クライン群論の最近の結果によると，任意のクライン群に対し，その商空間として得られる 3 次元双曲多様体はコンパクト多様体の内部に同相で，各エンドに定義されるエンド不変量がそのクライン群を特徴付けることがわかる．穴あきトーラスクライン群に対しては，エンド不変量に加えて，フォード領域の組み合わせ構造を用いて「side parameter」と呼ばれる不変量も定義されるが，実はそれらはタイヒミュラー空間のサーストンコンパクト化 2 つの直積空間という同じ値域を持つ．この 2 つの不変量の間のヴェイユ・ピーターソン距離が，任意の穴あきトーラス群に対して一様な定数で抑えられることがわかった（(21) に概要，本論文は準備中.）

クライン群論の観点から，曲面束以外の多様体の双曲構造を構成するには，多様体を本質的曲面で切り開き，得られた（位相的には）単純な多様体上の無限体積双曲構造の変形空間上の skinning map と呼ばれる写像に対する不動点定理を証明することが本質的である．穴あきトーラスと区間の直積に同相な多様体にそのレベル曲面上の本質的単純閉曲線に沿ったデーン手術を施して得られる多様体の幾何学的有限な双曲構造を調べ，単純な双曲構造から skinning map の不動点に対する双曲構造へのある変形族を数値的に構成し，そのフォード領域の組み合わせ構造を記述することができた．