これまでの研究成果のまとめ

河村　建吾

(1) 結び目のクラスプ数について

クラスプ数とは 1970 年代に定義された結び目の不変量であるが，クラスプ数についての研究はあまり進展がみられなかった．私は門上晃久氏との共同研究において，素な結び目のクラスプ数の決定を試みた．通常，クラスプ数の決定は，結び目種数と結び目解消数による下からの評価式を利用する．この方法から決定できない場合に対処するために，結び目のコンウェイ多項式に注目した．我々はクラスプ数が 2 以下である結び目のコンウェイ多項式の代数的な性質を調べることで，従来の方法からは決定できない素な結び目が無限個存在することを証明した．

(2) 埋め込み曲面結び目のダイアグラムとローズマン変形

埋め込み曲面結び目とは，$\mathbb{R}^4$ 内に埋め込まれた閉曲面のことである．埋め込み曲面結び目の $\mathbb{R}^3$ への射影像（に上下の情報を加えたもの）をダイアグラムという．ローズマンによって，埋め込み曲面結び目の同値関係を生成する，ダイアグラムの 7 種類の局所変形（ローズマン変形という）が導入された．私は埋め込み曲面結び目のダイアグラムの幾何的な情報に注目することで，7 種類のローズマン変形の ‘局所変形としての’ 独立性の問題を完全に解決した．さらに田中心氏と大城佳奈子氏との共同研究では，四面体変形と呼ばれるローズマン変形の ‘大域変形としての’ 独立性についての結果も得ることができた．

(3) リボン・クラスプ型のはめ込み曲面結び目について

リボン交差のみを持つように $\mathbb{R}^4$ 内にはめ込まれたハンドル体の境界は埋め込み曲面結び目となり，このような埋め込み曲面結び目をリボン型という．鎌田聖一氏との共同研究において，3 次元のクラスプ交差を 4 次元版に拡張することで，リボン・クラスプ型のはめ込み曲面結び目を新しく導入した．ここで，はめ込み曲面結び目がリボン・クラスプ型であるとは，それがリボン交差とクラスプ交差のみを持つように $\mathbb{R}^4$ 内にはめ込まれたハンドル体の境界となるときをいう．我々はリボン型の埋め込み曲面結び目について成り立つ幾何的な性質の類似が，リボン・クラスプ型のはめ込み曲面結び目に対しても成り立つことを証明した．

(4) はめ込み曲面結び目のカンドルコサイクル不変量

埋め込み曲面結び目のダイアグラムに対して，通常のカンドルホモロジーの 3 コサイクルに付随する状態和を計算できる．この状態和は埋め込み曲面結び目の不変量（カンドルコサイクル不変量という）となっている．私ははめ込み曲面結び目についてのカンドルコサイクル不変量を導入するために，新たなカンドルホモロジーを構成した．はめ込み曲面結び目のダイアグラムに対して，通常のカンドル 3 コサイクルに付随する状態和は，はめ込み曲面結び目の不変量とはならないが，新しく導入したカンドル 3 コサイクルを用いればはめ込み曲面結び目の不変量となる．

(5) はめ込み曲面結び目の 3 重点数について

はめ込み曲面結び目とは，$\mathbb{R}^4$ 内にはめ込まれた閉曲面のことであり，いくつかの自己交差点を持っている．はめ込み曲面結び目 F の 3 重点数とは，F と同値なすべてのはめ込み曲面結び目のダイアグラムについて，それらの 3 重点の個数の最小値のことである．佐藤進氏は 3 重点数が 1,2 または 3 となる埋め込み球面結び目が存在しないことを証明した．私は，自己交差点を 1 個持つはめ込み球面結び目についても，同様な結果が成り立つことを証明した．