これまでの研究成果のまとめ

私はトーラス群作用の幾何学・トポロジーおよび他分野との関係を調べています．以下はそのうちの主要な研究結果を纏めたものです．

(1) regular nilpotent Hessenberg 多様体と regular semisimple Hessenberg 多様体のコホモロジー環の関係 (論文リスト 1.[5])

regular nilpotent Hessenberg 多様体は Peterson 多様体と旗多様体を自然に繋ぐものであり，regular semisimple Hessenberg 多様体は Permutohedral 多様体と旗多様体を自然に繋ぐものである．ここで，Peterson 多様体は旗多様体の量子コホモロジーと関連するもので，Permutohedral 多様体は permutohedron に対応する射影的トーリック多様体である．

A 型において，regular nilpotent Hessenberg 多様体のコホモロジー環の，生成元と基本関係式による明示的表示を与えた．さらにその明示的表示を用いて，regular nilpotent Hessenberg 多様体のコホモロジー環が regular semisimple Hessenberg 多様体のコホモロジー環の対称群の作用による不変部分環と環同型であるという結果が得られた．ここで，regular semisimple Hessenberg 多様体のコホモロジー環上の対称群の作用は，Tymoczko のドット作用と呼ばれるものである．本研究は阿部拓氏，原田芽ぐみ氏，枡田幹也氏との共同研究である．

(2) Hessenberg 多様体と超平面配置 (論文リスト 1.[3] と 2.[2])

阿部拓郎氏，枡田幹也氏，村井聡氏，佐藤敬志氏との共同研究において，任意の Lie type において，regular nilpotent Hessenberg 多様体のコホモロジー環が超平面配置の言葉を用いて記述できるという驚くべき結果が得られた．この結果から，(1) で得られた regular nilpotent Hessenberg 多様体と regular semisimple Hessenberg 多様体のコホモロジー環の関係が任意の Lie type でも正しいことが分かり，Peterson の予言や Sommers-Tymoczko 予想も解決した．さらにこの結果は，超平面配置の観点から調べることにより，regular nilpotent Hessenberg 多様体のコホモロジー環の明示的表示を与える問題の解決への大きな一歩を与えている．実際，B, C, G 型 regular nilpotent Hessenberg 多様体のコホモロジー環の明示的表示を，A 型と同じようにして与えることができた．その後，榎園誠氏，長岡高広氏，土谷昭善氏との共同研究において，すべての Lie type における regular nilpotent Hessenberg 多様体のコホモロジー環の明示的表示を与えた．

(3) regular nilpotent Hessenberg 多様体のコホモロジーの基底 (論文リスト 1.[1] と 2.[1])

榎園誠氏，長岡高広氏，土谷昭善氏との共同研究において，regular nilpotent Hessenberg 多様体を一つ与えたとき，そのコホモロジー環の基底として，それに含まれるすべての regular nilpotent Hessenberg 多様体のポアンカレ双対を拡張したものが得られた．その後，原田芽ぐみ氏，村井聡氏，Martha Precup 氏，Julianna Tymoczko 氏との共同研究において，regular nilpotent Hessenberg 多様体のコホモロジーの filtration を構成し，上記で得られた基底とは異なる単項式基底が得られた．その単項式基底は，旗多様体において，Schubert 多項式を単項式で表す際に表れるものである．さらに，「Schubert 類を regular nilpotent Hessenberg 多様体のコホモロジー環に制限したものたち」の間の全ての線形関係式を与えるアルゴリズムも与えた．