今後の研究計画

田中利史

低次元トポロジーの研究において，代数的手法を用いて多様体の幾何的性質を特徴付けることは基本的かつ非常に重要な問題である．今後の研究においては次の二つを目標とする．

目標１　Khovanov 理論を用い 4 次元多様体の幾何的構造を調べる

1984 年の論文において V. F. R. Jones は von Neumann 代数を通して，現在 Jones 多項式とよばれている結び目の重要な多項式不変量を与えた．一方，L. H. Kauffman は結び目・絡み目図式を組み合わせ的にみることで，Jones 多項式と一致する不変量を構成した．その後，2000 年の M. Khovanov の論文において Kauffman の構成は一般化され，結び目・絡み目図式より 2 次元の位相的場の理論をもちいて組み合わせ的にコホモロジーが構成され，次数つきオイラー標数が Jones 多項式に一致する絡み目の不変量が与えられた．E. S. Lee は，この Khovanov の構成における位相的場の理論の部分に修正を加え，比較的扱いやすいコホモロジーを再構成した．さらに J. Rasmussen は Lee の位相的場の理論の性質を調べることで，Lee のコホモロジーから有効な結び目のコボルディズム不変量を構成することに成功した．実際，Rasmussen はその不変量を用いることでトーラス結び目の結び目解消数（結び目をほどくための交差交換の最小数）を決定した．すなわち彼は Milnor 予想の組み合わせ的な解法を与えたのである．

私の研究目標の一つは，この Rasmussen のコボルディズム不変量を通して 4 次元多様体の幾何的構造の研究を進めることである．具体的には，Kirby の問題集における次の二つの問題を考える．

問題 1 任意の非コンパクトな可微分 4 次元多様体は非可算個の微分構造を持つか.

問題 2 任意の閉可微分 4 次元多様体は 2 個以上の微分構造を持つか.

実際，Rasmussen の不変量を用いてエキゾチックな 4 次元空間の存在を示すことができる．これは 4 次元空間のエキゾチックな微分構造の存在証明が位相的手法及び組み合わせ的手法のみを用いて与えられることを示しており，従来それがゲージ理論を通して示されてきたことを考えると驚くべきことである．私はこれまでの研究において，この Rasmussen の不変量を用いて，ある特別な Casson ハンドルの微分構造のエキゾチック性を示した．また 4 次元空間の任意の非コンパクト連結可微分 4 次元部分多様体がエキゾチックな微分構造をもつことを示した．したがって，研究のこの方向での有効性は確かであると思われるが，一方でゲージ理論を用いると，CP^2 を任意の個数連結和して得られる 4 次元多様体の非コンパクト連結可微分 4 次元部分多様体に対し，同様の結果が得られることが分かった．これらの部分多様体が無限個の微分構造を許容するかを調べることは今後の課題である．問題 1 に対しては，今後この研究を進めていくことにより，数多くの Casson ハンドルやその他の 4 次元多様体のエキゾチックな微分構造の存在証明を行うことで（部分的な）解答が与えられることを期待している．またこの手法がコンパクトな 4 次元多様体に適用できるかを調べることで問題 2 に関する研究を進めたいと思っている．さらにこのような 4 次元多様体の微分構造の特殊性は，位相的にどのようなことに基づいているのかを今後明らかにしていきたいと考えている．

目標２　量子不変量がどのような 3 次元多様体の幾何的構造を反映するかを明らかにする

結び目の色付き Jones 多項式と補空間の単体的体積（Gromov 不変量）との関係を表している体積予想は，量子不変量が多様体の幾何的構造と深く関係することを示唆している．例えば 8 の字結び目に関してはその色付き Jones 多項式のある種の極限としてその補空間の双曲体積が得られることが分かっている．私はこの予想を通して Jones 多項式と 3 次元多様体の幾何構造との関係を調べていきたいと思っている．体積予想にする研究において私は既に 2 重化結び目に対し色付き Jones 多項式の簡潔な公式を得ており，私はこの 2 重化結び目に対し研究を進めていきたいと思っている．