これまでの研究成果のまとめ

辻井 健修

2003年，A. Premetにより与えられたBala-Carterの定理の新しい証明法は，画期的なものであったと言える．基礎体の標数がgoodである時(少なくとも，標数が0，あるいは5より大きければgoodである)，この定理が成立することを最初に証明したのは，Pommereningであった．ところがその証明は，単純代数群の分類を用いて，それぞれの場合において計算を必要とするものであり，type E の場合においては詳細が省かれている．それに対して，Premetの証明は，場合分けを必要とせず，なおかつ，good transverse sliceの存在も同時に証明できる素晴らしいものであった．

とはいえ，Bala と Carter による，標数0，または，標数が十分大きい場合の証明と比べれば，はるかに高度な結果を使用した証明である．

そこで，より簡潔に，より易しい証明法はないかと考え，しばらく研究していた．その過程で，Premet が使用している Kempf-Rousseau 理論における次の事実を発見した．

定理 1 V を代数閉体上の連結簡約代数群 G の有限次元有理表現，$v(\neq 0)$ を G-unstable な V の元，λ を v の optimal cocharacter とする．v の λ によるウェイト分解を $v = \sum_{i\geq k} v_i (v_k \neq 0)$ と書く時，v_k の optimal cocharacter 全体は，v のそれと一致する．

当初，修士論文にて発表予定であったが，直前に証明の欠陥が分かり，発表を控えざるを得なかったが，その後，証明のギャップを埋めることに成功した．証明はsimpleであり，Kempf-Rousseay 理論と代数群の基本的事実しか用いない．この定理より，次を示すことができる．

系 G の adjoint 表現を考える．$X(\neq 0)$ を G のリー環 $\mathfrak{g}$ のベキ零元とし，Λ_X を X の primitive optimal cocharacter 全体とする．任意の $\lambda \in \Lambda_X$ に対して，

$$m(X, \lambda) = \min\{i \in \mathbb{Z} | X_i \neq 0\}$$

が一意に定まるので．これを k と書く．標数が (G に対して)good であれば，$X \in \mathfrak{g}(k;\lambda)$ である $\lambda \in \Lambda_X$ が存在する。

この系を使えば，Bala-Carter や，Premet の証明を摸倣することにより，ベキ零元の性質に関する様々な結果を，簡潔に導き出す事ができる．その最大の結果は次であると言えよう．

定理 2 標数が (G に対して)good であれば，$\mathfrak{g}$ の任意のベキ零元 X に対し，X の中心化群は自然な Levi 分解をもつ．