

研究成果

酒井 高司

積分幾何学とはある種の幾何学的対象物のなす空間に不変測度を考え、その空間上の関数の積分について議論する学問である。その歴史は古く、古典的な幾何学的確率論に端を発する。一方では空間の上の不変測度について議論を行う幾何学的測度論に発展した。また、積分幾何学は Santaló による等周不等式の証明に代表されるように様々な幾何学的変分問題に応用されている。私の研究目的は積分幾何学とコンパクト Lie 群の表現論を基に等質空間内の部分多様体の幾何学的性質を明らかにすることである。

Riemann 等質空間において二つの部分多様体の共通部分の不変量を積分して平均化した値を表す等式は交叉積分公式と呼ばれている。特に、体積汎関数を被積分関数としたときは Poincaré の公式と呼ばれ、幾何学において重要な役割を果たしてきた。Howard は第二基本形式に関する不変多項式から部分多様体の積分不変量を定義し、それらの積分不変量に関する交叉積分公式の定式化について一般論を与えた。しかし、一般には彼の結果からは交叉積分公式の具体的な表示を得ることは難しい。論文 [5] では、実空間形において 2 次の不変同次多項式から定義される積分不変量に関する交叉積分公式の表示を完全に決定した。これらは Chern-Federer および Chen による交叉積分公式のある種の拡張になる。また、最近の研究によって、これら実空間形での 2 次の積分不変量に関する交叉積分公式が二点等質空間の超曲面についても成立することが分かった。これは積分幾何学における「転送原理」に相当する。この結果は論文 [6] にまとめた。

交叉積分公式は積分幾何学における興味深い研究対象であるが、さらに幾何的問題への特筆すべき応用がある。例えば、Liu, Lê, 田崎による \mathbb{Z}_2 係数ホモロジー類内で体積最小となる部分多様体の研究においては、Poincaré の公式の積分値の評価が鍵となっている。また、Kleiner-Oh は $\mathbb{C}P^n$ 内の Lagrange 部分多様体に関する Poincaré の公式と $\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$ についての Arnold-Givental の不等式を用いて、 $\mathbb{C}P^n$ に全測地的に埋め込まれた $\mathbb{R}P^n$ が Hamilton 変形で体積最小な極小 Lagrange 部分多様体であることを示した。論文 [3] では、彼らのアイデアを基に極小 Lagrange 部分多様体の Hamilton 体積最小性の研究に積分幾何と Lagrange 交叉理論を用いる手法を導入した。これにより、 $S^2 \times S^2$ に標準的な計量を入れた場合、大円の直積で与えられる全測地的トーラスが Hamilton 変形で体積最小であることを示した。

Harvey-Lawson は special Lagrangian cone の研究のために austere 部分多様体の概念を導入した。Austere 部分多様体は定義から特に極小部分多様体になる。最近の研究により対称空間の線形イソトロピー表現の軌道の中で球面内の austere 部分多様体になるものを分類した。さらに、我々は鏡映部分多様体の一般化として弱鏡映部分多様体という概念を導入した。Podestà は余等質性 1 の作用の特異軌道が austere 部分多様体になることを証明しているが、実質的には弱鏡映部分多様体になることを示している。同様の議論により一般に弱鏡映部分多様体が austere 部分多様体になることが分かる。また、我々は対称空間の線形イソトロピー表現から得られる austere 軌道で弱鏡映の性質を持つものを決定した (論文 [7])。

国際共同研究プロジェクト “Geometry and Visualization”

2003 年度から 2005 年度まで首都大学東京において Martin Guest 教授が代表を務める“幾何学と可視化”に関する研究プロジェクトに携わった。当研究プロジェクトでは国際共同研究によって開発を行っている 3D-XplorMath という数学の研究・教育を目的とした可視化ソフトの開発と普及に協力している。我々日本グループは特に非線形微分方程式を扱う “Lattice” カテゴリーを担当している。また、計算機を利用した幾何学研究を普及させるため、学生・大学院生向けにチュートリアルを行っている。これらの活動については次の web サイトを参照していただきたい。

TMUGS <http://tmugs.math.metro-u.ac.jp/index-j.html>