今後の研究計画

(1) regular Hessenberg 多様体のコホモロジー環と他分野との関連

これまでの研究において，regular nilpotent Hessenberg 多様体と regular semisimple Hessenberg 多様体のコホモロジー環および他分野との関連を調べた．これらを繋ぐものとして，regular Hessenberg 多様体と呼ばれるものがある．最近，最小な regular Hessenberg 多様体のコホモロジー環が，pemutohedron をある超平面でカットされて得られる凸多面体に付随するトーリック多様体のコホモロジー類に環同型であるという結果が得られた (論文執筆中)．この結果を一般化して，regular Hessenberg 多様体のコホモロジー環の明示的表示および他分野との関連について調べていく．

(2) Stanley-Stembridge 予想

Stanley-Stembridge 予想は，グラフ理論における彩色対称関数の正値性に関する問題である．驚くことに，regular semisimple Hessenberg 多様体のコホモロジー環の上の対称群の作用 (Tymoczko のドット作用) が，ある彩色対称関数と同値であるという結果が知られている．この対応により，Stanley-Stembridge 予想は，regular semisimple Hessenberg 多様体のコホモロジー環上の対称群の表現の振舞を調べることに帰着される．これまで，特別な場合の regular semisimple Hessenberg 多様体のコホモロジー環を決定し，そこから，Stanley-Stembridge 予想がこの場合に正しいことを証明した．この方法で，一般の場合の Stanley-Stembridge 予想の解決を試みる．

(3) Harada-Tymoczko 予想

これまでの研究において，「Schubert 類を regular nilpotent Hessenberg 多様体のコホモロジー環に制限したものたち」の間の全ての線形関係式を与えるアルゴリズムが得られたが，実際に，どの Schubert 類の制限たちが regular nilpotent Hessenberg 多様体のコホモロジーの基底をなすかについて考えたい．基底の候補については Harada-Tymoczko により予想されており，この問題に取り組む．

(4) regular nilpotent Hessenberg 多様体上の Schubert calculus

regular nilpotent Hessenberg 多様体上の Schubert calculus を行う．現在，特別な場合の Peterson 多様体のときに，シューベルト多様体とピーターソン多様体の共通部分に関する構造定数を，組合せ論の言葉で記述することができた (論文執筆中)．一般の regular nilpotent Hessenberg 多様体上では構造定数が組合せ論の言葉でどのように記述されるかを引き続き調べていく．