研究計画

連絡先：y-sato（アット）sci.osaka-cu.ac.jp

これまでの研究で扱った非線形シュレディンガー方程式

$$-\epsilon^2\Delta u + V(x)u = f(u) \quad \text{in } \mathbf{R}^N \tag{$(*)_\epsilon$}$$

を始めとする様々な特異摂動問題を研究する。特に以下の 3 つの問題を考える。

1. 一次元の非線形シュレディンガー方程式の解の存在・非存在

非線形楕円型方程式

$$-u'' + V(x)u = f(u) \quad \text{in } \mathbf{R}, \quad u(x) \to 0 \text{ as } |x| \to \infty \tag{$(*)_V$}$$

を考える。ここで関数 $U(x) > 0$ に対し $V^\lambda(x) = \lambda U(\lambda x) + 1$ とおき $(*)_{V^\lambda}$ を考える。このとき $a = ||U||_{L^1(\mathbf{R})}$ とおくと、$V^\lambda(x)$ は $\lambda \to \infty$ としたとき超関数の意味でディラック関数 $a\delta$ に収束し、もし $(*)_{V^\lambda}$ のエネルギー最小解 u_λ が存在したとすれば、u_λ は $C^1_{loc}(\mathbf{R} \setminus \{0\})$ 上、

$$-u'' + a\delta u = |u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbf{R}, \quad u(x) \to 0 \text{ as } |x| \to \infty \tag{3}$$

の非自明解に収束することが容易にわかる。さらに

(i) $|a| \geq 2$ のとき、(3) は非自明解をもたない。
(ii) $|a| < 2$ のとき、(3) はただ一つ正値解をもつ。

ことがわかっている。このことから $a = ||U||_{L^1(\mathbf{R})} = ||V^\lambda||_{L^1(\mathbf{R})}$ に注意すると

(iii) $||U||_{L^1(\mathbf{R})} \geq 2$ のとき、十分大きい λ に対して $(*)_{V^\lambda}$ は非自明解をもたない。
(iv) $||U||_{L^1(\mathbf{R})} < 2$ のとき、十分大きい λ に対して $(*)_{V^\lambda}$ は少なくとも一つ正値解をもつ。

ということが予測される。つまり $(*)_V$ の解の存在・非存在の条件は $V(x)$ の積分量で表現できるのではないかと考えられる。

ここでは (iii)、(iv) の予測を検証し、さらに $V^\lambda(x) = \lambda U(\lambda x) + 1$ のように表現された $V(x)$ に限らず、$V(x)$ の積分量を用いて $(*)_V$ の解の存在・非存在の条件を記述できないかを考察する。

2. [3] で未解決だった問題の解決

[3] において、$(L)_{\Omega_1}$ のエネルギー最小解と $(L)_{\Omega_2}$ のエネルギー最小解を繋ぐ解を構成することができた。そこで、$(L)_{\Omega_1}$ のエネルギーの大きな解と $(L)_{\Omega_2}$ のエネルギーの大きな解を繋ぐような解を構成する。ここでいうエネルギーの大きな解とは、対応する汎関数の $\mathbf{Z}_2$ 対称性に着目した高次のミニマックス値によって特徴付けられる解である。

この問題の難しさは、極限方程式に対応する汎関数は $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ 対称性を持つのに対し、もとの問題 $(*)_\lambda$ に対応する汎関数が $\mathbf{Z}_2$ 対称性しか持たないという対称性の崩れにある。ここで、汎関数 $I(u,v)$ が $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ 対称性をもつとは次を満たすことである：

$$I(u,v) = I(\pm u, \pm v) \quad \text{for all } u, v$$

問題点をより明確にし克服するために、まずは似たような問題として、次のような連立非線形シュレディンガー方程式を考える。

3. 連立非線形シュレディンガー方程式の解の多重性への応用

次の連立非線形シュレディンガー方程式を考える;

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= u^3 + \epsilon F_u(u,v) \quad \text{in } \mathbf{R}^3, \\ -\Delta v + v &= v^3 + \epsilon F_v(u,v) \quad \text{in } \mathbf{R}^3. \end{aligned} \tag{$(4)_\epsilon$}$$

ここで $F(u,v)$ は $F(u,v) = u^2v^2$ を具体例とするようなクラスの関数とし、$\epsilon > 0$ はパラメータとする。この方程式において ϵ を 0 に十分近づけると $(4)_\epsilon$ の解は独立な方程式

$$-\Delta u + u = u^3 \quad \text{in } \mathbf{R}^3, \tag{5}$$

$$-\Delta v + v = v^3 \quad \text{in } \mathbf{R}^3. \tag{6}$$

の解に近づくことがわかる。このとき符号変化を許せば (5)、(6) はそれぞれ可算無限個の解をもつこともわかる。そこで、与えられた (5)、(6) の解のペアの近い $(4)_\epsilon$ の解を構成できるか、という問題を考える。今、極限方程式 (5)、(6) をシステムと思えば、対応する汎関数は $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ 対称性を持っており状況は [3] と似ている。