研究成果

(1) GKM 理論の Morse 理論からの理解に向けて, コンパクト多様体上の不変 Morse-Smale 関数について, 安定多様体と不安定多様体の交差の観点から研究した. この状況では Morse 指数の差が 1 になる臨界点対が存在しないことが多い. そこで, Morse 指数の差が 2 となる臨界点対に対応する交差についてその構造を調べ, 各連結成分が標準的な円周作用をもつ 2 次元球面と同変微分同相になることを証明した. この状況では固定点集合と臨界点集合が一致するため, GKM 理論と類似の状況が現れることが分かる.

(2) 通常の絡み目の類似物である混合絡み目について研究した. 混合絡み目に対し Alexander 多項式を定義し, ソリッド・トーラスに絡んでいる部分をほどいて得られる通常の絡み目の Alexander 多項式との間のある関係式を証明した.

(3) コンパクト・Lie 群のコンパクト多様体への滑らかな作用であって, 固定点集合が有限のものを考える. 固定点で添字付けられた開被覆であって, その各開集合が群作用不変かつ対応する固定点での接表現に同変微分同相であることを「表現被覆 (representation covering)」と呼ぶことにする.

本研究において, 閉多様体上にある収束性をみたす同変双曲微分同相が存在ならば, その上に表現被覆が存在することを証明した. 系として, 元の多様体上の不変 Morse 関数の存在が表現被覆の存在を導くことが従う. 逆にいえば, 表現被覆の存在は不変 Morse 関数の存在のための障害を与えていることが分かる. これに加えて, 上記の結果の逆として, Lie 群がコンパクト・トーラスで多様体が複素多様体の場合に表現被覆の存在がある種の同変双曲微分同相の存在を導くことを証明した.

さらに, この結果を用いることにより, トーラス多様体であってそのトーラス作用に関して不変 Morse 関数をもたないものが無数に存在することが分かった. これはよく知られた Morse 関数の存在定理や, Wasserman によるある種の不変 Bott-Morse 関数の存在定理とは対照的である.