研究成果

これまでの研究成果としては，1991 年に書いた修士論文のみである．ここではその修士論文 “Hausdorff dimension and Self-similar set” について説明する．

本論文ではフラクタル幾何の研究において重要な役割をはたす，ハウスドルフ次元と自己相似集合について，若干の予備知識とともに解説し，(当時の）最新結果の一つを紹介している．

自己相似集合とは，ある図形の一部を拡大すると，もとの図形と同じような形が現れる性質のことである．より正確には，完備距離空間 X からそれ自身への有限個の縮小写像の組 $\{S_1, \ldots, S_n\}$ に対して，X のコンパクト集合 K が自己相似集合であるとは，$\cup_{i=1}^{n} S_i(K)$ が再び K となることである．シェルピンスキーガスケットや，コッホ曲線など，典型的なフラクタル図形はこの性質を満たすことが知られている．

ハウスドルフ次元はフラクタル図形の複雑さの目安となる量である．例えば n 次元ユークリッド空間の集合で，ルベーグ測度が正の集合のハウスドルフ次元は n である．一般にフラクタル図形のルベーグ測度は 0 か ∞ になるので，ルベーグ測度はフラクタル図形の研究にはあまり利用できない．一方，フラクタル図形 K に対してある正数 s があって，s 次元ハウスドルフ測度は K 上の有限測度となる．この s がハウスドルフ次元である．よって，フラクタル図形の解析にはその図形のハウスドルフ次元を知ることが重要になる．

一般に，ハウスドルフ次元を求めることは難しいのだが，ハッチンソンは，1981 年の論文で，縮小写像が回転・相似・平行移動の合成で，適当な条件（Open set condition）を満たす自己相似集合においては，ハウスドルフ次元が相似次元に一致することを証明した．相似次元は自己相似集合を定義する縮小写像のリプシッツ定数から比較的容易に計算できる次元である．

ハッチンソンの論文では，自己相似集合 K をアルファベット空間（$\{1, \ldots, n\}$ の可算直積空間）の連続写像による像として定義できることを示し，その上で，アルファベット空間における幾何学的測度論を駆使して上記の結果を導いている．

半田は 1990 年のプレプリントで縮小写像が C^1 級の場合について考察した．アルファベット空間に議論を持ち込むのは同じだが，この場合では幾何学的測度論だけでは足らず，エルゴード理論，統計力学も駆使する必要があった．その結果，適当な条件をつけた自己相似集合のハウスドルフ次元をエントロピーを用いて表現できることを示した．半田の結果を紹介したところでこの修士論文は終了する．私は，九州大学大学院修士課程 2 年の後半，ハッチンソンの結果の独自の改良を試みていたが時間切れに終わった．そのため，本修士論文は総合報告であり，オリジナルの成果は含んでいない．