これまでの研究成果

連絡先：y-sato（アット）sci.osaka-cu.ac.jp

私はこれまで非線形楕円型偏微分方程式、特に非線形シュレディンガー方程式

$$-\epsilon^2\Delta u + V(x)u = f(u) \quad \text{in } \mathbf{R}^N \tag{$(*)_\epsilon$}$$

の特異摂動問題を中心に研究してきた。ここで $(*)_\epsilon$ の特異摂動問題とはパラメータ $\epsilon > 0$ を 0 に近づけていく時の $(*)_\epsilon$ の解の多重存在やその解の形状を研究する問題である。この方程式は、パラメータ $\epsilon > 0$ が十分小さいとき、非負のポテンシャル関数 $V(x)$ の１つあるいは複数の臨界点の十分近くに解の極大点（あるいは極小点）があり、それ以外の点では 0 に近い形状をした解 u_ϵ をもつことが知られている。以下、このような解をピーク解を呼ぶことにする。また、１つの極大点をもつ解をシングルピーク解、複数の極大点をもつ解をマルチピーク解と呼ぶ。このピーク解に関しては次のことが分かっている。

1. ある点の近くにピークをもつ解が存在するとしたら、それは $V(x)$ の臨界点でなければならない。
2. もしマルチピーク解が存在すれば、その解の形状は各臨界点の周りではシングルピーク解に近い形状をしている。

そこで、逆に $V(x)$ **の指定された１つあるいは複数の臨界点の近くにピークをもつようなような解が構成できるか**、という問題は特異摂動問題の基本的な問になっている。この問題は、マルチピーク解に着目すると、**指定されたシングルピーク解を繋ぐようなマルチピーク解は構成できるか**、と言い換えることもできる。

従来の研究では、マルチピーク解を構成する場合、各ピークの形状が同種のものを扱う場合が多かった。私の研究の特徴の一つは、各ピークの形状が本質的に異なるようなマルチピーク解を構成しているところにある。他の方程式に対する特異摂動問題のマルチピーク解の研究でも各ピークの形状が同種のものを扱うことが多く、私の研究結果は他の特異摂動問題の中においても特徴的な研究結果となっている。以下、私の研究結果 (論文リストの論文 [1]〜[3]) を詳しく述べていく。

- **[1] の研究.** Byeon-Wang は、$V(x)$ の極小点の近くにピークをもつシングルピーク解は、その $V(x)$ の極小値が正であるか 0 であるかによって、その解の形状が全く異なることを示している。実際、$V(x)$ の極小値が 0 となる場合、その近くに形成されるピークの形状、大きさは、その極小点における $V(x)$ の退化の仕方によって本質的に異なることを考察している。

[1] では $f(u) = |u|^{p-1}u$ のとき, $V(x)$ の極小値が正であるか、0 であるかにかかわらず、与えられた $V(x)$ の複数の極小点にピークをもつようなマルチピーク解 u_ϵ を構成した。これは、Byeon-Oshita が同様な解の構成のときに必要とした極限方程式の存在の仮定や、不自然な指数 p の制限を取り除いており、与えられた非負の $V(x)$ の極小点の近くにピークをもつマルチピーク解を構成する問題をほぼ完全に解決している。

- **[2] の研究.** $(*)_\epsilon$ の解については、$V(x)$ の値が正である場合、一つの極小点には一つの正のピークしか形成されないことが Wang によって考察されている。一方で Alves–Soares は $V(x)$ の値が正である場合に、$V(x)$ の同じ極小点の近くに正のピークと負のピークを形成する解の存在を示している。[2] の研究結果は $V(x) = 0$ となる極小点の近くにも、正と負のピークをもつような解 u_ϵ を構成したことである。また [2] では、Alves–Soares の証明にあったギャップを埋めるような証明を与えている。

- **[3] の研究.** 私と田中和永教授（早稲田大学）の共同研究 [3] では方程式

$$-\Delta u + (\lambda^2 a(x) + 1)u = |u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbf{R}^N, \quad u \in H^1(\mathbf{R}^N) \tag{$(*)_\lambda$}$$

を研究している。この $(*)_\lambda$ では、パラメータ λ を限りなく大きくすることが、$(*)_\epsilon$ において ϵ を 0 に近づけることに対応する。

[3] ではポテンシャル関数 $V(x) = \lambda^2 a(x) + 1$ の底を $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^N; \, a(x) = 0\}$ とおくとき、Ω が二つの連結な成分 Ω_1, Ω_2 から成る場合を考察している。$(*)_\lambda$ のエネルギー有界な解は、Ω の外では 0 に近づき、各 Ω_i においてはディリクレ問題 $(L)_{\Omega_i}$ $-\Delta u + u = |u|^{p-1}u \quad \text{in } \Omega_i, \, u \in H_0^1(\Omega_i)$ の解に近づいていくことがわかる。一方で、$(L)_{\Omega_i}$ は高次のミニマックス法等を使うことにより無限個の解を持つことも知られている。そこで [3] では、与えられた $(L)_{\Omega_i}$ の解のペアを繋ぐような $(*)_\lambda$ のマルチピーク解を構成できるか、という問題を考え部分的ではあるが答えを得ている。

[3] で得た部分的な答えとは、λ を限りなく大きくしたとき、$(L)_{\Omega_1}$ のエネルギー最小解と $(L)_{\Omega_2}$ におけるネルギーの大きな解を繋ぐような解 u_λ を構成したことである。また、そのような解の個数は λ と共に限りなく大きくなることも示している。このような意味でのエネルギーの大きさの異なるマルチピーク解の構成の研究は他にはなく、この論文の大きな特徴になっている。