研究成果

森内博正

n 個の円周 $S^1 \cup \cdots \cup S^1$ の 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ や 3 次元球面 S^3 への埋め込みを絡み目といい, 特に $n=1$ のときを結び目という. 古典的結び目理論の一般化として, 様々な対象の埋め込みについて研究がなされている. そのうち, 空間グラフとはグラフ G の $\mathbf{R}^3$ や S^3 への埋め込みのことである. G が 2 つの頂点とそれらをつなぐ 3 本の辺から構成されるとき, その空間グラフを θ-曲線という. また, G が 2 本のループと, それぞれのループ上に存在する頂点をつなぐ 1 本の辺から構成されるとき, その空間グラフを手錠グラフという.

結び目の研究の大きな問題として分類問題がある. すなわち, 2 つの結び目が与えられた際にそれらが同値かどうかを調べるというものである. そして, アンビエントアイソトピーでの同値関係による分類で, 結び目および絡み目の表をつくるという研究がある. 同様に, 空間グラフ理論においても表を作るという研究が存在する. 特に θ-曲線に関しては, 1987 年に J. Simon によって 5 交点以下, 1989 年に R. A. Litherland によって 7 交点以下, 1990 年に T. Harikae によって 9 交点以下の特殊なものの表が作成されてきた. しかし, 1989 年の Litherland による 7 交点以下の素な θ-曲線の表は個人的な手紙に書かれていて, 公式の論文としては発表されておらず, 7 交点以下の素な θ-曲線が全て挙げられているかどうかについては証明されていなかった.

そこで, 私は空間グラフを $\mathbf{R}^2$ 上の正則射影図として全て数え上げた後に分類するという方法をとった. そのヒントとなったのが, 1969 年の J. H. Conway によるタングルと基本多面体という概念を用いた方法である. Conway は手作業によって 11 交点以下の素な結び目と 10 交点以下の素な絡み目の表を作成した. ここで, タングルとは 3 次元球体 B^3 と B^3 内のプロパーな 1 次元多様体 t（ただし t の境界は空集合でないとする）の対 (B^3, t) の $\mathbf{R}^2$ への正則射影図のことで, 基本多面体とは 2 辺形を持たない, 4 価の平面グラフのことである. 基本多面体の頂点に代数タングルとよばれる特殊なタングルを代入することで結び目が得られるという Conway の表示法を利用すると, 交点の少ないものから順に結び目および絡み目を数え上げられる.

Conway の表示法を応用して θ-曲線の $\mathbf{R}^2$ 上の正則射影図を全て数え上げるために, 以下の 2 つの仕事が必要である. 第 1 に, 代数タングルの表が必要である. これについては 1980 年に Y. Nakanishi によって 6 交点以下の代数タングルは分類されていたので, それを 7 交点までに発展させた（論文リスト [4] 参照）. 第 2 に, Conway の基本多面体に代わる, 3 価頂点が 2 個で他の頂点は全て 4 価の平面グラフ (θ-多面体) の表が必要である. これについては先行した結果が無かったので, 基本的な θ-多面体を数え上げた. その後, 素で基本的な θ-多面体の 4 価頂点に代数タングルを代入することで, 7 交点以下の素な θ-曲線の $\mathbf{R}^2$ 上への正則射影図を全て数え上げることに成功した. その結果として, Litherland の表が完全であるということを証明した. Litherland は分類の際に Alexander 多項式を利用しているが, それらは山田多項式でも分類可能なことが分かった（論文リスト [5] 参照）. さらに, 私は同様の手法を用いることにより, 7 交点以下の素な手錠グラフの表を初めて完成させた. それらも山田多項式で分類可能なことが分かった（論文リスト [3] 参照）.

2 つの空間 3 価グラフに対して, それぞれの頂点を固定すると頂点連結和によって最大 6 種類の素でない空間 3 価グラフが得られる. 私は素でない θ-多面体を用いて, 7 交点以下の素でない θ-曲線と手錠グラフの数え上げも行なった. 頂点連結和における性質から, Alexander 多項式や山田多項式は素でない θ-曲線と手錠グラフで完全に分類するのは不可能である. 6 交点以下の素でないものに関しては, 絡み目成分を観察することで完全に分類できた. さらに, この結果から空間 3 価グラフの近傍同値とほぼ同じ「ハンドル体結び目」についての 6 交点以下の分類表を掲載した A. Ishii, K. Kishimoto, M. Suzuki との共著論文がある（論文リスト [7] 参照）.

Kinoshita の θ-曲線 $\theta(1,1,1)$ は局所自明な θ-曲線として知られている. Kinoshita の θ-曲線にひねりを付け加えることで一般化した θ-曲線 $\theta(i,j,k)$ にはある対称性が存在する. θ-曲線 $\theta(i,j,k)$ がいつアンビエントアイソトピックになるのかを絡み目の不変量である Kojima-Yamasaki η-function の簡約化に相当する多項式不変量の多重集合を用いることによって示した. さらに, 2 つの θ-曲線 $\theta(i,j,k)$ および θ-曲線 $\theta(i',j',k')$ の頂点連結和についてもその多重集合を用いることで分類した.