大阪市立大学数学研究所　関 行宏

1　これまでの研究の概要

多方面で研究される非線形偏微分方程式はある対称性を持ち, **スケール変換** ($\mathbf{R}_+$ 全体からなる乗法群の作用) に関して不変な形をとる．例えば藤田方程式 $u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u\,(p>1)$ であれば一つの解 u にスケール変換

$$u \mapsto u_\lambda(x,t) = \lambda^{1/(p-1)}u(\lambda x, \lambda^2 t) \qquad (\lambda > 0)$$

を施すことによって解の族 $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ を得ることができる．スケール変換に関して不変な解を**自己相似解**と呼び, 方程式の特徴を端的に述べるとと共に一般の解の挙動を予見させる．1990 年代までは爆発解の研究はスケール構造に即した Type I 爆発解に対するものが殆どであったが, 2000 年以降は特異点付近での形状が自己相似的でない解 (**Type II 爆発解**) も研究されるようになった．近年では Type II 爆発解は**走化性粘菌の集中現象**の解析において中心的役割を果たすことが明らかにされ, 解の全体構造を理解する上で避けられない重要な数学的対象となっている．その全容解明は未だ遠く, 典型例を通して理解して行くことが現実的な課題である．私の研究は様々な問題において **Type II 爆発解の分類**を行うことによって解の全体構造と非線形項の役割を理解することを目標としている．藤田方程式の研究自体は 1960 年代に始まり, 現在も活発な研究が世界的に続けられている．非線形放物型方程式に限らず, 非線形波動方程式や分散型方程式に対する爆発問題の研究等にも多大な影響を与えた．これまでの研究では

- **藤田方程式**: $u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, \quad (p>1)$;
- **球面に値をとる調和写像流方程式**: $\partial_t F = \Delta F + |\nabla F|^2 F, \quad F(\cdot,t) : \mathbf{R}^d \to \mathbb{S}^d$;
- **走化性方程式系** (Keller–Segel 系): $u_t = \Delta u - \nabla\cdot(u\nabla v)$, $0 = \Delta v + u - v$.

を対象とし, Type II 爆発に関するいくつかの興味深い成果を得た．Type II 爆発の存在や性質は非線形項や空間次元に強く依存する．それ故, これらの非線形問題に対する統一的結果を得ることは困難であり, 実際の解析は個々の問題に即した各論的取り扱いが必要となる．爆発解の時空間における詳しい形状を調べるには, 爆発点付近の漸近挙動を調べるだけでは不十分であり, 爆発点から離れた領域での解の情報と組み合わせる必要がある．領域をいくつかの部分に分け, 各部分領域において解の良い近似を得た後にそれらを境界部分でうまくつなげる方法は今日では**接合漸近展開**と呼ばれている．これは流体工学の研究において Prandtl(1905) により創始された境界層理論に端を発しており, 特徴的な性質を持つ近似解を定量的に構成することを得意とする．詳細な漸近計算を数多く行うこと, その数学的厳密化も容易でないことから, 強力ではあるがこの方法を用いた爆発解の研究は非常に限られており, (証明を重視する) 数学解析としてはこれまであまり発展しなかった．私は一連の研究でその応用可能性を十分拡げることができたと考えている．