これまでの研究成果のまとめ

辻井 健修

1976 年，Bala と Carter は，標数 0 または十分大きい標数をもつ代数閉体上の連結簡約代数群 G の Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ における (adjoint) nilpotent orbit が，G の (parabolic 部分群の) Levi 部分群 L と，L の distinguished parabolic 部分群 P_L の組 (L, P_L) の共役類に 1 対 1 対応がつくことを示した．それは今日，Bala-Carter の定理と言われている．

Δ を G の単純ルートの集合とする．G の Levi 部分群 L とその distinguished parabolic 部分群 P_L の組 (L, P_L) の共役類は，$I \subset \Delta$ に関する standard Levi 部分群 L_I と，$J \subset I$ に関する L_I の standard distinguished parabolic 部分群 $P_{I,J}$ の組 $(L_I, P_{I,J})$ の，Weyl 群による共役類と自然に 1 対 1 対応がつく．また，parabolic 部分群が distinguished であるかどうかも，ルート系における議論に帰着できる．このことから，nilpotent orbit の分類が可能となった．

後に，Bala-Carter の定理は，標数が good（特に，7 以上）であれば成立することが，Pommerening により証明された．しかしその証明は，それぞれのルート系の場合において具体的な計算を必要とし，非常に手間のかかるものであった．

ところが 2003 年，A. Premet により，Pommerening の結果を，具体的計算無しに証明する手法が発表された．しかもこの証明から直ちに，任意の nilpotent orbit に対しての good transverse slice の存在までも導き出されるという画期的な証明であった．この Premet による証明では，Kempf-Rousseau 理論を利用しているが，この理論はこれまで標数 0 の問題に対しては利用されてきたが，正標数の場合はあまり役立たないとされていたものである．

G の交換子群 $\mathcal{D}G$ が simply connected であると仮定する．$G_{\mathbb{C}}$ を G と同じ root 系を持つ，$\mathbb{C}$ 上の simply connected な半単純代数群とし，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{C}})$ とおく．$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ における任意の nilpotent orbit $\mathcal{O}$ に対し，Jacobson-Morozov の定理より得られる ($\mathbb{Z}$ 上 split する maximal torus の) cocharacter $\lambda_{\mathcal{O}}$ を，G の cocharacter と見なす．cocharacter λ，整数 i に対し，

$$\mathfrak{g}(i;\lambda) = \{Z \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad}(\lambda(\xi))(Z) = \xi^i Z\}$$

とおく．$\mathfrak{g}(2;\lambda_{\mathcal{O}})$ に open dense である，ただ一つの $C_G(\mathrm{Im}\,\lambda_{\mathcal{O}})$-orbit を $\mathfrak{g}(2;\lambda_{\mathcal{O}})_{\mathrm{reg}}$ とすると，$\lambda_{\mathcal{O}}$ は，$\mathfrak{g}(2;\lambda_{\mathcal{O}})_{\mathrm{reg}}$ の任意の元の optimal cocharacter であることを Premet は示し，これを手がかりに Bala-Carter の定理の証明に成功した．

Kempf-Rousseau 理論の大きな特徴として，任意の nilpotent element に対して，optimal と言われる豊富な性質を持つ cocharacter を直に構成できる所にある．私は，できる限り $\mathbb{C}$ 上の表現論を使わず，Kempf-Rousseau 理論を前面に出しての Bala-Carter の定理の証明ができないかと考え，証明に必要な条件をこの度の論文にて明らかにした．