研究成果

(1) 可換放物型概均質ベクトル空間の量子変形

これは谷崎俊之氏・森田良幸氏との共同研究である．可換放物型概均質ベクトル空間は複素単純 Lie 代数内に構成されるものである．ここで量子変形とは, 量子群が作用する非可換代数として座標環を変形するという意味である．この概均質ベクトル空間の座標環の量子変形 A_q は単純 Lie 代数の型毎に独自に構成されていた．しかし, 私たちの構成法は単純 Lie 代数の型に依存しないものである．

$\mathfrak{p}^+ = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{m}^+$ を $\mathfrak{g}$ の放物型部分代数とし,$\mathfrak{l}$ をその極大簡約部分代数, $\mathfrak{m}^+$ を巾零部分とする．このとき $(L, \mathfrak{m}^+)$ が可換放物型概均質ベクトル空間と呼ばれるものである．ここで L は $\mathfrak{l}$ に対応する代数群である．Killing 形式により $\mathfrak{m}^+$ の座標環は opposite な巾零部分 $\mathfrak{m}^-$ の包絡代数 $U(\mathfrak{m}^-)$ と同一視される．私たちの構成法による A_q は $U(\mathfrak{m}^-)$ に対応する量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数 $U_q(\mathfrak{m}^-)$ として自然に得られるものである．さらにはこれにより $(L, \mathfrak{m}^+)$ の基本相対不変式 f の量子変形 f_q も得られる．

また, 私は古典的単純 Lie 代数の場合に, A_q と f_q の具体形を与えた．

(2) b 関数の量子変形

$(L, \mathfrak{m}^+)$ の基本相対不変式 f に対し, 定数係数微分作用素 ${}^t f(\partial)$ と多項式 $b(s)$ で, ${}^t f(\partial) f^{s+1} = b(s) f^s$ をみたすものが存在する．この $b(s)$ が f の b 関数である．一般に $g \in U(\mathfrak{m}^-)$ から定数係数微分作用素 ${}^t g(\partial)$ が定義され, これらを用いて $U(\mathfrak{m}^-)$ 上の反変対称形式が定義される．これは定数倍を除いて一意である．この対称形式の量子版を, $U_q(\mathfrak{g})$ の自然な双線形形式を用いて, $U_q(\mathfrak{m}^-)$ 上の非退化対称形式として定義した．この非退化対称形式から $U_q(\mathfrak{m}^-)$ 上の線形写像である「量子微分作用素」${}^t f_q(\partial)$ を定義することができ, ${}^t f_q(\partial) f_q^s = b_q(s) f_q^s$（$s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$）をみたす $b_q(s) \in \mathbb{C}(q)[q^s]$ が存在することを示した．私は場合ごとに計算することにより, $b_q(s)$ の具体形を与えた．なお, A 型については私のものとは異なる $b_q(s)$ が野海・梅田・若山の三氏より与えられている．

$(L, \mathfrak{m}^+)$ の b 関数は, 旗多様体 G/P 上の不変式の b 関数の特別な場合である．P が Borel 部分群の時, 柏原正樹氏は普遍 Verma 加群により b 関数を決定した．私は $\mathrm{Lie}(P) = \mathfrak{p}^+$ の場合に同様にして, $(L, \mathfrak{m}^+)$ の b 関数の表示で, 次のような $\mathfrak{g}$ 加群の weight を用いたものを得た．

$$b(s) = \prod_{\eta \in Wt(\mu) \setminus \{\mu\}} \big((s\mu + \rho + \mu, s\mu + \rho + \mu) - (s\mu + \rho + \eta, s\mu + \rho + \eta) \big),$$

ここで μ はある特別な基本整 weight であり, $Wt(\mu)$ は最高 weight μ の既約 $\mathfrak{g}$ 加群の既約部分 $\mathfrak{l}$ 加群の最高 weight からなる集合であり, ρ は $\mathfrak{g}$ の正ルートの半和である．この b 関数は多項式環のあるイデアルの生成元に対応しており, 同様に, $(L, \mathfrak{m}^+)$ の量子 b 関数が Laurent 多項式環のイデアルの生成元として得られる．上で述べた A 型の場合における野海・梅田・若山らの $b_q(s)$ との違いはこの生成元の取り方の差である．