今後の研究計画

河村建吾 (Kengo Kawamura)

(1) 2 次元結び目のアレクサンダー行列とアレクサンダー多項式について

結び目の補空間の基本群の表示として Wirtinger 表示を使用すれば，アレクサンダー行列は $(n-1)\times n$ 行列となり，任意の 1 列を除いた $(n-1)\times(n-1)$ 行列の行列式をとると，それはその結び目のアレクサンダー多項式となる．このような行列操作は石井敦氏と大城佳奈子氏の最近の研究によって定式化されており，彼らは，正方でない行列とその行と列の関係から正方行列を得る理論を構築した (A. Ishii and K. Oshiro, *Augmented Alexander matrices and generalizations of twisted Alexander invariants and quandle cocycle invariants*, preprint.)．この理論により，2 次元結び目のように，アレクサンダー行列が一般の行列となる場合でも "行列式" を取ることができるので,（アレクサンダー多項式に関連する）2 次元結び目の不変量を導出できることが期待される．したがって，この理論を基盤とした 2 次元結び目のアレクサンダー多項式の研究に取り組む（大城氏との共同研究）.

(2) ある 2 次元結び目の同値性の一般化

与えられた二つの 2 次元結び目が同値であるかどうかを判定することは，2 次元結び目理論において重要な問題である．2 次元結び目の不変量をうまく選べば，二つの 2 次元結び目が同値でないことが証明できる．一方，二つの 2 次元結び目が同値であることを証明するには，それらが同値変形で移り合うことを確かめればよい．しかし，与えられた二つの 2 次元結び目が同値であると知っていたとしても，実際に変形させることは容易ではない.

現在までに，1 次元結び目から 2 次元結び目を構成するさまざま方法が開発されており，異なる方法で構成した 2 次元結び目が同値になる例がいくつか知られている．例えば，3 ツイストスパン 3 葉結び目 $\tau^3(3_1)$ はハーフロールスパン 8 の字結び目 $\rho^{\frac{1}{2}}(4_1)$（Fox のローリング）に同値であることが示されている．この証明のポイントは，3 葉結び目と 8 の字結び目の類似性や対称性を利用することである．したがって，この証明方法を一般化して同じような例の構成を試みる.

(3) 曲面結び目の bridge trisection について

4 次元多様体の trisection とは，4 次元多様体を 3 つの 4 次元ハンドル体の和に分解することであり，3 次元多様体の Heegaard 分解の一般化となっている．最も簡単な例では，4 次元球面 S^4 は 3 つの 4 次元球体 B^4 の和に分解することができる．S^4 内の曲面結び目をこの trisection で切り分けると，曲面結び目を 3 つの自明な円板族に分解することができる．これを曲面結び目の bridge trisection という．そして，曲面結び目の bridge trisection から bridge number と呼ばれる曲面結び目の不変量が定義される.

曲面結び目の bridge trisection は Meier と Zupan によって導入された (Bridge trisections of knotted surfaces in S^4. Trans. Amer. Math. Soc., 2017)．彼らは，スパン 2 次元結び目やツイストスパン 2 次元結び目の bridge trisection を構成し，その bridge number を研究した．その結果，いくらでも大きな bridge nubmer を持つような 2 次元結び目が無限に存在することを証明した．彼らの仕事から，その他の具体的な 2 次元結び目についても同じような結果が得られることが期待される．したがって，リボン 2 次元結び目やロールスパン 2 次元結び目の bridge trisection と bridge number に関する研究に取り組む．また，bridge trisection から曲面結び目の不変量を計算する方法の開発に取り組む.