

研究成果

(1) 可換放物型概均質ベクトル空間の量子変形：

これは谷崎俊之氏・森田良幸氏との共同研究である。可換放物型概均質ベクトル空間は複素単純 Lie 代数内に構成される。ここで量子変形とは、量子群が作用する非可換代数として座標環を変形するという意味である。 $\mathfrak{p}^+ = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{m}^+$ を \mathfrak{g} の放物型部分代数とし、 \mathfrak{l} をその極大簡約部分代数、 \mathfrak{m}^+ を巾零部分とする。このとき (L, \mathfrak{m}^+) が可換放物型概均質ベクトル空間と呼ばれるものである。ここで L は \mathfrak{l} に対応する代数群である。 \mathfrak{m}^+ の座標環は opposite な巾零部分 \mathfrak{m}^- の包絡代数 $U(\mathfrak{m}^-)$ と同一視でき、その量子変形 A_q は量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の $U(\mathfrak{m}^-)$ に対応する部分代数 $U_q(\mathfrak{m}^-)$ として自然に得られる。さらにはこれにより (L, \mathfrak{m}^+) の基本相対不変式 f の量子変形 f_q も得られる。これらの構成法は単純 Lie 代数の型に依存しないものである。

また、私は古典的単純 Lie 代数の場合に、 A_q と f_q の具体形を与えた。

(2) b 関数の量子変形：

(L, \mathfrak{m}^+) の基本相対不変式 f に対し、定数係数微分作用素 ${}^t f(\partial)$ と多項式 $b(s)$ で、 ${}^t f(\partial)f^{s+1} = b(s)f^s$ をみたすものが存在する。この $b(s)$ が f の b 関数である。

この (L, \mathfrak{m}^+) の b 関数 $b(s)$ は、旗多様体 G/P 上の不変式の b 関数の特別な場合である。 P が Borel 部分群の時、柏原正樹氏は普遍 Verma 加群により b 関数を決定した。私は $\text{Lie}(P) = \mathfrak{p}^+$ の場合に同様に、 \mathfrak{g} 加群の weight を用いた (L, \mathfrak{m}^+) の b 関数の次のような表示を得た。

$$b(s) = \prod_{\eta \in \text{Wt}(\mu) \setminus \{\mu\}} ((s\mu + \rho + \mu, s\mu + \rho + \mu) - (s\mu + \rho + \eta, s\mu + \rho + \eta)),$$

ここで μ はある特別な単純ルート α に対応する基本整 weight、 $\text{Wt}(\mu)$ は最高 weight μ をもつ既約 \mathfrak{g} 加群の既約部分 \mathfrak{l} 加群の最高 weight からなる集合、 ρ は \mathfrak{g} の正ルートの半和である。この b 関数は普遍 Verma 加群により定義される多項式環のイデアルの生成元と対応している。また、この対応における微分作用素と包絡環 $U(\mathfrak{l})$ の中心元との関係も得られた。これは Capelli 恒等式と呼ばれるものである。

普遍 Verma 加群の量子化により、同様に (L, \mathfrak{m}^+) の量子 b 関数 $b_q(s)$ が Laurent 多項式環のイデアルの生成元として得られる。このとき $b_q(s)$ は

$$b_q(s) = \prod_{\eta \in \text{Wt}(\mu) \setminus \{\mu\}} \left[\frac{(s\mu + \rho + \mu, s\mu + \rho + \mu) - (s\mu + \rho + \eta, s\mu + \rho + \eta)}{2m_\eta} \right]_q$$

となる。ただし m_η は $(\mu, \mu - \eta) = m_\eta \frac{(\alpha, \alpha)}{2}$ となる正整数であり、 $[t]_q = \frac{q^t - q^{-t}}{q - q^{-1}}$ である。この $b_q(s)$ の表示は、生成元のとり方により q_α^{ns} 倍の差がある ($q_\alpha = q^{\frac{(\alpha, \alpha)}{2}}$, $n \in \mathbb{Z}$)。明らかに $b(s)$ と $b_q(s)$ の零点は一致する。これらの普遍 Verma 加群による結果は \mathfrak{g} の型によらずに示せる。