研究計画

普遍 Verma 加群によって旗多様体 G/P 上のある不変式 f の b 関数を決定する微分作用素 ${}^t f(\partial)$ を定義することができる．普遍 Verma 加群は $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ の包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ のある係数拡大 $R \otimes U(\mathfrak{g})$ を用いることによって通常の Verma 加群と同様に定義される．ここで R は多項式環である．旗多様体 G/P 上の不変式 f に対して, R のイデアルが普遍 Verma 加群により定義され, その生成元が f の b 関数に対応している．

量子化の場合においても普遍 Verma 加群は同様に定義される．ただし, このときの係数環 R は有理関数体 $\mathbb{C}(q)$ 上の Laurent 多項式環を用いる．同様の方法により「量子微分作用素」が定義され, R のイデアルの生成元が b 関数の量子変形と対応している．私はこの「量子微分作用素」について研究をする．A_{2n-1} 型の可換放物型概均質ベクトル空間 $(L, \mathfrak{m}^+)$ に対して, 野海・梅田・若山の三氏は R 行列を用いて「量子微分作用素」を決定し, b 関数の量子変形を求めた．そこで逆に, 普遍 Verma 加群による「量子微分作用素」から R 行列が構成できないか考える．

また, この A_{2n-1} 型概均質ベクトル空間 $(L, \mathfrak{m}^+)$ の基本相対不変式 f の b 関数は Capelli 恒等式により求められる．Capelli 恒等式とは以下のものである．

$$\det(x_{ij})_{1\le i,j\le n} \det(\frac{\partial}{\partial x_{ij}})_{1\le i,j\le n} = \det\left(\sum_{k}^{n} x_{ki}\frac{\partial}{\partial x_{kj}} + (n-j)\delta_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}.$$

この右辺は $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心の元と対応しており, 左辺は微分作用素 $f\,{}^t f(\partial)$ そのものである．普遍 Verma 加群の点からも, この作用素 $f\,{}^t f(\partial)$ に対応する $U(\mathfrak{l})$ の中心元 z_0 が存在するが, この z_0 の性質について調べる．さらに, 量子化においても対応する中心元や Capelli 恒等式の存在について調べたい．量子化では係数環 R には定数以外の単元があるので, このような中心元や Capelli 恒等式が R のイデアルの生成元の取り方に依存するかどうかという疑問も生じる．この対応により, 量子群の中心の元の新たな表示や性質を求めたい．量子群の中心と「量子微分作用素」との間に良い関係が期待される．

私はまた, 「量子微分作用素」からなる空間にも興味がある．一般にこのような空間を考えることが出来るのか．$q=1$ の古典的な場合においては, 座標系 $\{x_i\}$ において微分作用素は $\frac{\partial}{\partial x_i}$ や x_j によって生成されるが, 量子版でも $\frac{\partial}{\partial x_i}$ に対応する生成元が存在するのか．「量子微分作用素」の空間の構造について調べたい．

また, 旗多様体以外の代数群の作用をもつ代数多様体についてその量子化における「微分作用素」の構成を試みる．