研究計画

氏名：佐藤洋平
連絡先：y-sato（アット）sci.osaka-cu.ac.jp

これまでの研究で扱った非線形シュレディンガー方程式

$$-\epsilon^2\Delta u + V(x)u = f(u) \quad \text{in } \mathbf{R}^N \tag{$*$}_\epsilon$$

を始めとする様々な特異摂動問題を研究する。特に以下の 3 つの問題を考える。

1．一次元の非線形シュレディンガー方程式の解の存在・非存在

非線形楕円型方程式

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) \quad \text{in } \mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \quad u(x) \to 0 \text{ as } |x| \to \infty \tag{$*$}_V$$

において、正のポテンシャル関数 $V(x)$ が、$\lim_{|x|\to\infty} V(x) = 1$、$\limsup_{|x|\to\infty} V(x)e^{-\beta|x|} \le 0$ $(\beta > 2)$ を満たす場合を考える。[4] では、空間次元が一次元のとき、$\int_{-\infty}^{\infty} V(x)e^{2|x|}\,dx < 2$ を満たすならば、$(*)_V$ は非自明解をもつことを示し、$\int_{-\infty}^{\infty} V(x)e^{2|x|}\,dx < 2$ を満たさないようなある $V(x)$ に対して、$(*)_V$ が非自明解をもたないことを示した。

本研究では $\int_{-\infty}^{\infty} V(x)e^{2|x|}\,dx < 2$ が $(*)_V$ の解の存在・非存在の条件を分ける精密な条件であるのかどうかを含め、$(*)_V$ の解の存在・非存在の条件について考察する。

2．[3] で未解決だった問題の解決

[3] において、$(L)_{\Omega_1}$ のエネルギー最小解と $(L)_{\Omega_2}$ のエネルギー最小解を繋ぐ解を構成することができた。そこで、$(L)_{\Omega_1}$ のエネルギーの大きな解と $(L)_{\Omega_2}$ のエネルギーの大きな解を繋ぐような解を構成する。ここでいうエネルギーの大きな解とは、対応する汎関数の $\mathbf{Z}_2$ 対称性に着目した高次のミニマックス値によって特徴付けられる解である。

この問題の難しさは、極限方程式に対応する汎関数は $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ 対称性を持つのに対し、もとの問題 $(*)_\lambda$ に対応する汎関数が $\mathbf{Z}_2$ 対称性しか持たないという対称性の崩れにある。ここで、汎関数 $I(u,v)$ が $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ 対称性をもつとは次を満たすことである：

$$I(u,v) = I(\pm u, \pm v) \quad \text{for all } u, v$$

問題点をより明確にし克服するために、まずは似たような問題として、次のような連立非線形シュレディンガー方程式を考える。

3．連立非線形シュレディンガー方程式の解の多重性への応用

次の連立非線形シュレディンガー方程式を考える;

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= u^3 + \epsilon F_u(u,v) \quad \text{in } \mathbf{R}^3, \\ -\Delta v + v &= v^3 + \epsilon F_v(u,v) \quad \text{in } \mathbf{R}^3. \end{aligned} \tag{4}_\epsilon$$

ここで $F(u,v)$ は $F(u,v) = u^2v^2$ を具体例とするようなクラスの関数とし、$\epsilon > 0$ はパラメータとする。この方程式において ϵ を 0 に十分近づけると $(4)_\epsilon$ の解は独立な方程式

$$-\Delta u + u = u^3 \quad \text{in } \mathbf{R}^3, \tag{5}$$

$$-\Delta v + v = v^3 \quad \text{in } \mathbf{R}^3. \tag{6}$$

の解に近づくことがわかる。このとき符号変化を許せば (5)、(6) はそれぞれ可算無限個の解をもつこともわかる。そこで、与えられた (5)、(6) の解のペアの近い $(4)_\epsilon$ の解を構成できるか、という問題を考える。今、極限方程式 (5)、(6) をシステムと思えば、対応する汎関数は $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ 対称性を持っており状況は [3] と似ている。