

今後の研究計画

吉脇 理雄

1. 1-tilting stalk complexes を使って Grothendieck 圏における tilting theory の基本的な事実を導来圏の観点から見直すという目的の最終段階として, Grothendieck 群について考えたい. \mathcal{A} を locally noetherian Grothendieck 圏とする. Grothendieck 群 $K_0(\mathcal{A})$ は次のように定義される.

$$K_0(\mathcal{A}) := \bigoplus_{[X] \in \text{fg } \mathcal{A}/\cong} \mathbb{Z}[X]/I$$

ただし, $\text{fg } \mathcal{A}$ は \mathcal{A} の有限生成な objects 全体のなす圏であり, I は

$$\langle [X] - [Y] + [Z] \mid 0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0 \text{ exact} \rangle$$

で生成される部分群である. これは加群圏における Grothendieck 群の自然な拡張であり, 第一の目的は 1-tilting stalk complex T の自己準同型環 B に対して, $K_0(\mathcal{A})$ と $K_0(B)$ の同型を導来圏の観点から別証明を与えることとする.

2. 第二の目的は, 1-tilting stalk complexes を使って Grothendieck 圏における tilting theory の基本的な事実を導来圏の観点から見直すということを任意の n の場合へ一般化することである. ここで, Grothendieck 圏の導来圏が compactly generated であると仮定する. このとき n -tilting stalk complexes ならば n -tilting objects であるが, 逆は成立しない. (すでに反例が知られている (D'Este の例).) それゆえ, どのような条件下で逆が成り立つかについて考察し, この考察に基づいて, n -tilting stalk complexes を使って Grothendieck 圏における tilting theory の基本的な事実を導来圏の観点から証明を行う予定である.
3. Grothendieck 圏における tilting theory に関する結果を tilting sheaves に対して適用することを第三の目的とする. すなわち, ある m に対して tilting sheaves が m -tilting stalk complexes となることを示した上で, tilting sheaves と tilting stalk complexes の定義の違いについて考察を与える予定である.
4. 第四に, 第二の目的とも関連するが, tilting modules を特徴付ける問題について研究する. A を代数閉体上の有限次元多元環とし, T を A 上の tilting module する. このとき, 単純 A 加群の同型類の個数が T の直既約な直和因子の同型類の個数と等しいことがわかる. ここで, この性質が tilting module の条件の一つ, すなわち, exact sequence $0 \rightarrow A \rightarrow T_0 \rightarrow \cdots \rightarrow T_r \rightarrow 0$ が存在する (ただし, $T_0, \dots, T_r \in \text{add } T$) ことと置きかえることができるかどうかという問題がある. このことがどのような条件の下で成立するかを調べる予定である. なお, classical tilting module であれば, このことは無条件で正しいことが知られている.