研究成果

渡辺　達也

自然現象を記述する微分方程式の中には、変分構造を持つものが多い。更にダイナミクスを調べる際には、解の特徴付け・形状・漸近挙動などを知らなければならないことが頻繁にある。私の研究テーマは変分構造を持つ様々な微分方程式において、解の存在・特徴付け・形状及び漸近挙動などを解析することである。

1: 特異外力項を持つ四階非線形楕円型方程式の研究

次のような四階非線形楕円型方程式を研究した。

$$\Delta^2 u - c_1 \Delta u + c_2 u = u^p + \kappa \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \delta_{a_i} \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N),\ u(x) > 0, \text{ in } \mathbb{R}^N,\ u(x) \to 0 \text{ as } |x| \to \infty \tag{1}$$

ただし $N \geq 5$, $\kappa > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_i > 0$, c_1, $c_2 > 0$ とする。また δ_{a_i} は $a_i \in \mathbb{R}^N$ に support を持つ delta 関数とする。さらに $1 < p < \frac{N}{N-4}$ かつ $c_1^2 - 4c_2 \geq 0$ を仮定する。本研究では (1) の正値解の存在・非存在及び減衰評価などを考察した (論文 [7])。四階楕円型方程式の場合、最大値原理が一般に崩れるため、解の正値性や減衰評価を得ることは容易でない。本研究では基本解の評価をうまく用いることでこの困難さを克服した。

2: 非斉次項を持つ非線形楕円型方程式の研究

次のような非線形楕円型方程式を研究した。

$$-\Delta u + u = g(u) + f(x),\ x \in \mathbb{R}^N \tag{2}$$

ただし $N \geq 3$ とし、$f(x) \geq 0$, $f(x) \not\equiv 0$ とする。本研究では一般の非線形項に対し $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ が小さい時に (2) は少なくとも二つ正値解を持つことを示した (論文 [6])。

非斉次項を持つ非線形楕円型方程式の場合、変分構造が斉次の時と比べて複雑になる。既存の結果では非線形項に凸性もしくは何らかの単調性を課し正値解の多重存在を得ていた。特に非線形項が $g(u) = |u|^{p-1}u$ もしくは convex のとき、Zhu (1991), Cao-Zhou (1996), Deng-Li (1997) らにより正値解の多重存在が得られている。

(2) に対応するエネルギー汎関数の形状を解析すると、$\|f\|_{L^2}$ が小さければ local minimizer が存在することがすぐに分かる。非線形項の凸性を用いると local minimizer の非退化性が分り、それを用いて方程式を書き換えることで、高度なエネルギー評価を必要とせずに二つ目の正値解の存在が得られる。非線形項が一般の場合、local minimizer の非退化性を証明することは非常に困難になる。本研究では非退化性を用いずに、(2) に対応するエネルギー汎関数の形状をより詳しく解析することにより、一般の非線形項に対して解の多重存在を得た。非線形項の凸性・単調性を外すことにより、生物モデルに現れる FitzHugh-Nagumo 型の非線形項にも適用できることが特色となっている。

二つ目の正値解を得るためには、local minimizer を始点とする pass を考え、Mountain Pass Theorem を適用する。しかし、Mountain Pass Theorem を用いて解を得るためには mountain pass value の評価が必要となる。この評価は interaction estimate と言われ、非線形項が convex ならば簡単に示すことができる。本研究の決め手となったことの一つは、一般の非線形項、特に非凸もしくは符号変化も許す場合においても、解の減衰評価をうまく用いて精密な漸近展開を行ったことで必要なエネルギー評価を得ることに成功したことである。

また非線形項に何の単調性も課さないため、Palais-Smale 列の有界性が一般には得られないことも難しさとして現れる。そこで本研究では Monotonicity trick と言われる手法を用いて有界な Palais-Smale 列を構成した。

3: 二次元非線形シュレディンガー方程式におけるボルテクスを持つ解の研究

次のような二次元での非線形シュレディンガー方程式を研究した。

$$-\epsilon^2 \Delta u + \left(\frac{\epsilon^2 n^2}{|x|^2} + V(x)\right) u = f(u),\ x \in \mathbb{R}^2 \tag{3}$$

ただし $n \in \mathbb{N}$、ポテンシャル $V(x)$ は球対称関数とする。この問題は Bose-Einstein 凝縮現象を記述するモデルとして現れ、自然数 n は角モーメントの固有値を意味する。

$f(u) = |u|^{p-2}u$ のとき、D'aprile (2002) によって、 (3) の球対称なエネルギー最小解は原点に凝縮することが示されていたが、その漸近的プロファイルは与えられていなかった。本研究では、Mountain Pass Theorem によって得られる (3) の球対称解の詳細な漸近的プロファイルを与えた (論文 [3])。

(3) の球対称な Mountain Pass 解 $u_\epsilon(x)$ は球対称な関数のクラスに制限することでゼロ点 (ボルテクス) を持つことがわかる。u_ϵ をスケール変換した関数の弱極限が (3) に対応する極限問題の非自明解であることを保証する

ために、u_ϵ の原点の近くでの一様各点評価を得たことが本研究の特徴である。 具体的には対応した常微分方程式の基本解を用いて解析することにより、原点の近くで u_ϵ は一様に $u_\epsilon(x) \sim |x|^n$ という挙動をすることを示した。

