研究計画

1. テーマ

「リーマン面の正則族の正則切断の個数評価」を中心的な研究テーマとして取り組んで行く。

2. 問題の背景と意義

上記の研究テーマは，数論における Mordel 予想の関係するものである。この予想は、「有理数体上の代数方程式 $P(x, y) = 0$ の有理数解は、方程式の定めるリーマン面の種数が 2 以上ならば、高々有限個である」ことを主張していて、Faltings によって肯定的に解決された。また、Fermat 予想とも密接に関連している。

私の研究対象は、代数方程式を有理関数体上の関数方程式 $P(x(t), y(t)) = 0$ に、有理数解を有理関数解 $(x(t), y(t))$ に変更したものである。関数体上の Mordel 予想は、「この関数方程式の自明でない有理関数解は、方程式の定めるリーマン面の種数が 2 以上ならば、高々有限個である」ことを主張するものである。この予想は Grauert と Manin により肯定的に解決されたが、そこで使われたアイディアは数論の場合の道標になり、数論幾何のモデルにもなった。

上記の予想の解決により、高々有限であること（定性的問題）はわかったが、実際どれくらい存在するのかの評価（定量的問題）は未解決である。この定量的問題についても関数体上で先に結果を出せば、その成果を数論の場合に応用できると期待されている。

3. 研究方法と特色

関数体上の Mordel 予想は、複素多様体の言葉で述べれば、「種数 2 以上のリーマン面の正則族の、自明でない正則切断は高々有限個である」ということに対応している。従って、解の個数評価の問題は、正則切断の個数評価に翻訳でき、複素幾何の問題としてとらえることができる。

特に、リーマン面の正則族は、モデュライ空間と Teichmüller 空間によって、具体的で精密な考察をすることが出来るので、定量的な解析が可能になる。さらに、「正則族や正則切断はモノドロミーのみで決定される」 (Imayoshi & Shig a の剛性定理) ので、モノドロミーという位相的な情報のみを決定すれば、個数評価ができる。このモノドロミーの決定には、2, 3 次元双曲幾何やクライン群論が使える。

4. 具体的な研究計画

典型的な例を中心にしながら、次のようなことがらを具体的に調べる。

(1) リーマン面の正則族のモノドロミーの分類

(2) リーマン面の正則族のモノドロミーを決定する情報（例えば測地線の長さ）の研究

(3) リーマン面の正則族のモノドロミーの個数評価

5. 関連することがら

モノドロミーは写像類群の元に対応し、結び目や組み紐とも密接な関連をもっている。剛性定理やクライン群の極限集合は、エルゴード理論やフラクタルに関係し、以前私が勉強した実解析的手法と双曲幾何的および複素解析的手法を比較でき、両者の関係について結果が得られるかもしれない。また、リーマン面の正則族の研究は、複素解析のみならず、代数幾何、低次元トポロジー、複素微分幾何などとも深く関連しているので、この研究テーマを通じてより広い分野への足懸かりができると考えている。