これまでの研究成果

氏名： 佐藤 洋平
連絡先：y-sato（アット）sci.osaka-cu.ac.jp

私はこれまで非線形楕円型偏微分方程式、特に非線形シュレディンガー方程式

$$-\epsilon^2\Delta u + V(x)u = f(u) \quad \text{in } \mathbf{R}^N \qquad (*)_\epsilon$$

の特異摂動問題を中心に研究してきた。ここで $(*)_\epsilon$ の特異摂動問題とはパラメータ $\epsilon > 0$ を 0 に近づけていく時の $(*)_\epsilon$ の解の多重存在やその解の形状を研究する問題である。この方程式は、パラメータ $\epsilon > 0$ が十分小さいとき、非負のポテンシャル関数 $V(x)$ の１つあるいは複数の臨界点の十分近くに解の極大点（あるいは極小点）があり、それ以外の点では 0 に近い形状をしたピーク解をもつことが知られている。

このピーク解に関しては次のことが分かっている。

(i) ある点の近くにピークをもつ解が存在するとしたら、それは $V(x)$ の臨界点でなければならない。

(ii) もしマルチピーク解が存在すれば、その解の形状は各臨界点の周りではシングルピーク解に近い形状をしている。

そこで、逆に $V(x)$ **の指定された１つあるいは複数の臨界点の近くにピークをもつようなような解が構成できるか**、という問題は特異摂動問題の基本的な問になっている。

従来の研究では、マルチピーク解を構成する場合、各ピークの形状が同種のものを扱う場合（集中する各ピークの極限が同じ極限方程式のエネルギー最小解になっている場合）が多かった。私の **[1]**〜**[3]** の研究の特徴の一つは、各ピークの形状が本質的に異なるようなマルチピーク解を構成しているところにある。

- [**1**] **の研究.** 本研究では $f(u) = |u|^{p-1}u$ のとき, $V(x)$ の極小値が正であるか、0 であるかにかかわらず、与えられた $V(x)$ の複数の極小点にピークをもつようなマルチピーク解 u_ϵ を構成した。これは、Byeon-Oshita が同様な解の構成のときに必要とした極限方程式の存在の仮定や、不自然な指数 p の制限を取り除いており、与えられた非負の $V(x)$ の極小点の近くにピークをもつマルチピーク解を構成する問題をほぼ完全に解決している。

- [**2**] **の研究.** 本研究では、$V(x) = 0$ となる極小点の近くにも、正と負のピークをもつような解 u_ϵ を構成した。またここでは、Alves–Soares の証明にあったギャップを埋めるような証明を与えている。

- [**3**] **の研究.** 本研究では、$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^N; V(x) = 0\}$ とおくとき、Ω が二つの連結な成分 Ω_1, Ω_2 から成る場合を考察し、Ω_1 においては極限方程式のエネルギー最小解に近づき、Ω_2 においては極限方程式のエネルギーの大きな解に近づくような解を構成した。また Ω が複雑な形状をしているとき、Lusternik-Schnirelman のカテゴリーを用いて $\mathrm{cat}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ 個のマルチピーク正値解が存在することも示した。

また私の最近の研究では $(*)_\epsilon$ のような特異摂動問題だけでなく、以下のような一次元の非線形シュレディンガー方程式の非自明解の存在・非存在についての研究結果を得ている。

- [**4**] **の研究.** 本研究では、$(*)_\epsilon$ において、$\epsilon = 1$ としたときの一次元の非線形シュレディンガー方程式を考え、$V(x)$ の形によって解が存在する場合と、存在しない場合が分かれる事を示した。本研究の特徴は、高次元のときは同じ条件の下では常に非自明解が存在するが、一次元の場合は、非自明解が存在する場合と、存在しない場合があるという結果を得ているところである。

[**1**] *"Multi-peak positive solutions for nonlinear Schrödinger equations with critical frequency", Calc. Var. Partial Differential Equations* **29**, *365-395, July, (2007).*

[**2**] *"Sign-changing multi-peak solutions for nonlinear Schrödinger equations with critical frequency", Communications on Pure and Applied Analysis,* **7**, *883-903, July, (2008).*

[**3**] *"Sign-changing multi-bump solutions for nonlinear Schrödinger equations with steep potentail wells", Trans. Amer. Math. Soc.* **361**, *p6205-6253, July (2009).*

[**4**] *"The existence and non-existence of the non-trivial solutions of the nonlinear Schr?dinger equations for one dimensional case"*, 投稿中