さらに (3) において非線形項が漸近的に線形、つまり $\frac{f(u)}{u} \to c_0 < \infty, \, u \to \infty$ の場合を研究し、解の多重存在について考察した (論文 [5])。また、元々の物理的背景からすると (3) における n は自然数でなければならないが、本研究では n を実数の範囲でどこまで小さくとれるかも考察した。ポテンシャルの特異性が強いため、球対称に制限した関数空間での critical point が (3) を弱解の意味で原点まで込めて満たすかは自明でないが、$n > \frac{1}{2}$ であれば解の原点近くでの各点評価 $u_\epsilon(x) \sim |x|^n$ が得られ、これを用いることで適切なエネルギー汎関数の critical point として (3) の解が得られることを示した。

変分問題としての難しさとしては非線形項が漸近的に線形な場合、Palais-Smale 列の有界性が一般には得られないことが挙げられる。そのため Cerami 列と言われるものを用いた Mountain Pass Theorem を適用した。その Cerami 列の有界性の証明が一番技術的に難しいところであるが、non-resonance 条件と Blow-up type の議論を用いてこの部分を克服した。

また物理学的に重要なポテンシャルである Harmonic potential つまり $V(x) = |x|^2$ の場合に c_0 が k 番目のスペクトルギャップに入っていれば少なくとも k 個の非自明解が存在することを Linking Theorem を用いて示した。Linking Theorem を適用し解の多重存在を得るためには、固有関数全体からなる閉部分空間の余次元が 0 であることを用いる。$n \geq 1$ ならば Weyl の criterion より対応する Schroödinger 作用素が自己共役であることが分かるので、一般論よりこれが従う。しかし $\frac{1}{2} < n < 1$ の場合は自己共役性がすぐには分らない。$V(x) = |x|^2$ ならば固有関数は合流型超幾何関数を用いて表せ、その具体的表現から固有空間全体からなる閉部分空間の余次元が 0 であることを示したことが証明の一つの key となっている。

4: 漸近的に線形な非線形項を持つ外部ノイマン問題の研究

$B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$ を原点を中心とした半径 R の開球とし、次のような楕円型方程式を研究した。

$$-\Delta u + u = f(u) \text{ in } \mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}, \; \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial B_R(0) \tag{4}$$

ただし n は $\partial B_R(0)$ 上の内向き単位法ベクトルとし、$N \geq 3$ とする。

Esteban (1991) によって $f(u) = |u|^{p-2}u \; (1 < p < \frac{N+2}{N-2})$ のとき方程式 (4) のエネルギー最小解が存在して、球対称でない (対称性の崩れが起こる) ことが示されている。 本研究では非線形項 $f(u)$ が漸近的に線形なときにエネルギー最小解が存在し、球対称でないことを示した (論文 [4])。

従来対称性の崩れが起こることを証明するには、非線形項の斉次性を用いるか Nehari 多様体と呼ばれるものを用いる。しかし Nehari 多様体を用いるためには非線形項に強い仮定を課す必要があり、漸近的に線形な非線形項の場合その仮定は満たされない。本研究の特徴は、Pohozaev 型の等式といわれるものを用いて、非線形項が漸近的に線形な場合に限らず、広いクラスに対して適用される証明法を構築したことである。

5: 非線形光学に現れる非線形シュレディンガー方程式の研究

次のような非線形シュレディンガー方程式を研究した。

$$-u'' + (\lambda - \chi_A(x))u = V(x)(1 - \chi_A(x))|u|^{p-1}u, \; x \in \mathbb{R} \tag{5}$$

ただし $\lambda > 1$、$p > 1$、A は $\mathbb{R}$ 内の有界区間とし、χ_A をその特性関数とする。この方程式は非線形光学における絶縁物質から成る層状媒体を通る電磁波の伝達を記述するモデルとして現れる。特に A の上では方程式が線形になるため、A は線形媒体と呼ばれる。本研究ではエネルギー最小解の対称性の崩れについて考察した。$V(x) \equiv 1$ 及び $A = [-d, d]$、$d > 0$ のとき、Arcoya ら (1999) によって (5) のエネルギー最小解は対称でないことが示されている、本研究ではこの結果を $V(x) \not\equiv 1$ 及び一般の対称な有界閉区間 A の場合へ拡張し、その場合においても対称性の崩れが起こることを示した (論文 [1])。

また次のような特異摂動問題を研究した。

$$-\epsilon^2 u'' + (\lambda - \chi_A(x))u = V(x)(1 - \chi_A(x))|u|^{p-1}u, \; x \in \mathbb{R} \tag{6}$$

本研究では一般の多重層の場合や $V(x)$ の適当な仮定のもとで、(6) のエネルギー最小解の漸近的形状について考察した (論文 [1])。非線形シュレディンガー方程式における特異摂動問題は盛んに研究されているが、 方程式 (6) においては最もシンプルな場合でもこの問題独自の結果が現れる。特に極限方程式がこれまでのものと異なった、独特なものになっている。さらに方程式 (6) において、$A = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2]$、$a_1 < b_1 < a_2 < b_2$ とし、(b_1, a_2) 内に多重ピークを持つ正値解について考察し、 方程式 (6) 独自の漸近的プロファイルを持つ多重ピーク解の構成を行った (論文 [2])。