これまでの研究業績の概要

安部哲哉

• 研究の背景

1960 年代に、Fox と Milnor は（多様体のコボルディズム群のアナロジーとして）結び目コンコーダンス群を導入しました。この群の構造を解明する事は、結び目理論、特に、結び目コンコーダンス理論の基本的な課題です。このページでは、結び目コンコーダンス群の定義を説明します。その後で、私の研究テーマである「スライス・リボン予想」について、結び目コンコーダンス群の観点から説明します。以下では滑らかなカテゴリーで考えます。

「結び目コンコーダント」と呼ばれる（結び目全体の集合上の）同値関係の説明から始めます。3 次元球面 S^3 内の結び目 K_0 と K_1 が与えられたとします。まず、S^3 の自明なコボルディズム

$$S^3 \times [0,1]$$

を考えます。次に、K_0 を（S^3 ではなく）$S^3 \times \{0\}$ 内の結び目、K_1 を（S^3 ではなく）$S^3 \times \{1\}$ 内の結び目とみなします。この設定の下、結び目 K_0 と K_1 が **結び目コンコーダント**とは、結び目 K_0 と K_1 が $S^3 \times [0,1]$ の中でアニュラスで結ばれるときに言います。結び目コンコーダントは（結び目全体の集合上の）同値関係になります。**結び目コンコーダンス群**は、結び目全体をコンコーダントで割った集合に（結び目の連結和を用いて）アーベル群の構造を入れたものです。

日本では、結び目コンコーダンス理論の研究が盛んではありません。2013 年、私と丹下氏（筑波大学）は、日本の結び目コンコーダンス理論を盛り上げるために、研究集会「Mini-workshop on knot concordance」を開催しました（詳しくは、研究業績リスト参照）。この研究集会のテーマの一つは、私が研究している「スライス・リボン予想」でした。ここで「スライス・リボン予想」とは、結び目コンコーダンス群の単位元（の代表元）に関する、基本的な予想の事です。以下では、結び目コンコーダンス群に言及しない、スライス・リボン予想の定式化を説明します。

まず 4 次元球体 B^4 を考え、以下では B^4 の境界 ∂B^4 と S^3 を同一視します。**スライス・リボン予想**とは

S^3 内の結び目 K が B^4 で円板を張るとき、結び目 K は B^4 でリボン円板も張るだろう

という予想です。リボン円板とは、B^4 に埋め込まれた円板で（極小曲面のように）ある種の極小性を持つもののことです。（リボン円板の定義は「今後の教育の抱負」で述べます。）
以下では、論文 [1, 2, 3] の概要を説明します。

1. スライス・リボン予想の研究（反例候補の構成）

近年、Heegaard Floer homology 理論のおかげで「スライス・リボン予想は、よく知られた結び目のクラスに対して正しい」という事が、証明されました。

• スライス・リボン予想の反例候補

一方、2010 年、Gompf, Scharlemann, Thompson により、スライス・リボン予想の（信憑性のある）反例候補が構成されました。ここで、スライス・リボン予想の反例候補とは

4 次元球体 B^4 で（非自明な形で）円板を張る S^3 内の結び目

のことです。これらの結び目は、リボン円板を張らない可能性があるので、スライス・リボン予想の反例になり得る、という意味です。

上述の研究に引き続き、私と丹下氏（筑波大学）は、論文 [1] において、スライス・リボン予想の反例候補を（容易にしかも大量に）作る技術を確立しました。この研究の特徴は、**「アニュラスツイスト」**と呼ばれる（3 次元多様体論でのみ用いられてきた）結び目改変操作をスライス・リボン予想の研究に応用した点です。今後の課題は、これらの反例候補がスライス・リボン予想の反例なのかどうか、を確定させることです。

2. スライス・リボン予想の二つの帰結

（スライス・リボン予想の真偽はともかく）私と田神氏（東京理科大学）は、論文 [2] において、スライス・リボン予想の帰結を二つ示しました。

一つ目の帰結は、もしスライス・リボン予想が正しいならば（デーン手術と結び目コンコーダンスに関する）Akbulut 予想に反例が存在する、というものです。この研究の特徴は、**「アニュラスツイスト」**の（前述の研究以外の）スライス・リボン予想への応用を見つけた点です。

その後（私達の結果を聞いた）安井氏（広島大学）が Akbulut 予想の反例を与えました。反例の構成では、4 次元多様体論の手法が用いられました。この結果により、結び目コンコーダンス理論と 4 次元多様体論の関係は深まりました。また、スライス・リボン予想の信憑性が増しました。

もう一つの帰結は、スライス・リボン予想が正しければ、素な「タイト結び目[1]」全体が（結び目コンコーダンス群の中で）線形独立になる、というものです。この定理[2]は（結び目コンコーダンス群の単位元の性質に関する）スライス・リボン予想が、結び目コンコーダンス群全体の構造に強い制限を与える、という意味で興味深いです。この定理は

スライス・リボン予想が正しい時、タイト結び目 K_0 と K_1 がコンコーダントならば $K_0 = K_1$

とも書けます（Baker の定理）。

今後の課題は、スライス・リボン予想の研究において、何故、**接触幾何学**に関係するもの（つまり S^3 のタイト接触構造）が登場したのか、を解明することです。また、上の主張を証明する枠組みを構築することです。

3. アニュラスツイストの拡張とその応用

デーン手術は 3 次元多様体を構成する最も基本的な方法の一つです。実際、任意の（向き付け可能な連結）閉 3 次元多様体は絡み目に沿ったデーン手術で得られます。つまり、閉 3 次元多様体は（枠付き）絡み目で表現されます。一方、この表示は（２成分以上の絡み目を用いると）任意性があることが知られています。

R. Kirby が編集した低次元トポロジー問題集の問題 3.6(D) では、以下が問われました。

問題 3.6(D)：n を整数とする。このとき、相異なる無限個の結び目の n-手術が同じ 3 次元多様体を表すものを見つけよ。

[1] S^3 内の（ファイバー）結び目で（古典的な Thurston-Winkelnkemper 対応により）S^3 のタイト接触構造が対応するものです。

[2] 本質的には、Casson-Gordon, 宮崎氏（東京電気大学）, Baker の仕事を reformulate した定理です。

論文 [3] において、私と鄭仁大氏（近畿大学)、Luecke 氏、Osoinach 氏は、アニュラスツイストの手法を 2 通りの方法で拡張しました。特に、問題 3.6(D) を完全に解決しました。また、対応する 4 次元多様体に関する問題も完全に解決しました。