

# これまでの研究成果のまとめ

吉脇 理雄

これまで導来圏とその間の equivalences について主に研究してきた。近年、それらは Lie theory において重要な役割を果たすことがわかってきている。ところで、それらを研究する上で最も重要であるのが Rickard の行った仕事である。すなわち、1989 年に Rickard は二つの加群圏の導来圏が同値になるための必要十分条件を与えた。その定理は Rickard の定理と呼ばれている。

Rickard の定理は森田同値に関する森田の定理を、導来同値の特徴づけに一般化したものであった。すなわち、Rickard は森田同値関手の特徴づけを与える progenerators の概念を導来同値関手の特徴づけを与える tilting complexes という概念に一般化した。

Rickard の定理は広く応用され、Broué の可換不足群予想の研究等で重要な道具となっている。ところで、Rickard の定理を使うと、導来圏の観点から tilting theory を見直すことが可能となる。それを修士論文の目的の一つとした。 $A$  を代数閉体上の有限次元多元環とする。 $T$  を  $A$  上の tilting module とすると、 $A$  と  $B = \text{End}_A(T)$  はそれぞれの加群圏は同値ではないけれどもそれに近い関係にあることが知られている。特にそれぞれの Grothendieck 群が同型になることや  $A$  の大域次元が有限になることと  $B$  の大域次元が有限になることが必要十分になることがわかる。それらは tilting theory において、重要な部分をなす。ここで、tilting modules は stalk complexes として、tilting complexes であることはほぼ自明であり、Rickard の定理から、tilting theory を導来圏の観点から見ることが可能となる。また、逆に tilting stalk complexes が tilting modules を与えるかどうかという問題を調べてみると、これもまた成り立つことがわかった。

一方、代数閉体上の smooth projective variety  $X$  上の tilting sheaf  $\mathcal{T}$  は  $X$  上の coherent sheaves のなす導来圏と有限生成  $B = \text{Mod}_X(\mathcal{T}, \mathcal{T})$  加群のなす導来圏の間の同値関手を特徴付けることが知られている (Beilinson の補題)。すなわち tilting sheaves とは tilting stalk complexes に対応するものだと考えることができる。しかし、 $B$  の大域次元が有限であることが定義に含まれており、この点で違いがある。ここで、この違いの理由はなにかという疑問を持つのは自然なことと言えよう。Tilting stalk complexes は tilting modules を与えることから、tilting modules に対応する object を考えることによって、その疑問の解決を試みた。

より一般的に Grothendieck 圏で考えることとした。 $X$  上の quasi-coherent sheaves のなす圏  $\text{Qco } X$  や加群のなす圏は Grothendieck 圏であることから自然な拡張であろう。 $\mathcal{A}$  を Grothendieck 圏としよう。 $\mathcal{A}$  上の  $n$ -tilting stalk complexes 及び  $n$ -tilting objects (これが tilting modules に対応するもの) を定義し、特に  $\mathcal{A}$  の導来圏  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  が compactly generated であれば、 $T \in \mathcal{A}$  が 1-tilting stalk complex であることと、1-tilting object でかつ  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  の object として compact であることは同値であることを示した。ところで 1-tilting objects は 1999 年に Colpi によって定義され、Grothendieck 圏における tilting theory についての基本的な事実の証明が行われた。これらの事実を任意の  $n$  の場合に広げるために、1-tilting stalk complexes を使って tilting theory の基本的な事実 (Grothendieck 群に関する部分を除く) を導来圏の観点から見直しを行った。

これらの結果を tilting sheaves に対して適用することはこれからの課題である。